

分维扩展的数值试验研究*

毋河海

(武汉测绘科技大学土地科学学院,武汉市珞喻路 129 号,430079)

摘 要 由于仅用一个分维值难以区分不同的形态,首先需要对原分维概念予以扩充,即把原来仅局限于无标度区内的呈直线形分布的常数分维扩充为包括无标度区上下界以外区域在内的,呈反 S 形分布的变量(函数)分维,使分维方法的应用不受观测尺度的限制;其次,要研究表达扩充分维的数学模型。文中论述了反 S 形扩充分维的数值实现方法和增强描述复杂现象的能力。

关键词 分维;分维扩展;反 S 形曲线

分类号 P283.1; P283.7; TP391

1 分维扩展的必要性

1.1 单一分维数描述能力的局限性

基于分数维维数的分形学方法,在许多学科得到了极为广泛的应用。但是,正如不少学者所指出,不同的分形体会具有相同的分维数,即存在“一值多形”的问题。分形学的创始人 Mandelbrot 曾说过, Himalays 与 JFK 的机场跑道可能有相同的分数维^[36]。我国学者敖力布、林鸿溢等^[20]也指出: Mandelbrot 虽然揭示了分形结构的自相似本质,并且用分维数来表示,可是这种描述并没证明它是唯一的和充分的。不同分布方式的两种结构可以具有相同分维数。……这说明要确定结构的特征,只有一个分维数是不行的,还需要其它参量。日本学者高安秀树在其名著《分数维》一书中写道:“分数维的维数是定量地表示自相似的随机形状和现象的最基本的量。因为仅利用分数维维数这样一个数字去描述所有的复杂形状和现象,无论如何也是不可能的。因此,就产生了扩大分数维维数的必要性。扩大分数维的考虑方法大致有两种。一种是不把分数维维数仅看作是一个常数,使其能有赖于观测的尺度,即使在自相似性不成立的那种范围内也能使用。另一种考虑方法是,在相似性成立的情况下,为了弥补只用分数维不能描述的信息,要重新引进另外的量”。张济忠^[24]、王桥^[3]也都论述了类似的问题。所以,仅利用分维数这样一个数值难以描述各种具有不同复杂程度的形体和现象。

1.2 充分利用观测信息的必要性

客观世界不存在纯数学的理想分形,存在的只是统计意义下的随机分形。因此,自相似仅出现在一个确定的范围,这个范围叫无标度区。由于各种原因,通常需要测定各种分形体的无标度区的上下界。在测定过程中,所采用的量测尺度显然要超出无标度区的范围,获得了相应的无标度区之外的信息。显然,仅应用无标度区内部的信息是不够的,无标度区之外的观测信息不应该丢掉。要想合理地应用无标度区之外的观测信息,就引起分维的扩充问题。分维的扩充旨在对无标度区内部与外部的大范围信息进行整体描述与分析应用。因此,扩展分数维维数是必要的。

本文仅以数值的方法对分维扩充的第一个问题(把分维数看作是观测尺度的函数)进行研究。

2 扩展分数维关系式的建立

2.1 分维函数的理论表达

当把分维数 $D(r)$ 不再看作是独立于观测尺度 r 的常量,而把它看作是依赖于观测尺度 r 的函数^[1, 3, 11, 20, 24, 26],即

$$D(r) = - \operatorname{d} \lg N(r) / \operatorname{d} \lg r \quad (1)$$

对此式求解,得:

$$N(r_2) = N(r_1) \exp \left[- \int_{r_1}^{r_2} \frac{D(r)}{r} \operatorname{d} r \right] \quad (2)$$

此式从理论上表达了两个尺度 r_2 和 r_1 的观测值 $N(r_2)$ 和 $N(r_1)$ 与分维数 $D(r)$ 之间的关系。

这样被扩展了的分数维,只要 $N(r)$ 是平滑的

函数,在任何时候都是确定的,从而在应用时就不必担心无标度区及其上下界的问题

2.2 建立分维函数的数值途径

对于纯数学的分形构造,由于它是规则(理想,确定性的)分形,具有无限精细性和严格的自相似,其观测值与其观测尺度之间可始终保持严格的线性分形关系。对于自然界的不规则的(随机)分形,不具有严格的自相似,只有在一定的尺度范围内的自相似或具有统计自相似。以地图上河流、海岸线等线状目标为例,其量测尺度显然不能小于 0.1 mm,更不能趋于零。同时,其量测结果(长度)不能也不允许为无穷大。因此,对于观测尺度和观测值都有一个逻辑界定问题

2.2.1 最小与最大量测尺度的确定

对于地图信息处理来说,最小量测尺度 d_{min} 可取人们肉眼对图形弯曲的识别能力,即可取 $d_{min}=0.1\text{ mm}$ 而最大量测尺度 d_{max} ,即表明量测终结条件同时是借此量取目标最小长度的尺度。根据不少学者的意见,曲线的最小长度可取曲线若干突出点的连线或封闭图形的凸壳(convex hull),这就意味着 d_{max} 可取突出点或凸壳点之间的平均距离

