

# 三维空间实体间拓扑关系的矩阵描述\*

陈 军 郭 薇

(国家基础地理信息中心,北京紫竹院百胜村 1 号,100044)

**摘 要** 三维空间实体及其间拓扑关系的语义描述和形式化表达是三维 GIS 空间数据建模的重要理论基础。在  $k$  维流形的三维空间实体形式化描述方法的基础上,根据三维空间实体的可剖分性,采用顾及维数的九元组描述框架,研究用于构成三维实体的  $k$ -单纯形 ( $0 \leq k \leq 3$ ) 之间的拓扑空间关系,继而研究三维实体间的拓扑空间关系。

**关键词** 三维空间实体;单纯形;拓扑空间关系;形式化描述;空间剖分;拓扑关系矩阵

**分类号** P208 TP311.12

为了在空间数据建模时表达三维空间实体及其相互关系,需要研究和发展三维空间实体之间拓扑关系的语义描述和形式化表达方法<sup>[1]</sup>。就三维空间实体本身而言,笔者在文献 [2] 中提出了基于  $k$  维流形的形式化描述方法,将三维空间实体定义为一个可定向的  $k$  维伪流形 ( $k$ -pseudo manifold) ( $0 \leq k \leq 3$ ),它对应于一个紧致、连通的  $n$  维流形或是具有一个或多个  $n$  维流形边界的紧致、连通的  $(n+1)$  维流形 ( $0 \leq n \leq 2$ ),在几何上可划分成若干个  $k$ -单纯形 ( $k$ -Simplex) ( $k \leq 3$ )。这为进一步研究三维空间实体间拓扑关系的形式化描述与表达提供了可靠基础。

笔者曾在 Egenhofer 等人提出的二维空间实体拓扑关系九元组描述框架<sup>[10]</sup>和 Clementini 等人提出的维数扩展法研究基础上,提出了顾及维数的三维空间实体间拓扑关系描述框架<sup>[2]</sup>。但该方法仅适用于简单三维空间实体间拓扑关系的描述。对于一些复杂的三维空间实体而言,将上述描述框架直接加以扩展还存在很多问题。例如,

图 1(a) 由一个封闭的面状实体  $M$  和一个封闭的线状实体  $L$  构成,由三维空间实体的定义及形式化描述可知,这两个空间实体的边界都为零,因此,它们之间的拓扑关系无法用九元组来加以描述。再如,对图 1(b)、(c) 所示的两个面状实体,它们之间的拓扑关系也很难用九元组来描述,即使勉强将其归结为相互覆盖 (overlap) 关系,对于图 1(b)、(c) 所示的两种不同情形也无法加以区分。对图 1(d)、(e) 所示的面状实体  $M$  和线状实体  $L$  之间的拓扑关系,其描述也存在着同样的问题。因此,必须探讨出一些新的方法来解决三维空间实体间拓扑空间关系的形式化描述问题。

## 1 $k$ 单纯形间的拓扑关系

设  $S^k$  表示  $n$  维欧氏空间  $R^n$  中任意一个  $k$  单纯形 ( $0 \leq k \leq 3$ )。由点集拓扑学的概念可知,0 单纯形为三维空间中的一个点,其边界为空;1 单纯形为闭线段,其边界为闭线段的两个端点;2 单纯

