DOI:10.13203/j.whugis1999.01.016

第24卷第1期 武汉测绘科技大学学报 Vol.24 No.1
1999年3月 Journal of Wuhan Technical University of Surveying and Mapping March 1999

非线性模型参数估计的直接解法*

王新洲

(武汉测绘科技大学地学测量工程学院,武汉市珞喻路129号,430079)

摘 要 提出了非线性模型参数估计的直接解法。该方法不仅不需迭代,而且由于顾及了二次项和三次项的影响,参数估值的精度优于传统的线性近似时参数估值的精度,且易应用传统的精度评定理论进行精度评定。

关键词 非线性模型;参数估计;直接解算

分类号 P207

文献[1]指出,由于非线性模型的非线性强度不同,使得有些非线性模型可以线性近似,有些则不能。因此,对于一个非线性模型,首先应计算其容许曲率,然后按文献[1]中判断非线性模型能否线性近似的方法判断,对能线性近似的非线性模型可用传统方法先线性化,再按线性模型进行参数估计。对于相对固有曲率较大,不能线性近似的非线性模型,只能采用迭代的方法进行参数估计。这样处理非线性模型,在算法和理论上还有一些问题需要解决。首先,多参数非线性模型的最大相对固有曲率Γ^N和最大相对参数效应曲率Γ^T[1]的计算十分复杂,不便于应用;其次,通过复杂的判断后,对相对固有曲率Γ^N大于其容许曲率$\Gamma_{容}$的非线性模型,仍是只能采用迭代的方法进行参数估计。因此,在对参数估值的精度要求较高的情况下,一般不应线性近似。为此,本文根据附有限制条件的间接平差原理[2],导出了非线性模型参数估计的直接解法。

1 直接解算原理与解算步骤

1.1 直接解算原理

设非线性模型为:

$$\begin{cases} \boldsymbol{L} = f(\boldsymbol{X}) + \boldsymbol{\Delta} \\ E(\boldsymbol{L}) = f(\boldsymbol{X}), E(\boldsymbol{\Delta}) = 0 \\ D(\boldsymbol{L}) = D(\boldsymbol{\Delta}) = \sigma_0^2 \boldsymbol{P}^{-1} \end{cases} \tag{1}$$

式中,$\boldsymbol{L}$为$n\times1$的观测值向量;$\boldsymbol{X}$为$t\times1$的参数向量(t为必要观测数,$t<n$);$\boldsymbol{\Delta}$为$n\times1$的观测误差向量;$f(\boldsymbol{X})$是观测向量$\boldsymbol{L}$的数学期望,它是参数$\boldsymbol{X}$的非线性函数,其二阶导数存在,且

$$f(\boldsymbol{X}) = [f_1(\boldsymbol{X})\ f_2(\boldsymbol{X})\ \cdots\ f_n(\boldsymbol{X})]^{\mathrm{T}}$$

令

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}^0 + \boldsymbol{x} = [X_1^0 + x_1, X_2^0 + x_2, \cdots, X_t^0 + x_t]^{\mathrm{T}} \tag{2}$$

传统线性化是将(1)式的第一个式子按台劳级数展开,取至一次项,得:

$$\boldsymbol{L} = f(\boldsymbol{X}^0) + \boldsymbol{B}x + \boldsymbol{\Delta} \tag{3}$$

式中,

$$\underset{n\times t}{\boldsymbol{B}} = \begin{bmatrix} \partial f_1/\partial x_1 & \cdots & \partial f_1/\partial x_t \\ \vdots & & \vdots \\ \partial f_n/\partial x_1 & \cdots & \partial f_n/\partial x_t \end{bmatrix}$$

现仍按台劳级数展开,但取至三次项(一般取至三次项能保证足够的精度),得:

$$\boldsymbol{L} = f(\boldsymbol{X}^0) + \boldsymbol{Bx} + \boldsymbol{Cy}/2 + \boldsymbol{Dz}/6 + \boldsymbol{\Delta} \tag{4}$$

式中,

$$\underset{n\times u}{\boldsymbol{C}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_1^2} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_t^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_t^2} \\ 2\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & 2\frac{\partial^2 f_n}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \vdots & & \vdots \\ 2\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_t} & \cdots & 2\frac{\partial^2 f_n}{\partial x_1 \partial x_t} \\ 2\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2 \partial x_3} & \cdots & 2\frac{\partial^2 f_n}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \vdots & & \vdots \\ 2\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_{t-1} \partial x_t} & \cdots & 2\frac{\partial^2 f_n}{\partial x_{t-1} \partial x_t} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{5}$$