2.2.2 线状物体极限长度的逻辑界定

1) 线状物体最大长度的确定

在小比例尺地图数字化生产中,一般采用 0.3 mm 作为流方式数字化步长。在扫描数字化时,可取 0.1 mm 或更短的步长,即可用最小步长采集的密集坐标所计算的曲线长度作为最大长度 L_{max} 。在一般情况下,就用曲线坐标串(必要时,作光滑加密)所形成的折线长度作为线状目标的最大轴线长度。

2) 线状物体最小长度的确定

如前所述,线状目标最小长度 L_{min} 是最大尺度 d_{max} 量测的结果。对于直线来说, d_{max} 就是直线本身长度。根据关于曲线最小长度的定义,此处 L_{min} 也就是直线本身。对于一般曲线,根据关于曲线最小长度的定义,要用 d_{max} 去度量。若曲线位于其首末点连线的一侧,如图 1 所示,可求其凸壳作为其最小长度 L_{min} 。若曲线位于其首、末点连线的两侧,如图 2 所示,可先求其凸壳,然后将两侧凸壳点按原曲线点序连成折线,以此作为最小长度 L_{min} 。对于封闭曲线,可直接生成其凸壳,由此得到其最小周长 L_{min} ,见图 3

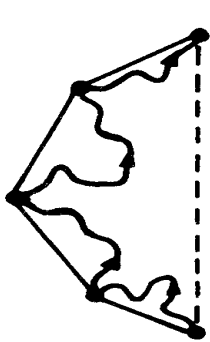


图 1 单侧曲线的凸壳
Fig. 1 Convex Hull of the Single Sided Curve

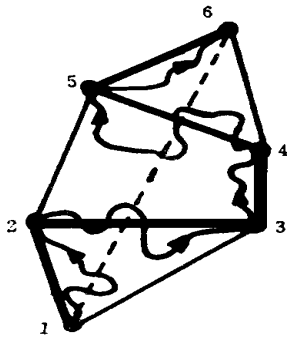


图 2 双侧曲线的凸壳
Fig. 2 Convex Hull of the Double Sided Curve

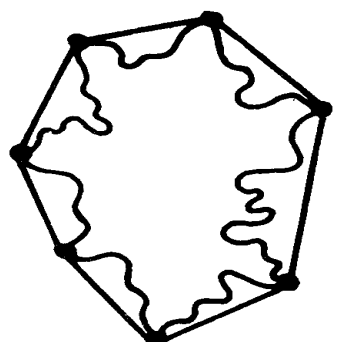


图 3 封闭曲线的凸壳
Fig. 3 Convex Hull of the Closed Curve

2.2.3 曲线长度的量测

在地图量测学中,对曲线长度的量测通常采用量规法,或叫步行构造法、构造步长法、码尺法等。这是一种简单易行的方法,见图 4 其原理是用量规的足距沿曲线逐步截取以计算曲线长度。其计算公式为:

$$L = Nd + pd$$

此处, L 为线状目标长度; N 为以步长 d 所量测的整数部分; p 为以步长 d 所量测的小数部分。

对于数字化曲线来说,其坐标点是有序的,不

管是手工截取还是程序化截取,都是依序取点。当量规圆弧与曲线有多于一个交点时,则取距量规起点 S 点号最近者,见图 4

用量规法量测曲线长度是分形学诞生时所用的方法,属“正统”方法。在本研究中所使用的就是这种方法的自动化模式

2.2.4 量规法程序化的几种实现方法

程序化量规法的数学实质是圆弧与直线段的求交。用量规法自动量测曲线长度有多种实现途径。不管用哪一种实现方法,均需先确定最小步长



图 4 用量规法量测曲线长度

Fig. 4 Measuring the Curve Length Using Divider Method

d_{min} 与最大步长 d_{max} 此处就若干计算机解法提出其实现途径

1) 定比分割法与对分法 (Bisection Method)

对介于 d_{min} 与 d_{max} 之间的任一步长值 d , 步长出发点与后继点所形成的直线边的长度 S 与 d 构成 3 种关系: 小于、等于和大于。

当出现小于关系时, 继续取新的后继点作判断, 直到等于或大于情况的出现。当出现等于关系时, 则当前点就是量规法的所求点

对于第三种情况, 又有两种可能: 一种可能是如图 5 所示, 从出发点 A 到第一个后继点 B 的边长 AB 就已经大于 d , 这时可用直线的定比分割法求定步长末点 M 的坐标