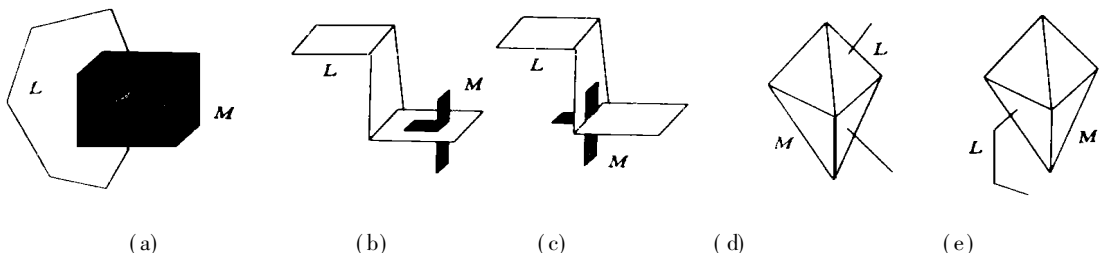


图 1 复杂三维空间实体间拓扑关系

Fig. 1 Topological Relationships Between Complex 3D Spatial Features

收稿日期: 1998-08-03. 陈军,男,41岁,教授,博士生导师,现从事时空数据库与 GIS 研究。

\* 国家教委霍英东教育基金和国家教委跨世纪优秀人才培养基金资助项目。

形为三角形,其边界为三角形的三条边;3单纯形为四面体,其边界为四面体的四个面。三维空间中任意两个  $k$  单纯形  $A$  和  $B$  的边界  $(L_A, L_B)$ 、内部  $(A^\circ, B^\circ)$  和余  $(A^{-1}, B^{-1})$  之间的交集构成的九元组为:

$$R(A, B) = \begin{bmatrix} L_A \cap L_B & L_A \cap B^\circ & L_A \cap B^{-1} \\ A^\circ \cap L_B & A^\circ \cap B^\circ & A^\circ \cap B^{-1} \\ A^{-1} \cap L_B & A^{-1} \cap B^\circ & A^{-1} \cap B^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \quad (1)$$

其中,  $S_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) 的取值范围为  $\emptyset, 0, 1, \dots, \dim(S_{ij}) - \dim(S_j)$  的值为交集  $S_{ij}$  的维数,若交集  $S_{ij}$  为空 ( $\emptyset$ ), 则  $\dim(S_{ij})$  的值为空 ( $\emptyset$ ); 若交集  $S_{ij}$  不包含 1 单纯形、2 单纯形和 3 单纯形,但至少包含一个 0 单纯形,则  $\dim(S_{ij})$  的值为 0; 若  $S_{ij}$  不包含 2 单纯形和 3 单纯形,但至少包含一个 1 单纯形,则  $\dim(S_{ij})$  的值为 1; 若  $S_{ij}$  不包含 3 单纯形,但至少包含一个 2 单纯形,则  $\dim(S_{ij})$  的值为 2; 若  $S_{ij}$  至少包含一个 3 单纯形,则函数  $\dim(S_{ij})$  的值为 3。在三维空间中,由于  $\max(\dim(S_{ij})) = 3$ ,  $S_{ij}$  最多有 5 种不同取值,即  $\emptyset, 0, 1, 2, 3$ , 因此,通过九元组最多可以描述两个  $k$  单纯形 ( $0 \leq k \leq 3$ ) 之间  $5^9$  种可以加以区分的拓扑关系情形。为了方便系统管理和用户使用,笔者对公式 (1) 描述的  $5^9$  种拓扑关系中可以实现的情形进行了分类,定义了相邻、包含、相交、部分覆盖、相离、相等 6 种基本拓扑关系类型

定义 1 相邻 (touch) 关系:

$$\langle A, \text{touch}, B \rangle \Leftrightarrow (A^\circ \cap B^\circ = \emptyset) \wedge (A \cap B \neq \emptyset)$$

定义 2 包含 (in) 关系:

$$\langle A, \text{in}, B \rangle \Leftrightarrow (A^\circ \cap B^\circ \neq \emptyset) \wedge (A \cap B = A)$$

定义 3 相交 (cross) 关系:

$$\langle A, \text{cross}, B \rangle \Leftrightarrow \dim(A^\circ \cap B^\circ) < (\max(\dim(A^\circ), \dim(B^\circ))) \wedge (A \cap B \neq A) \wedge (A \cap B) \neq B$$

定义 4 部分覆盖 (overlap) 关系:

$$\langle A, \text{overlap}, B \rangle \Leftrightarrow \dim(A^\circ \cap B^\circ) = \dim(A^\circ) = \dim(B^\circ) \wedge (A \cap B \neq A) \wedge (A \cap B \neq B)$$

定义 5 相离 (disjoint) 关系:

$$\langle A, \text{disjoint}, B \rangle \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$$

定义 6 相等 (equal) 关系:

$$\langle A, \text{equal}, B \rangle \Leftrightarrow \langle A, \text{in}, B \rangle \wedge \langle B, \text{in}, A \rangle$$