收稿日期:1998-08-04. 王新洲,男,45岁,教授,博士生导师,现从事大地测量数据处理研究。

* 国家自然科学基金资助项目,编号49474204。

$$
\underset{n\times\beta}{\boldsymbol{D}} = \begin{bmatrix}
\dfrac{\partial^3 f_1}{\partial x_1^3} & \cdots & \dfrac{\partial^3 f_n}{\partial x_1^3} \\
\vdots & & \vdots \\
\dfrac{\partial^3 f_1}{\partial x_t^3} & \cdots & \dfrac{\partial^3 f_n}{\partial x_t^3} \\
3\dfrac{\partial^3 f_1}{\partial x_1^2 \partial x_2} & \cdots & 3\dfrac{\partial^3 f_n}{\partial x_1^2 \partial x_2} \\
\vdots & & \vdots \\
3\dfrac{\partial^3 f_1}{\partial x_1^2 \partial x_t} & \cdots & 3\dfrac{\partial^3 f_n}{\partial x_1^2 \partial x_t} \\
3\dfrac{\partial^3 f_1}{\partial x_2^2 \partial x_1} & \cdots & 3\dfrac{\partial^3 f_n}{\partial x_2^2 \partial x_1} \\
\vdots & & \vdots \\
3\dfrac{\partial^3 f_1}{\partial x_t^2 \partial x_{t-1}} & \cdots & 3\dfrac{\partial^3 f_n}{\partial x_t^2 \partial x_{t-1}} \\
6\dfrac{\partial^3 f_1}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} & \cdots & 6\dfrac{\partial^3 f_n}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} \\
\vdots & & \vdots \\
6\dfrac{\partial^3 f_1}{\partial x_{t-2} \partial x_{t-1} \partial x_t} & \cdots & 6\dfrac{\partial^3 f_n}{\partial x_{t-2} \partial x_{t-1} \partial x_t}
\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{6}
$$

其中，$\alpha=t(t+1)/2$；$\beta=t^2+C_t^3$；$\underset{t\times 1}{\boldsymbol{x}}=(x_1,x_2,\cdots,x_t)^{\mathrm{T}}$，$C_t^3$ 表示从 t 个数中取 3 个的组合。

$$\underset{\alpha\times 1}{\boldsymbol{y}}=(x_1^2,x_2^2,\cdots,x_t^2,x_1x_2,x_1x_3,\cdots,x_1x_t,x_2x_3,\cdots x_2x_t,\cdots,x_{t-1}x_t)^{\mathrm{T}}$$

$$\underset{\beta\times 1}{\boldsymbol{z}}=(x_1^3,x_2^3,\cdots,x_t^3,x_1^2x_2,\cdots,x_1^2x_t,x_2^2x_1,\cdots,x_t^2x_{t-1},x_1x_2x_3,\cdots,x_{t-2}x_{t-1}x_t)^{\mathrm{T}}$$

由式(4)知，$\boldsymbol{y}$ 和 $\boldsymbol{z}$ 相当于附加参数，即在传统的线性化后的观测方程式(3)中增加了两组附加参数 $\boldsymbol{y}$ 和 $\boldsymbol{z}$。由于 $\boldsymbol{y}$、$\boldsymbol{z}$ 都是 $\boldsymbol{x}$ 的非线性函数，即参数之间不独立，故由式(4)不可能同时解出 $\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{y}$、$\boldsymbol{z}$。由于参数 $\boldsymbol{X}$ 与附加参数 $\boldsymbol{y}$、$\boldsymbol{z}$ 之间相关，于是 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$、$\boldsymbol{z}$ 之间就存在限制条件。其限制条件的个数 s 等于参数总数减去必要观测值的个数，即 $s=(t+\alpha+\beta)-t=\alpha+\beta$。于是，可得到附有限制条件的间接平差模型：

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{V}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}/2+\boldsymbol{D}\boldsymbol{z}/6+\boldsymbol{l}\\
&\hat{y}_1-\hat{x}_1^2=0\\
&\quad\cdots\\
&\hat{y}_{t+1}-\hat{x}_1\hat{x}_2=0\\
&\quad\cdots\\
&\hat{y}_\alpha-\hat{x}_{t-1}\hat{x}_t=0\\
&\hat{z}_1-\hat{x}_1^3=0\\
&\quad\cdots\\
&\hat{z}_t-\hat{x}_t^3=0\\
&\hat{z}_{t+1}-\hat{x}_1^2\hat{x}_2=0\\
&\quad\cdots\\
&\hat{z}_\beta-\hat{x}_{t-2}\hat{x}_{t-1}\hat{x}_t=0
\end{aligned} \tag{7}
$$