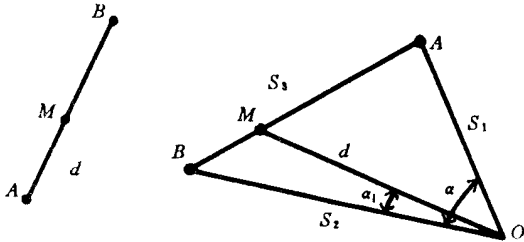


图 5 定比分割

Fig. 5 Dividing a Line Segment by Definite Proportions

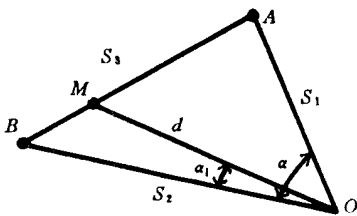


图 6 求直线与圆的交点

Fig. 6 Finding the Intersection Point of Circle and Straight Line

另一种情况是, 如图 6 所示, 当半径 d 大于 OA , 但小于 OB , 即在边 AB 上必存在一点 M , 使 $d = OM$ 该问题的实质是 (半径为 d 的) 圆弧与直线段 (AB) 的求交。可用多种方法来求解此问题: 对分法、圆弧与直线段求交法和三角方程法。用对分法确定点 M 的坐标, 算法简单, 收敛很快。后面的数值试验就是用这种方法进行的。

2) 圆与直线求交法

对于图 6 所出现的情况, 问题的本质是圆与直线的求交问题。可用一般几何求交法、参数方程法或三角方程法。三角方程法为笔者所探求, 详细介绍如下:

在图 6 中, $S_1 = OA, S_2 = OB, S_3 = AB$ 则

$$S_1 = \sqrt{(x_A - x_O)^2 + (y_A - y_O)^2}$$

$$S_2 = \sqrt{(x_B - x_O)^2 + (y_B - y_O)^2}$$

$$S_3 = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$\angle T = (\arccos((x_B - x_O)(x_A - x_O) + (y_B - y_O)(y_A - y_O)) / (S_1 S_2))$$

$$\angle A = (\arccos((x_O - x_A)(x_B - x_A) + (y_O - y_A)(y_B - y_A)) / (S_1 S_3))$$

$$\angle B = (\arccos((x_O - x_B)(x_A - x_B) + (y_O - y_B)(y_A - y_B)) / (S_2 S_3))$$

令 $BM = L$, 在图 6 的 $\triangle OMB$ 中, 根据正弦定律, 有 $L / \sin T_1 = d / \sin B$, 即

$$L = d \sin T_1 / \sin B \tag{3}$$

由 $\triangle OAM$ 有 $(S_3 - L) / \sin(T - T_1) = d / \sin A$, 即

$$L = (S_3 \sin A - d \sin(T - T_1)) / \sin A \tag{4}$$

由式 (3) 与式 (4) 的相等关系, 有:

$$d \sin T_1 / \sin B = (S_3 \sin A - d \sin(T - T_1)) / \sin A \tag{5}$$

现在的任务是借此方程解出未知数 T_1 这是一个三角方程, 但可以通过三角函数的恒等变换使它变成代数方程, 从而使三角方程的求解变成 (一元二次) 代数方程的求解

当使用万能替代公式时, 式 (5) 的三角方程变为代数方程:

$$(F_2 + F_3)X^2 - 2F_1X + F_3 - F_2 = 0 \tag{6}$$

式中, $F_1 = d(\sin A - \sin B \cos T)$; $F_2 = d \sin T \sin B$; $F_3 = S_3 \sin A \sin B$; $X = \tan(T_1 / 2)$ 令 $T = (2F_1)^2 - 4(F_2 + F_3)(F_3 - F_2)$, 则式 (6) 的两个根为:

$$X_1 = (2F_1 + \sqrt{T}) / 2(F_2 + F_3)$$

$$X_2 = (2F_1 - \sqrt{T}) / 2(F_2 + F_3)$$

由此得出 T_1 相应的两个值:

$$T_{11} = 2 \arctan X_1, T_{12} = 2 \arctan X_2$$

最后得到步长的终点:

$$X_M = (X_A + DX_B) / (1 + D) \tag{7}$$

$$Y_M = (Y_A + DY_B) / (1 + D)$$

此处 D 为定比分点,

$$D = (S_3 - L) / L, L = d \sin T_1 / \sin B$$

当使用一般替代

$$\sin A = \frac{1 - \cos^2 A}{1 - \sin^2 A}$$

$$\cos A = \frac{1 - \sin^2 A}{1 - \cos^2 A}$$

时, 也得出了类似的结果

对上述三角方程 (5) 也可以用牛顿切线法解算 T_1 由于 T_1 是 T 的一部分, 故可取 $T/2$ 作为 T_1

的初值。牛顿切线法收敛很快

在本文的研究期间,对三角方程的3种解法作了验算,并把计算结果与对分法的计算结果进行了比较,见表1

表1 三角方程各种解算方法结果的比较

Tab. 1 Comparison of Results Obtained by Solving Trigonometric Equations Using Different Methods