其中, 3 元组  $(A, R, B)$  表示  $k$  单纯形间拓扑空间关系的基本类型是将 Clementini 等提出的二维空间实体间拓扑关系最小集的定义加以扩展而得来的。其中, 相邻、包含、部分覆盖及相离关系类型的定义与二维的情形相同, 在此, 仅对相交关系的定义进行了修改并增加了相等关系的定义。这是因为, 在二维空间中, 线与线只能相交于一个点; 线与面只能相交于一条线, 即对任意两个空间实体, 其相交部分的维数必然比两个空间实体维数中较大的一个的值少 1。而在三维空间中, 1 单纯形与 2 单纯形相交于一个点, 与 3 单纯形相交于一条线; 2 单纯形与 2 单纯形相交于一条线, 与 3 单纯形相交于一个面。即对任意两个  $k$  单纯形, 其相交部分的维数必然比 2 个  $k$  单纯形维数中较大的一个值小。因此, 笔者对二维情形下的相交关系定义进行了修改, 将两个  $k$  单纯形相交部分的维数定义为小于两个  $k$  单纯形维数中较大的一个值。对于两个相等的空间实体  $A$  和  $B$ , 虽然其拓扑空间关系可以用包含关系表达, 即用以下的形式加以表示:  $\langle A, \text{in}, B \rangle \wedge \langle B, \text{in}, A \rangle$ 。但本文为了与现实世界中相等的概念相对应, 同时, 也为了表达方便起见, 定义了第 6 种拓扑关系, 即相等 (equal) 关系。这 6 种关系类型具有互斥性与完备性, 即任意两个  $k$  单纯形间的拓扑关系只可能是这 6 种基本拓扑关系类型之一; 且上述 6 种基本拓扑关系类型可以完全表达基于维数扩展法的九元组框架, 即式 (1) 所描述的全部关系<sup>[2]</sup>。

采用上述方法, 可以描述三维拓扑空间中任意两个  $k$  单纯形之间的拓扑空间关系。表 1 给出了三维拓扑空间中任意两个  $k$  单纯形  $A$  和  $B$  之间可能具有的拓扑关系类型。

## 2 三维空间实体间的拓扑空间关系

根据三维空间实体的定义与拓扑性质, 任意一个三维空间实体均对应于一个  $k$  维伪流形 ( $0 \leq k \leq 3$ ), 在几何上可剖分成若干个  $k$  单纯形 ( $0 \leq k \leq 3$ )。设有两个三维空间实体  $L$  和  $M$ , 分别由  $p$  和  $q$  个  $k$  单纯形组成,  $L = \{S_i^k \mid 0 \leq k \leq 3, 1 \leq i \leq p\}$ ,  $M = \{S_j^k \mid 0 \leq k \leq 3, 1 \leq j \leq q\}$ 。为描述  $L$  和  $M$  间的空间拓扑关系, 特构造拓扑关系矩阵  $T$ :

$$T = \begin{bmatrix} T(S_1^k, S_1^k) & \cdots & T(S_p^k, S_1^k) \\ \vdots & & \vdots \\ T(S_p^k, S_q^k) & \cdots & T(S_p^k, S_q^k) \end{bmatrix}$$