式中，

$$\boldsymbol{l}=f(\boldsymbol{X}^0)-\boldsymbol{L} \tag{8}$$

附有限制条件的间接平差模型式(7)中的限制条件也是非线性方程，仍需展为台劳级数。由于 x 是 X 的改正数，已是微小量，故将条件方程展为台劳级数时，只需取至一次项即可。为此令

$$\hat{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{x}^0+\delta\boldsymbol{x} \tag{9}$$

展开式(7)中的限制条件方程得：

$$
\hat{\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{y}^0+\delta\boldsymbol{y}=
\begin{pmatrix}
x_1^{02}\\ \cdots \\ x_t^{02} \\ x_1^0x_2^0 \\ \cdots \\ x_{t-1}^0x_t^0
\end{pmatrix}
+
\begin{pmatrix}
2x_1^0\delta x_1\\ \cdots \\ 2x_t^0\delta x_t \\ x_2^0\delta x_1+x_1^0\delta x_2 \\ \cdots \\ x_t^0\delta x_{t-1}+x_{t-1}^0\delta x_t
\end{pmatrix} \tag{10}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{z}}=\boldsymbol{z}^0+\delta\boldsymbol{z}=&((x_1^0)^3\ \cdots\ (x_t^0)^3\ \ (x_1^0)^2 2x_2^0\ \cdots\ (x_t^0)^2x_{t-1}^0\ \ (x_1^0x_2^0x_3^0\ \cdots\ (x_{t-2}^0x_{t-1}^0x_t^0)^{\mathrm{T}}+\\
&\begin{pmatrix}
3(x_1^0)^2\delta x_1\\
\cdots\\
3(x_t^0)^2\delta x_t\\
2x_1^0x_2^0\delta x_1+(x_1^0)^2\delta x_2\\
\cdots\\
2x_t^0x_{t-1}\delta x_t+(x_t^0)^2\delta x_{t-1}\\
x_2^0x_3^0\delta x_1+x_1^0x_3^0\delta x_2+x_1^0x_2^0\delta x_3\\
\cdots\\
x_{t-1}^0x_t^0\delta x_{t-2}+x_{t-2}^0x_t^0\delta x_{t-1}+x_{t-2}^0x_{t-1}^0\delta x_t
\end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{11}
$$

将式(9)、(10)、(11)代入式(7)的第一式，消去附加参数 $\boldsymbol{y}$ 和 $\boldsymbol{z}$，得新的误差方程：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{V}=&\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^0+\boldsymbol{B}\delta\boldsymbol{x}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}^0/2+\boldsymbol{C}\delta\boldsymbol{x}+\\
&\boldsymbol{D}\boldsymbol{z}^0/6+\boldsymbol{D}\delta\boldsymbol{x}+\boldsymbol{l}
\end{aligned} \tag{12}
$$

式中，$\boldsymbol{C}\delta x=\boldsymbol{C}\delta y/2$；$\boldsymbol{D}\delta x=\boldsymbol{D}\delta z/2$。

经推导，可得：

$$
\underset{n\times t}{\boldsymbol{C}}=\begin{bmatrix}
\sum_{i=1}^{t}x_i^0\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x_1\partial x_i} & \cdots & \sum_{i=1}^{t}x_i^0\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x_t\partial x_i}\\
\vdots & & \vdots\\
\sum_{i=1}^{t}x_i^0\dfrac{\partial^2 f_n}{\partial x_1\partial x_i} & \cdots & \sum_{i=1}^{t}x_i^0\dfrac{\partial^2 f_n}{\partial x_t\partial x_i}
\end{bmatrix} \tag{13}
$$

$$
\underset{n\times t}{\boldsymbol{D}}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}
E_1 & \cdots & F_1 & \cdots & G_1\\
\vdots & & \vdots & & \vdots\\
E_n & \cdots & F_n & \cdots & G_n
\end{pmatrix} \tag{14}
$$