	三角方程法			对分法
	牛顿切线法	万能替代法	一般替代法	
T_1	10.566 060 0	10.566 050 0	10.566 050 0	
L	1.701 116 0	1.701 115 0	1.701 115 0	
X_m	2.875 217 0	2.875 216 0	2.875 216 0	2.875 217 0
Y_m	7.541 305 0	7.541 306 0	7.541 306 0	7.541 305 0

2.3 扩展分维数学模型的数值实现

2.3.1 模型的机理分析

如前所述,观测值与观测尺度均是有界的,就曲线长度与其量测步长之间的关系来说,当在 $(d_{min} - d_{max})$ 范围内取所有可能的步长时,上述关系一般呈非线性关系:当量测尺度接近但尚未等于 d_{min} 时,量测长度的增长在逐步减弱进而趋于常值 L_{max} ;反之,当量测尺度接近但尚未等于 d_{max} 时,量测长度已不再作明显减少而趋于常值 L_{min} 。因此,从逻辑机理上看,此种关系曲线随着量测尺趋于 d_{min} 与 d_{max} 时,应分别渐近于两个观测值的极值 L_{max} 与 L_{min} ,即呈反S形曲线。以往的应用研究大都没有顾及这个非线性问题,其主要原因是量测尺度的取值范围太有限,或把无标度区之外的观测信息视作无用信息从而予以抛弃。当尺度取值范围顾及到给定线状目标的尺度上下限时,可以得到相应的反S形分布。后者可称为扩充分维,此处的维数已不是常数而是变量。在确定分维数时,非线性现象的出现,说明自然界实际存在的统计分形的出现,对它的研究具有更为普遍的意义。要从新的角度作进一步的研究,充分使用所获得的各种不同信息。

2.3.2 反S形分布的数学模型

用来表达反S形分布的数学模型有多种,如最为常见的倒置的Logistic模型,Log-Logistic模型^[32],Gompertz模型^[27,34]等。这些模型的应用都有一个前提:其右端都是以无穷大为渐近条件。而在应用过程中,自变量只能取有限值,甚至当自变量取其可能的最大值时,它也远不是无穷大,因而这些反S模型在其右端难以拟合观测数据。由于它们大都含有以e为底的指数函数,在建立数学模型时,引起解算非线性方程组的复杂问题,故要寻找符合反S特性的更易于实现的数学模型

1) 分段 Hermite 带导数插值模型

对于扩展分维来说,根据前面的机理分析,反S形曲线在 d_{min} 与 d_{max} 处分别渐近于 L_{max} 与 L_{min} 。一般 Hermite 插值模型满足这一条件,但它仅是顾及两个端点的带导数插值,无法顾及中间点列的具体分布。为此,我们采用一种分段(两段)带导数插值,即利用中部若干点生成一个中点斜率,构成一个分段 Hermite 插值模型,见图7。在本研究中主要采用此模型。通过数十种分形图形的扩展分维计算,证明是稳定且实用的。

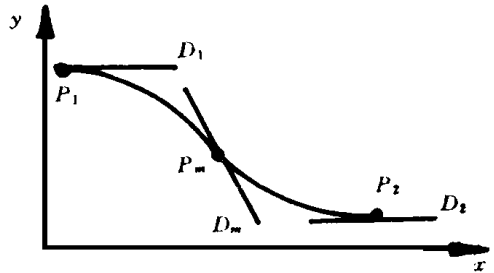


图7 分段 Hermite 插值模型

Fig. 7 Piecewise Hermite Interpolation Model

2) 带导数三次多项式

设有下述三次多项式:

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 \quad (8)$$

对自变量进行规格化,即使 $0 < x < 1$ 。

当 $x = 0$ 和 $x = 1$ 时,根据反 S 形曲线的渐近特性,函数的一阶导数应等于 0,即

$$y' = b + 2cx + 3dx^2 = 0$$

此时,当 $x = 0$ 时,有 $b = 0$

当 $x = 1$ 时,有 $b + 2c + 3d = 0$ 由于 b 已等于 0,故 $c = -1.5d$ 这时,上述三次多项式变为:

$$y = a + d(x^3 - 1.5x^2) \quad (9)$$

上式保证分维曲线的图形在其 X_{min} 与 X_{max} 处分别逼近两条水平渐近线。为使分布曲线最大限度地拟合分布态势,用最小二乘法确定参数 a 与 d

在本研究中对此模型也进行了充分的试验,证明此模型与前一模型相当,见图9。同时还具有另外一些优点(详见本文 § 2.3.5)。

2.3.3 分形试验图形的生成

为了使分析讨论的对象更为明确,此处采用若干常见的生成元,在不同类型的目标基线上,进行仿射变换与迭代,生成若干具有纯数学特征的分形图形。

采用了6种生成元与4类目标基线,见图8

此处对4种具有不同结构特征的目标基线分别用6种生成元各进行3次仿射变换与迭代,连同目标基线一起,共生成80个分形图。此处给出

部分示例, 见图 9

2.3.4 扩展分维函数的模型拟合

首先对每一个分形图形确定其量规步长序

列, 即对最小尺度 d_{min} 与最大尺度 d_{max} 的范围进行等比划分 (表现为对数的等差划分)。由于对地图数据来说, d_{min} 可认为是常量, 而 d_{max} 是取决于