表 1  $k$  单纯形  $A$  和  $B$  间的拓扑关系类型

Tab. 1 Topological Relationships Types Between  $k$ -simplexes  $A$  and  $B$

$A \backslash B$	0单纯形	1单纯形	2单纯形	3单纯形
0单纯形	$\langle A, \text{equal}, B \rangle$ $\langle A, \text{disjoint}, B \rangle$	$\langle A, \text{touch}, B \rangle$ $\langle A, \text{disjoint}, B \rangle$	$\langle A, \text{touch}, B \rangle$ $\langle A, \text{in}, B \rangle$ $\langle A, \text{disjoint}, B \rangle$	$\langle A, \text{touch}, B \rangle$ $\langle A, \text{in}, B \rangle$ $\langle A, \text{disjoint}, B \rangle$
1单纯形	$\langle B, \text{touch}, A \rangle$ $\langle A, \text{disjoint}, B \rangle$	$\langle A, \text{touch}, B \rangle$ $\langle A, \text{equal}, B \rangle$ $\langle A, \text{disjoint}, B \rangle$	$\langle A, \text{in}, B \rangle$ $\langle A, \text{touch}, B \rangle$ $\langle A, \text{cross}, B \rangle$ $\langle A, \text{disjoint}, B \rangle$	$\langle A, \text{in}, B \rangle$ $\langle A, \text{touch}, B \rangle$ $\langle A, \text{cross}, B \rangle$ $\langle A, \text{disjoint}, B \rangle$
2单纯形	$\langle B, \text{touch}, A \rangle$ $\langle B, \text{in}, A \rangle$ $\langle A, \text{disjoint}, B \rangle$	$\langle B, \text{in}, A \rangle$ $\langle B, \text{touch}, A \rangle$ $\langle B, \text{cross}, A \rangle$ $\langle A, \text{disjoint}, B \rangle$	$\langle A, \text{equal}, B \rangle$ $\langle A, \text{in}, B \rangle$ $\langle A, \text{touch}, B \rangle$ $\langle A, \text{cross}, B \rangle$ $\langle A, \text{disjoint}, B \rangle$	$\langle A, \text{in}, B \rangle$ $\langle A, \text{touch}, B \rangle$ $\langle A, \text{cross}, B \rangle$ $\langle A, \text{disjoint}, B \rangle$
3单纯形	$\langle B, \text{touch}, A \rangle$ $\langle B, \text{in}, A \rangle$ $\langle A, \text{disjoint}, B \rangle$	$\langle B, \text{in}, A \rangle$ $\langle B, \text{touch}, A \rangle$ $\langle B, \text{cross}, A \rangle$ $\langle A, \text{disjoint}, B \rangle$	$\langle B, \text{touch}, A \rangle$ $\langle B, \text{cross}, A \rangle$ $\langle A, \text{disjoint}, B \rangle$	$\langle A, \text{equal}, B \rangle$ $\langle A, \text{overlap}, B \rangle$ $\langle A, \text{in}, B \rangle$ $\langle A, \text{touch}, B \rangle$ $\langle A, \text{disjoint}, B \rangle$

其中,  $T(S_i^k, S_j^k)$  表示单纯形  $S_i^k$  和  $S_j^k$  之间的拓扑关系, 它可以用上节定义的 6 种拓扑空间关系类型来描述。设  $U$  表示所有拓扑关系类型集合的并, 即  $U = R_{\text{disjoint}} \cup R_{\text{touch}} \cup R_{\text{in}} \cup R_{\text{cross}} \cup R_{\text{overlap}} \cup R_{\text{equal}} \cup \emptyset$  表示空关系, 则  $T$  中任意一个元素  $T(S_i^k, S_j^k)$  的值满足以下关系式:

$$\forall i, j \quad T(S_i^k, S_j^k) \subseteq U$$

$$\forall i, j \quad T(S_i^k, S_j^k) \neq \emptyset$$

对于图 1 (d) (e) 所示的图形, 可将线状实体  $L$  分割成 3 个 1 单纯形  $S_i^1 (1 \leq i \leq 3)$ , 将体状实体  $M$  划分成两个 3 单纯形  $S_j^3 (1 \leq j \leq 2)$ , 则分别得到以下拓扑关系矩阵  $T$ , 如图 2 所示。