式中，

$$E_1=\sum_{i=1}^{t}(x_i^0)^2\frac{\partial^3 f_1}{\partial x_i^2\partial x_1}+2x_1^0\sum_{i=2}^{t}x_i^0\frac{\partial^3 f_1}{\partial x_1^2\partial x_i}+$$

$$2\sum_{i=2}^{t-1}x_i^0\sum_{j=i+1}^{t}x_j^0\frac{\partial^3 f_1}{\partial x_1\partial x_i\partial x_j};$$

$$F_1=\sum_{i=1}^{t}(x_i^0)^2\frac{\partial^3 f_1}{\partial x_i^2\partial x_k}+2x_k^0\sum_{i=1,i\neq k}^{t}x_i^0\cdot\frac{\partial^3 f_1}{\partial x_k^2\partial x_i}+2x_1^0\sum_{i=2,i\neq k}^{t}x_i^0\frac{\partial^3 f_1}{\partial x_1\partial x_k\partial x_i}+2\sum_{i=2,i\neq k}^{t-1}x_i^0\sum_{j=i+1,j\neq k}^{t}x_j^0\frac{\partial^3 f_1}{\partial x_i\partial x_k\partial x_j};$$

$$G_1=\sum_{i=1}^{t}(x_i^0)^2\frac{\partial^3 f_1}{\partial x_i^2\partial x_t}+2x_t^0\sum_{i=1}^{t-1}x_i^0\cdot\frac{\partial^3 f_1}{\partial x_t^2\partial x_i}+2x_1^0\sum_{i=2}^{t-1}x_i^0\frac{\partial^3 f_1}{\partial x_1\partial x_i\partial x_t}+2\sum_{i=2}^{t-2}x_i^0\sum_{j=i+1}^{t-1}x_j^0\frac{\partial^3 f_1}{\partial x_i\partial x_j\partial x_t};$$

$$E_n=\sum_{i=1}^{t}(x_i^0)^2\frac{\partial^3 f_n}{\partial x_i^2\partial x_1}+2x_1^0\sum_{i=2}^{t}x_i^0\cdot\frac{\partial^3 f_n}{\partial x_1^2\partial x_i}+2\sum_{i=2}^{t-1}x_i^0\sum_{j=i+1}^{t}x_j^0\frac{\partial^3 f_n}{\partial x_1\partial x_i\partial x_j};$$

$$F_n=\sum_{i=1}^{t}(x_i^0)^2\frac{\partial^3 f_n}{\partial x_i^2\partial x_k}+2x_k^0\sum_{i=1,i\neq k}^{t}x_i^0\cdot\frac{\partial^3 f_n}{\partial x_k^2\partial x_i}+2x_1^0\sum_{i=2,i\neq k}^{t}x_i^0\frac{\partial^3 f_n}{\partial x_1\partial x_k\partial x_i}+2\sum_{i=2,i\neq k}^{t-1}x_i^0\sum_{j=i+1,j\neq k}^{t}x_j^0\frac{\partial^3 f_n}{\partial x_i\partial x_k\partial x_j};$$

$$G_n=\sum_{i=1}^{t}(x_i^0)^2\frac{\partial^3 f_n}{\partial x_i^2\partial x_t}+2x_t^0\sum_{i=1}^{t-1}x_i^0\cdot\frac{\partial^3 f_n}{\partial x_t^2\partial x_i}+2x_1^0\sum_{i=2}^{t-1}x_i^0\frac{\partial^3 f_n}{\partial x_1\partial x_i\partial x_t}+2\sum_{i=2}^{t-2}x_i^0\sum_{j=i+1}^{t-1}x_j^0\frac{\partial^3 f_n}{\partial x_i\partial x_j\partial x_t}。$$

其中，k 为矩阵 $\boldsymbol{D}$ 的列数，且 $2\leqslant k\leqslant t-1$。

令

$$\begin{cases}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}\\ \boldsymbol{l}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^0+\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}^0/2+\boldsymbol{D}\boldsymbol{z}^0/6+\boldsymbol{l}\end{cases}\tag{15}$$

则式(12)可写为：

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{B}\delta\boldsymbol{x}+\boldsymbol{l}\tag{16}$$

式(16)是一般间接平差的误差方程。根据最小二乘原理可得法方程：

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\delta\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}^{\mathrm T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{l}=0\tag{17}$$

若式(17)有唯一解，则很容易求得 $\delta\boldsymbol{x}$。而式(17)有唯一解的充分必要条件是 $\boldsymbol{B}^{\mathrm T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}$ 为满秩矩阵[3]，即 $\mathrm{rk}(\boldsymbol{B}^{\mathrm T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{B})=t$。下面先证明 $\boldsymbol{B}^{\mathrm T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}$ 满秩。