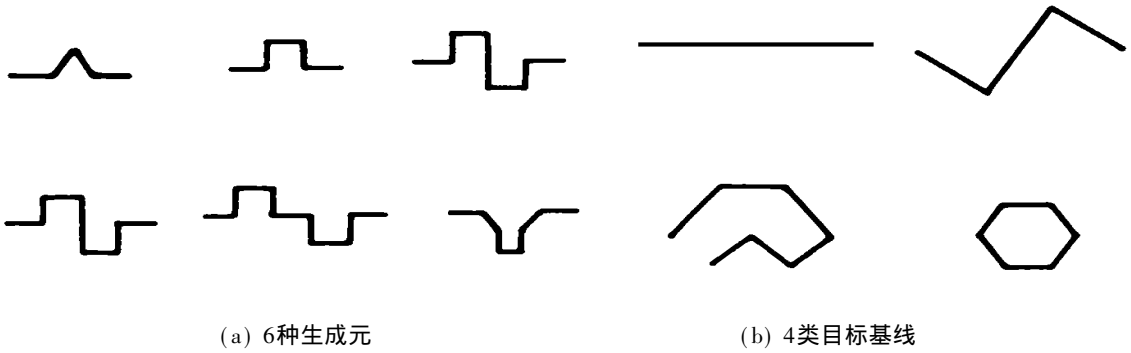


图 8 所试验的 6 种生成元与 4 种目标基线

Fig. 8 6 Kinds of Generators and 4 Kinds of Base Lines for Fractal Tests

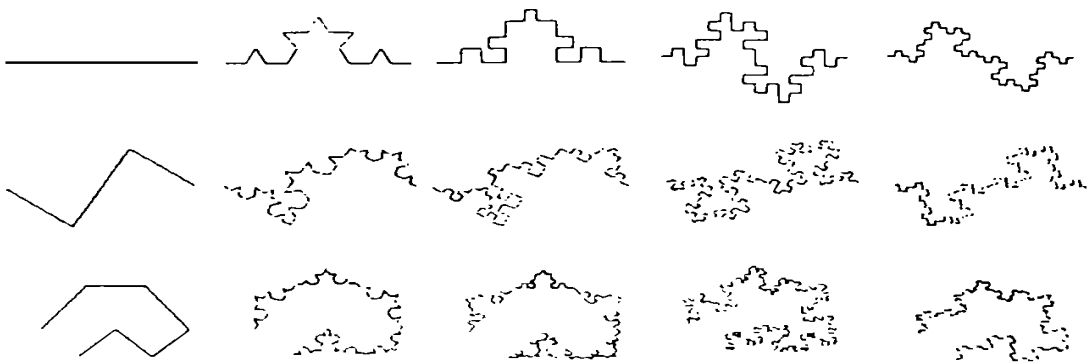


图 9 生成的分形图的部分示例

Fig. 9 Illustration of a Part of Fractal Graphics Generated

具体物体的图形的, 因此, 这样所确定的量规步长序列取决于 d_{max} , 因而也就是取决于物体本身。显然, 这种步长序列是因物而异的, 它能在数据观测开始就顾及到物体本身的特征, 从而是一种具有自适应性能的步长确定方法。在本试验中对每一个图形用 20 个 (从最小到最大) 步长去量测该图形的曲线长度。对同一组数据用上述两种数学模型分别作曲线拟合。

为了便于可视化与便于比较, 需要对每一个图形量测数据作规格化处理, 以克服由于数值太小或太大而造成的可视比较困难。此处采用 CAD 中的常用方法: 将各个长度量测结果转换为 0-1 之间的规格化数值。从而使各个扩展分维图形均适当地填满屏幕。

试验表明, 当图形具有明显的分形特征时, 用反 S 形模型可以很好地表达扩展分维关系。

1) Hermite 分段带导数插值拟合

为了强调扩展分维与常量分维的差异, 在作 Hermite 分段带导数插值拟合的同时, 也作了回归直线拟合, 见图 10 图 11 图中, a 为分形曲线;

b 为构造步长与曲线长度分布; c 为回归直线拟合或分段 Hermite 带导数反 S 形曲线拟合; $GAMA$ 与 DEV 分别为相应的逼近均方差。

2) 三次多项式带导数插值拟合

对上面所提出的用来表达分形反 S 形分布的带导数三次多项式插值模型, 这里用所生成的部分分形图形来检验它的适用性, 见图 12

2.3.5 三次多项式带导数插值拟合与 Hermite 分段带导数插值拟合的比较

对于 Hermite 分段带导数插值拟合来说, 由于它的分段特性, 增强了它的拟合灵活性, 因而它具有较好的拟合精度。但是, 分段特性的一个负面特点是降低了该方法的整体性, 这表现在函数图形有时出现非光滑波动, 见图 11