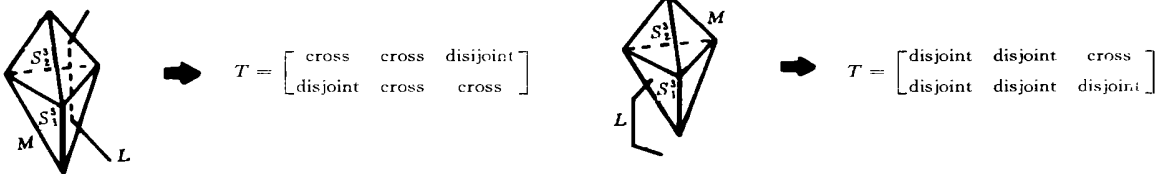


图 2 线状实体  $L$  和体状实体  $M$  的矩阵关系

Fig. 2 Topological Relation Matrix Between Line  $L$  and Body  $M$

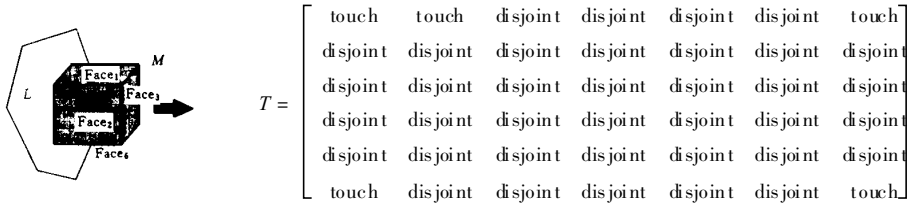
值得说明的是, 将空间实体的边界和内部划分成单纯形, 可能产生大量的碎片和数据, 致使空间实体的一些拓扑性质被大量的单纯形所隐藏或埋藏。此外, 由于两个单纯形间的拓扑运算并不产生一个单纯形, 还须在拓扑运算后重新将一个单纯形划分成一个单纯形。为了减少数据冗余和简化运算, 将面状实体或体状实体边界面上位于同一平面的  $k$  个 2 单纯形  $S_1^2, \dots, S_i^2, \dots, S_k^2$  进行合并, 定义为一个中间元素平面 (Face):

$$\text{Face}_i = S_1^2 + \dots + S_i^2 + \dots + S_k^2$$

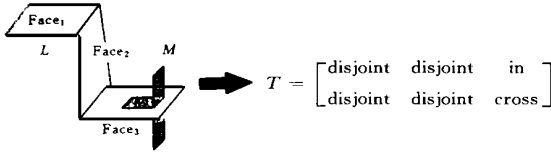
其中每个 2 单纯形具有相同的法线矢量, 且任意两个 2 单纯形  $S_p^2 = (V_{p1}, V_{p2}, V_{p3})$  与  $S_q^2 = (V_{q1}, V_{q2}, V_{q3})$  间要么满足相离 (disjoint) 关系, 即  $S_p^2 \cap S_q^2 = \emptyset$ ; 要么满足相邻 (touch) 关系, 即  $S_p^2$  与  $S_q^2$  交于一个公共的 1 单纯形。平面 Face 的边界为:

$$L_{\text{Face}} = L_{S_1^2} + \dots + L_{S_i^2} + \dots + L_{S_k^2}$$

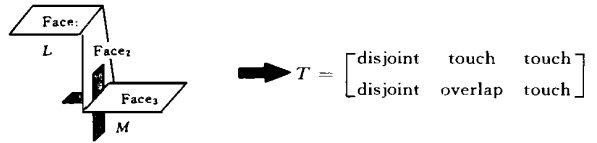
由以上定义可知, 平面 (Face) 同胚于 2 单纯形, 它们具有相同的拓扑性质, 任意一个  $k$  单纯形  $S^k (0 \leq k \leq 3)$  与平面 (Face) 的拓扑关系即等同于  $k$  单纯形与 2 单纯形间的拓扑关系。故可通过构成空间实体的  $k$  单纯形  $S^k (0 \leq k \leq 3)$  和平面 (Face) 间拓扑关系的交或并等, 组合表达空间实体点、线、面、体间的拓扑关系。例如, 对图 1 (a) 中的线状实体  $L$  和面状实体  $M$ , 可将  $L$  分割成 7 个 1 单纯形  $S_i^1 (1 \leq i \leq 7)$ , 即将  $L$  分成 7 条线段, 将  $M$  可划分成 6 个平面  $\text{Face}_j (1 \leq j \leq 6)$ , 则这两个空间实体之间的拓扑关系可用图 3 (a) 表示。同理, 可将图 1 (b) 和图 1 (c) 中的面状实体  $L$  分割成 3 个平面  $\text{Face}_i (1 \leq i \leq 3)$ , 面状实体  $M$  划分成 2 个平面  $\text{Face}_j (1 \leq j \leq 2)$ , 则这两个空间实体之间的拓扑关系矩阵如图 3 (b)、图 3 (c) 所示。



(a)



(b)



(c)

图 3 顾及  $k$  单纯形和平面的拓扑矩阵关系

Fig. 3 Topological Relation Matrix Based on  $k$ -simplex and Face

### 3 结束语

本文根据三维空间实体的可剖分性,采用顾及维数的三维空间拓扑关系九元组描述框架,研究了  $k$  单纯形 ( $0 \leq k \leq 3$ ) 间的拓扑关系,继而通过构成空间实体的单纯形间的拓扑关系的组合形式描述了三维空间实体间的拓扑关系。这为进一步建立三维拓扑空间数据模型打下了基础。其主要意义在于:① 在设计三维空间数据结构时,可利用空间实体间的拓扑关系有效地组织数据,避免数据冗余;② 可根据三维空间拓扑关系设计空间查询函数,如基于多个拓扑约束条件的空间查询,进而发展基于三维空间拓扑关系的空间推理;③ 可根据空间实体间拓扑空间关系形式化理论,进行三维拓扑空间数据库的拓扑一致性操作。