因为 $\mathrm{rk}(\boldsymbol{B}^{\mathrm T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{B})=\mathrm{rk}(\boldsymbol{B})$，所以要证明 $\boldsymbol{B}^{\mathrm T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}$ 满秩，只要证明 $\mathrm{rk}(\boldsymbol{B})=t$。

因 $\mathrm{rk}(\boldsymbol{B})=t$（$\boldsymbol{B}$ 矩阵列满秩[2]，设 $\mathrm{rk}(\boldsymbol{C})=t_C\leqslant t$，$\mathrm{rk}(\boldsymbol{D})=t_D\leqslant t$），于是由文献[3]知：

$$\mathrm{rk}(\boldsymbol{B})=\mathrm{rk}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D})\leqslant t+t_C+t_D$$

所以，

$$\mathrm{rk}(\boldsymbol{B})\geqslant\mathrm{rk}(\boldsymbol{B})=t\tag{18}$$

又因为 $\boldsymbol{B}$ 是 $n\times t$ 的矩阵，而 $n>t$，所以 $\boldsymbol{B}$ 秩不大于 t，即

$$\mathrm{rk}(\boldsymbol{B})\leqslant t\tag{19}$$

综合考虑式(18)和式(19)得：

$$\mathrm{rk}(\boldsymbol{B})=t$$

所以矩阵 $\boldsymbol{B}^{\mathrm T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}$ 满秩，于是式(17)有唯一解：

$$\delta\boldsymbol{x}=-(\boldsymbol{B}^{\mathrm T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{l}\tag{20}$$

解出 $\delta\boldsymbol{x}$ 后，由下式可得参数 X 的估值：

$$\hat{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{X}^0+\boldsymbol{x}^0+\delta\boldsymbol{x}\tag{21}$$

式(21)就是非线性模型式(1)的直接解算结果。

1.2 直接解算步骤

由式(20)知，$\delta\boldsymbol{x}$ 的解算与传统方法相似，所不同的就是在按式(20)求 $\delta\boldsymbol{x}$ 之前，要先用参数改正数 $\boldsymbol{x}$ 的近似值 $\boldsymbol{x}^0$ 计算出 $\boldsymbol{y}^0$、$\boldsymbol{z}^0$ 以及矩阵 $\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{D}$，具体解算步骤如下：

1）按传统方法确定参数 $\boldsymbol{X}$ 的近似值 $\boldsymbol{X}^0$；

2）对非线性函数 $f_i(\boldsymbol{X})$ 分别求 1、2、3 阶偏导数，并用 $\boldsymbol{X}^0$ 按传统方法组成 $\boldsymbol{B}$ 矩阵以及按式(5)和式(6)组成 $\boldsymbol{C}$ 矩阵和 $\boldsymbol{D}$ 矩阵；

3）选定适当小的向量作为近似值 $\boldsymbol{x}^0$，或按传统的线性近似方法（一般的间接平差）求 $\boldsymbol{x}^0$，即

$$\boldsymbol{x}^0=-(\boldsymbol{B}^{\mathrm T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{l};$$

4）根据式(10)、式(11)计算 $\boldsymbol{y}^0$ 和 $\boldsymbol{z}^0$；

5）根据式(13)和式(14)计算 $\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{D}$；

6）根据式(15)计算 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{l}$，然后根据式(20)计算 $\delta\boldsymbol{x}$，最后根据式(21)计算参数 $\boldsymbol{X}$ 的估值 $\hat{\boldsymbol{X}}$。

2 精度评定

单位权方差的无偏估计仍为 $\hat\sigma_0^2=\boldsymbol{V}^{\mathrm T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{V}/r$。

由式(21)知，$\boldsymbol{Q}_{\hat X\hat X}=\boldsymbol{Q}_{\delta x\delta x}$。而由式(20)可得 $\boldsymbol{Q}_{\delta x\delta x}=(\boldsymbol{B}^{\mathrm T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{B})^{-1}$。所以参数估值 $\hat X$ 的协因数阵为 $\boldsymbol{Q}_{\hat X\hat X}=(\boldsymbol{B}^{\mathrm T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{B})^{-1}$。

设参数估值 $\hat X$ 的非线性函数为 $\varphi=f(\hat X)$，将 φ 展为台劳级数，取至三次项得：

$$\varphi=f(X^0)+\boldsymbol{b}x+\boldsymbol{c}y/2+\boldsymbol{d}z/6=f(X^0)+\boldsymbol{b}x^0+\boldsymbol{b}\delta x+\boldsymbol{c}y^0/2+\boldsymbol{c}\delta x+\boldsymbol{d}z^0/6+\boldsymbol{d}\delta x=(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})\delta x+\varphi_0=\boldsymbol{b}\delta x+\varphi_0$$