三次多项式带导数插值拟合是一个整体函数, 因此它具有无波动的光滑单调图形, 便于进行解析处理, 例如, 用解析法近似地确定无标度区的上下界等。但由于其整体性使其拟合的灵活性降低, 因而拟合精度较差。

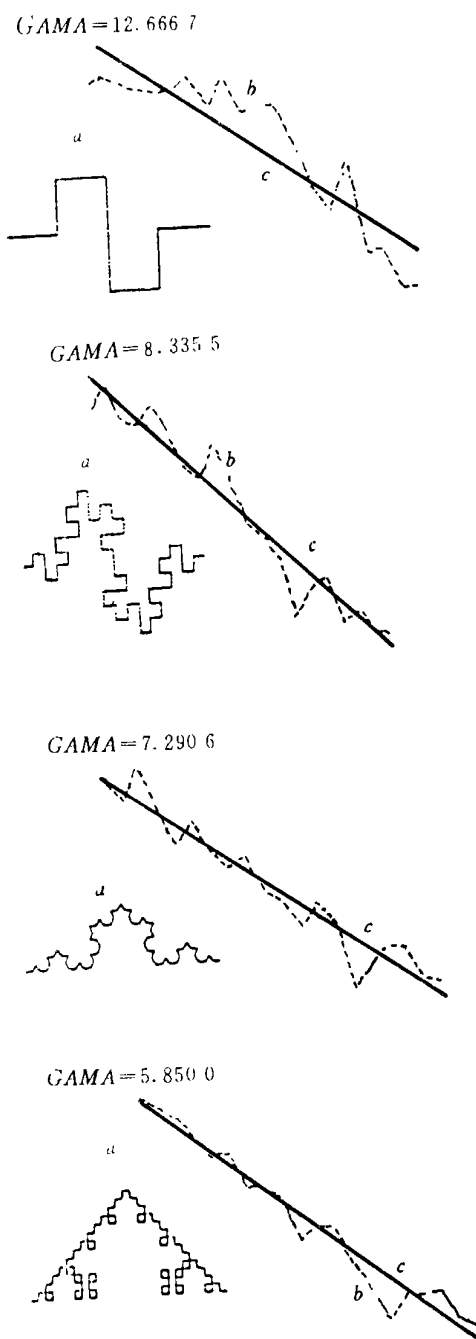


图 10 扩展分维的回归直线拟合

Fig. 10 Straight Line Regression of Extended Fractal Dimension

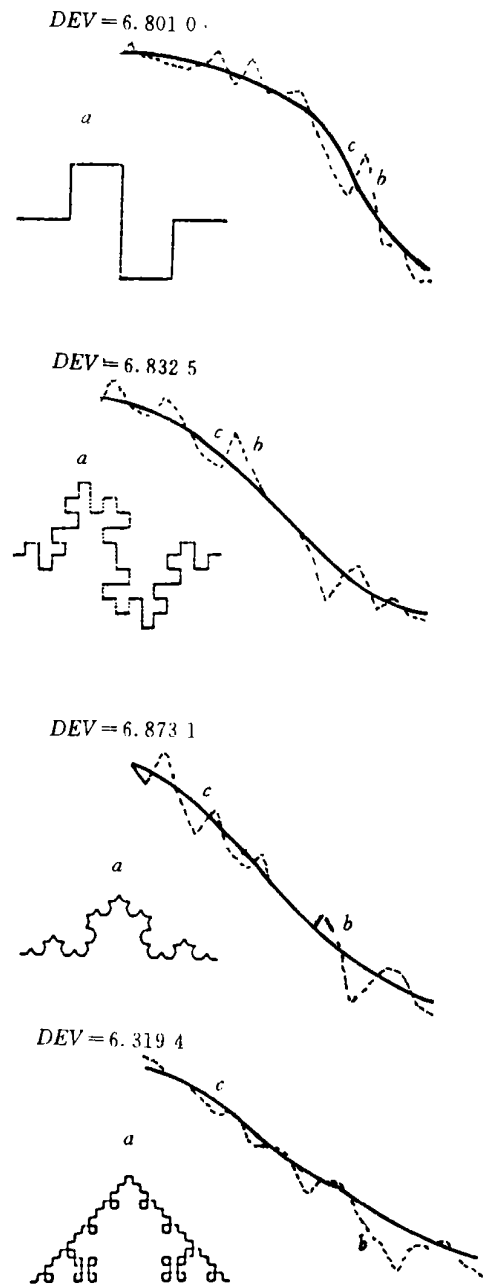


图 11 扩展分维的分段 Hermite 插值拟合

Fig. 11 Curve Fitting by Piecewise Hermite Interpolation for Extended Fractal Dimension