### 参 考 文 献

- 1 陈 军. GIS空间数据模型的基本问题与学术前沿. 地理学报, 1995, 50(增刊): 24~ 33
- 2 郭 薇,陈 军. 基于流形拓扑的三维空间实体形式化描述. 武汉测绘科技大学学报, 1997, 27(3): 156~ 161
- 3 郭 薇,陈 军. 基于点集拓扑学的三维拓扑空间关系形式化描述. 测绘学报, 1997, 26(2): 122~ 127
- 4 Armstrong M A著. 基础拓扑学. 孙以丰译. 北京: 北京大学出版社, 1983

- 5 Clementini E, Felice D P. A Small Set of Format Topological Relationships Suitable for End-User Interaction. In Advances in Spatial Databases, 1993
- 6 Mark D M, Egenhofer M J. Modeling Spatial Relations Between Lines and Regions: Combining Formal Mathematical Models and Human Subjects Testing. Cartography and Geographic Information System, 1994, 21(4): 195~ 212
- 7 Egenhofer M J, Franzosa D R. Point-Set Topological Spatial Relations. INT. J. Geographical Information Systems. 1991, 5(2): 161~ 174
- 8 Egenhofer M J. Reasoning About Binary Topological Relations. In Proceedings of the Second Symposium on Large Spatial Databases, SS' D91. Zurich, Switzerland, 1991. 143~ 160
- 9 Egenhofer M J, Sharma J. Topological Consistency. In Proceedings of Fifth International Symposium on Spatial Data Handling, 1992. 335~ 343
- 10 Egenhofer M J, Franzosa R D. On the Equivalence of Topological Relations. INT. J. Geographical Information Systems, 1995, 9(2): 133~ 152
- 11 Blais J A R, Lee Y C. Topology of Geodetic Networks and Land Information. In Proceedings of the Canada Conference on GIS. Ottawa, 1991.
- 12 Guo W. Three-Dimensional Representation of Spatial Object and Topological Relationships. International Archives of Photogrammetry and Remote Sensing, 1996(31): 273~ 278

## A Matrix for Describing Topological Relationships Between 3D Spatial Features

*Chen Jun    Guo Wei*

(National Geomatics Center of China, 1 Baisheng Cun, Zhizhuang, Beijing, china, 100044)

**Abstract** Formal description and representation of topological relationships between 3D spatial features is one of the key issues in developing 3D GIS. An approach was proposed in this paper to describe the topological relationships between 3D spatial features with their  $k$ -simplex components ( $0 \leq k \leq 3$ ). The topological relationships for the pair of  $k$ -simplex were examined with dimension-extend 9-intersection. Six types of primitive relations were used, such as touch, cross, in, disjoint, overlap and equal. The topological relationships between 3D spatial features were described with a topological matrix  $T$  which compared the relationships between any two  $k$ -simplex of the two 3D spatial features.

**Key words** 3D spatial features;  $k$ -simplex; topological relationships; formal description; space partition; topological relationship matrix

(上接第 328 页)

Internal Technical Report, Dept. of LSGL, the Hong Kong Polytechnic University, 1996.

12 Shimizu N, Mizuta Y, Kondo H, Ono H. A New GPS Real Time Monitoring System for Deformation

System for Deformation Measurements and its Application. In Proceedings of the 8th Int. Symp. on Deformation Measurements, Hong Kong, 1996. 47 ~ 54

## Development of the Methodology for Single Epoch GPS Deformation Monitoring

*Chen Yongqi    James Lutes*

(Department of Land Surveying and Geo-Informatics, The Hong Kong Polytechnic University, Hong Kong)

**Abstract** This paper discusses the methodology to process single epoch GPS observations for deformation surveys. It takes full advantage of the characteristics of deformation surveys, i. e., the position of a surveyed point changes relatively small between two consecutive survey epochs. Special attention is given to efficient solution of carrier ambiguities and multi-path effects. The tests indicate the methodology works well and an accuracy of a few millimeters is achievable. The developed method can be used to process the GPS data from both slow deformation and rapid/dynamic deformation monitoring.

**Key words** deformation monitoring; GPS; single epoch; methodology