式中，$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$ 分别为 $f(\hat X)$ 的 1、2、3 阶偏导数在 X^0 处算得的行向量，相当于 $\boldsymbol{B}$ 矩阵、$\boldsymbol{C}$ 矩阵和 $\boldsymbol{D}$ 矩阵中的一行。

$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$ 亦为行向量，其计算方法与式(13)、式(14)中一行的计算方法相同。于是，应用协因数传播律得：

$$\boldsymbol{Q}_{\varphi\varphi}=\boldsymbol{b}^{\mathrm T}\boldsymbol{Q}_{\hat X\hat X}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}^{\mathrm T}(\boldsymbol{B}^{\mathrm T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{b}$$

3　算例与结论

设某非线性函数为 $y=ae^{bt}$，参数的真值分别为 $a=5.420\ 136\ 187$，$b=-0.254\ 361\ 190$，y 的真值与模拟观测值列于表 1。

表 1　模拟观测值

Tab. 1　Simulated Observations

x	1	2	3	4	5
y	4.202 834	3.258 924	2.527 006	1.959 469	1.519 391
L	4.21	3.24	2.55	1.98	1.49

根据模拟观测值，我们分别采用参数变换法、线性近似法、迭代计算法（迭代至前后两次之差小于等于 1×10^{-6}，下同）和直接解算法（三次逼近）进行了参数估计，结果列于表 2。

表 2　不同方法的参数估计结果

Tab. 2　The Estimated Results by Various Methods

估计方法	估值		相对精度	
	a	b	$\Delta a/a$	$\Delta b/b$
参数变换	5.133 263 683	0.256 060 00	1/110	1/150
线性近似	5.428 123 877	0.254 809 26	1/680	1/570
迭代计算	5.428 214 967	0.254 817 14	1/670	1/560
直接解算	5.427 990 595	0.254 808 35	1/690	1/570

综上所述，可得到如下结论：

1）本文提出的非线性模型参数估计的直接解法是一种行之有效的严密方法。

2）在两种情况下，式(4)中的 C 矩阵和 D 矩阵等于 0。一种情况是在展为台劳级数时，只取至一次项，即线性近似；另一种情况是二阶和二阶以上各阶偏导数值等于 0。这就是函数模型为线性模型时的情况。当 C 矩阵和 D 矩阵等于 0 时，式(4)变为一般的间接平差模型。这表明一般的间接平差（包括线性模型）是本方法的特例。

3）本法考虑了二次项和三次项的影响，且不需迭代可直接解算参数的估值，精度评定可按传统方法进行，方便简单。

4）本法的实质是附有限制条件的间接平差，故参数估值具有一般最小二乘解所具有的优良统计性质。

5）本文给出了三次逼近的计算公式。若不计算公式中的 D 和 D，就变为二次逼近。若连 C 和 C 也不计算，则变为一般的线性近似。

6）在控制网平差中，x^0 可任意给定 t 个 cm 级相同数字，这样既能保证精度又能简化计算。

参考文献

1　王新洲．非线性模型线性近似的容许曲率．武汉测绘科技大学学报，1997，22(2)：119～121

2　武汉测绘科技大学测量平差教研室．测量平差基础（第三版）．北京：测绘出版社，1996．57～60

3　武汉大学数学系．线性代数．北京：人民教育出版社，1980．97～123

4　王新洲．测量平差．北京：水利电力出版社，1991．266～267

A Direct Solution Method of Parameter Estimation of Nonlinear Model

Wang Xinzhou

(School of Geo science and Surveying Engineering, WTUSM, 129 Luoyu Road, Wuhan, China, 430079)

Abstract　In geodesy many models are nonlinear ones. The classical methods dealing with these nonlinear models are either linear approximations using the approximation value of parameters or iterations. Some nonlinear models can not be linearized. Linearizing these nonlinear models will reduce the precision of estimators. If using iteration there is different convergence for differents methods or for different nonlinear modes. And it is very difficult to evaluate precision of estimators or functions of estimators. To solve the problems, a direct solution method has been presented in this paper. The influence of quadric term and cubic term has been taken into consideration. The method is an effective and rigorous one. The precision of estimators can be evaluated by classical method in the method. And estimators obtained by the method have fine statistic characters.

Key words　nonlinear model; parameter estimation; direct solution method