3 扩展分维函数的结构分析

3.1 无标度区的近似确定

无标度区的确定是分形应用的一个重要问题,学者们正在探讨各种严密有效方法,如参考文献 [3] 中所述,有人工判定法、相关系数检验法、强化系数法、拟合误差法、分维值误差法、总体拟

合法、自相似比法、轨迹分析法和文献 [20] 中提到的三折线段最小二乘曲线拟合法等等。这些方法都是在没有扩展分维函数的情况下提出的。在具有扩展分维函数的情况下,便可用解析的方法近似地确定无标度区的上下界。为此目的,在图 13 中,连接 A 、 B 两点得一直线,它与分维函数曲线交于 C 点。在 AC 与 CB 两个区间分别求分维曲线到 AB 直线的最远距离点 M 与 N ,则此两点

的横坐标 d_s 、 d_t 便为无标度区的下界与上界。

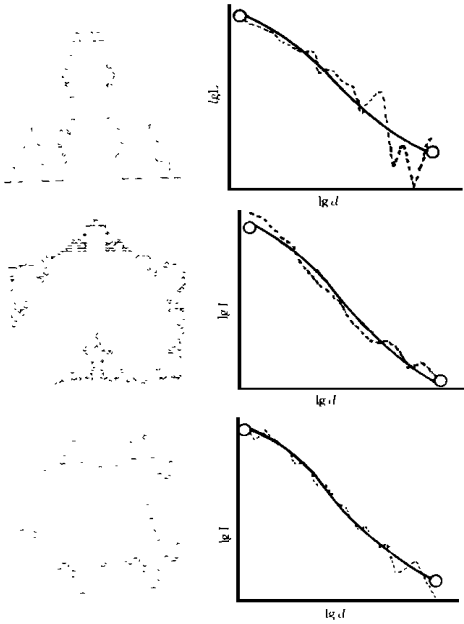


图 12 带导数三次多项式适用性检验

Fig. 12 Checking the Usability of Cubic Hermite Interpolation Method

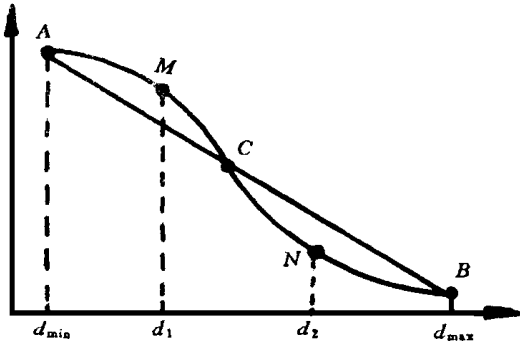


图 13 无标度区的自动确定

Fig. 13 Automatic Determination of Non-Scaling Range

3.2 扩展分维函数的区段结构分析

由于扩展分维表达了包括无标度区以外的信息,从而揭示了分形体的更多层次的特征,如图 14 所示

织构分形 (textural fractal) 是 ($d_{min} \sim d_1$) 所对应的部分,它描述分形体的精细结构与纹理特征;结构分形 (structure fractal) 是无标度区 ($d_1 \sim d_2$) 对应的部分,它描述分形体的严格自相似特征;态势分形 (state fractal) 是 ($d_2 \sim d_{max}$) 所对应的部分,它描述着分形体的总体变化特征

这种从全程上对分维函数的结构性划分,从本质上对分形的概念进行了扩充:把原来位于无

标度区以外的观测成果给予了新的理解与定义,使得扩展分维获得了新的活力,进而使它具有从多个层次上描述复杂现象的能力。

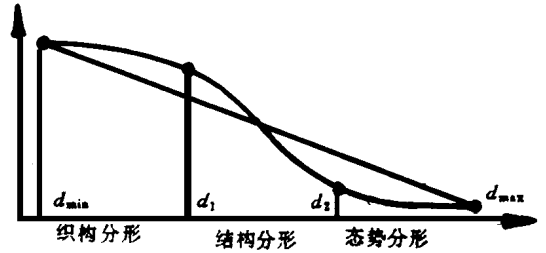


图 14 扩展分维对分形体多层特征的揭示

Fig. 14 Discovering the Multi-level Characteristics of Extended Fractal Dimension

参 考 文 献

- 1 王 桥.分形地图图形处理中几个理论问题的研究.武汉测绘科技大学学报,1996(4): 382~ 386
- 2 王 桥,龙 毅,秦建荣. DEM数据内插的分形方法及其试验研究.武汉测绘科技大学学报,1996(2): 159 ~ 162
- 3 王 桥.分形理论在地图图形数据自动处理中的若干扩展与应用研究: [学位论文].武汉: 武汉测绘科技大学, 1996
- 4 杨玉荣.基于分形理论的地貌表达.武汉测绘科技大学学报,1996(2): 154~ 158
- 5 张继贤,李德仁.影像纹理的多标度分形分析.武汉测绘科技大学学报,1995(2): 106~ 111
- 6 黄桂兰,郑肇葆.模糊聚类分析用于分形的影像纹理分类.武汉测绘科技大学学报,1995(2): 112~ 117
- 7 曾文曲,王向阳.分形理论与分形的计算机模拟.沈阳: 东北大学出版社,1993
- 8 王东生,曹 磊.混沌、分形及其应用.合肥: 中国科学技术大学出版社,1995
- 9 杨展如.分形物理学.上海: 上海科技教育出版社, 1996
- 10 齐东旭.分形及其计算机生成.北京: 科学出版社,1994
- 11 高安秀树.分数维.北京: 地震出版社,1994
- 12 Barnsley M, Devaney R, Mandelbrot B B, et al.分形图形学.北京: 海洋出版社,1995
- 13 Falconer K.分形几何——数学基础及其应用.沈阳: 东北大学出版社,1991
- 14 Finlay M, Blanton K A.用 C++ 设计二维、三维分形图形程序.北京: 科学出版社,1995
- 15 Kaye B H.分形漫步.沈阳: 东北大学出版社,1994
- 16 刘式达,刘式适.分形和分维引论.北京: 气象出版社, 1993
- 17 张志三.漫谈分形.长沙: 湖南教育出版社,1996
- 18 谢和平,薛秀谦.分形应用中的数学基础与方法.北京:

- 科学出版社, 1997
- 19 谢和平, 张永平, 宋晓秋, 徐汉涛编译. 分形几何——数学基础与应用. 重庆: 重庆大学出版社, 1995
- 20 敖力布, 林鸿溢. 分形学导论. 呼和浩特: 内蒙古人民出版社, 1996
- 21 李后强, 张国祺, 汪富泉, 等. 分形学理论的哲学发轫. 成都: 四川大学出版社, 1993
- 22 仪垂祥. 非线性科学及其在地学中的应用. 北京: 气象出版社, 1995
- 23 陶 闯, 陶本藻. 分形布朗随机过程的统计分析及其应用前景. 测绘通报, 1994(3)
- 24 张济忠. 分形. 北京: 清华大学出版社, 1995
- 25 刘文予. 金属断口纵剖面的分形分析. 分形理论及其应用. 武汉: 华中理工大学出版社, 1991
- 26 林鸿溢, 李映雪. 分形论——奇异性探索. 北京: 北京理工大学出版社, 1992
- 27 黄立基. 多标度分形及其性质. 载: 李后强, 张国祺, 汪富泉, 等. 分形学理论的哲学发轫. 成都: 四川大学出版社, 1993
- 28 电子计算机和数控技术在飞机制造中的应用. 北京: 国防工业出版社, 1978
- 29 金廷赞. 计算机图形学. 杭州: 浙江大学出版社, 1988
- 30 孙家广, 杨长贵. 计算机图形学. 北京: 清华大学出版社, 1995
- 31 Laplante P. 分形图形基础与编程技巧 (Fractal mania). 北京: 学苑出版社, 1994
- 32 Bittner H R, Sernetz M. Selfsimilarity Within Limits Description with the Log-Logistic Function. In: Feigen H O, Henriques J M, Penedo L F eds. Fractals in the Fundamental and Applied Sciences. Elsevier Science Publishers B V (North-Holland), 1991
- 33 Волков НМ. Принципы и Методы Картометрии. Москва: Издательство АН СССР. 1950
- 34 Davis D S. Nomography and Empirical Equations. 2nd ed. New York, 1962
- 35 Voss R F. Random Fractal Forgeries. In: Earnshaw R A, eds. Fundamentals for Computer Graphics. Berlin: Springer-Verlag, 1985
- 36 Zhu Q. Fractal-based Analysis and Realistic Display, the Theory and Application to DEM. ISPRS V. XXXI, Part B4. Vienna, 1996. 1 007~ 1 010

Numerical Examination for Fractal Extension

Wu Hehai

(School of Land Science, W TU SM, 129 Luoyu Road, Wuhan, China, 430079)

Abstract Because of the difficulty in description of geo-features with a single value of fractal dimension, it is necessary to perform extension from the original constant dimension value which is independent upon measure step lengths to variable one which can be considered as a function depended upon measure step lengths. In this paper the author proposed principles and methods to establish the inverse S shaped curve function and to examine the suitability of this model for enhancing the ability to describe complexed phenomena.

Key words fractal dimension; extension of fractal dimension; inverse sigmoid curve