

最小独立闭合环与附和导线的自动生成算法*

冯 琰 张正禄 罗年学

(武汉测绘科技大学地学测量工程学院,武汉市珞喻路 129号, 430079)

摘 要 应用图论理论,直接根据控制网平差的基于测站的网点信息和观测值文件,提出了最小独立闭合环自动生成的逐步回代法和附和导线自动生成的组合法,并编程予以实现。最后用实例验证了算法的正确性和用之进行观测值质量检核的有效性。

关键词 图论;测量控制网;最小独立闭合环;附和导线;逐步回代法

分类号 P221; O157.5

在控制测量中,观测值可能含有系统误差和粗差,为了保证测量成果的质量,除在观测过程中实时对每一观测值进行各种限差检核外,在网平差时还须对控制网中各多边形闭合差、各附和导线闭合差进行计算检核,用以评定观测值的质量,探测和剔除粗差,保证平差成果的质量。由于任意网形自动生成最小独立闭合环较为复杂,目前这种闭合差的计算工作大多由人工完成;或先给出推算路线信息,再由计算机完成。对于简单小型的网,这种计算的工作量尚能容忍,但对于大型网和复杂网来说,则相当费时费事,更重要的是不利于控制测量数据处理过程的自动化。因此,测量控制网中最小独立闭合环和附和导线的自动生成便成为一个亟待解决的问题。

本文针对环路闭合差和附和导线闭合差计算问题,应用图论理论,对控制网进行分析,结合控制网自身的特点,直接根据“科傻”系统中控制网平差的基于测站的网点信息和观测值文件,对最小独立闭合环及附和导线的自动生成算法进行研究,并编程得到实现,进一步与“科傻”系统的“现代测量控制网数据处理通用软件包”融合在一起,提高了“科傻”系统数据处理的自动化程度。

1 测量控制网的图论分析

图论是研究事物之间关系的一种数学工具,它用点表示事物,用线段表示事物之间的关系。在测量控制网中,点即为测站点和照准点,线段即为观测的边长和方向。事物之间的关系可以理解为控制点之间通过方向、边长观测值建立的连接。

若在一个图 G 中,每一对点之间至少有一条路径,我们就称图 G 为连通图。显然测量控制网是一个连通图。为研究方便起见,人们常把连通图 G 的部分点和边独立出来分析,这一部分点和边构成的图称为连通图 G 的子图或连通子图。如果一个连通子图包含了图 G 的所有节点,但没有构成闭合环路,则称这样的连通子图为连通图 G 的生成树。一个连通图至少有一棵生成树,但是,其生成树不是唯一的。例如图 1 中,(a)是一个连通图,(b)和(c)都是(a)的生成树。连通图及其生成树的上述定义和性质对于搜寻和生成测量控制网的最小闭合环是非常重要的。

生成树的边称为树枝;连通图 G 中不在生成树上的边称为图 G 的余枝;与任一棵生成树相应的余枝集合称为图 G 的余树。增加一条余枝到一棵生成树上形成一个基本回路。根据前面所述,一个连通图 G 的基本回路数等于其余枝数。对于一个测量控制网,可以形成很多个闭合环,但其中独立的最小闭合环一般是唯一确定的。若要把所有的闭合环找出来,不仅没有意义,而且可能会出现组合爆炸问题。根据图论理论可知,测量控制网的一个独立闭合环就是图 G 的一个基本回路。我们只要按图论中基本回路的形成方法,就可以得到一组闭合环,它们之间是相互独立的,我们称之为独立闭合环。然而,连通图的生成树不是唯一的,对于不同的生成树,可以形成不同的基本回路。例如图 1 中,对应于(b)生成树的基本回路分别为 152 253 354;对应于(c)生成树的基本回路分别为 215 3215 43215。它们分别都是相互独立的闭合环,但前者才满足最小闭合环的条件。

收稿日期: 1997-07-08 冯琰,女,24岁,硕士生,现从事测量数据处理研究。

* 国家测绘局教学研究项目,编号 G9701

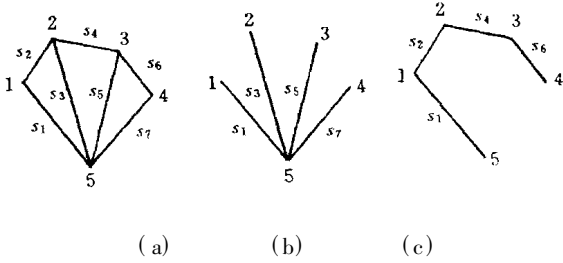


图 1 连通图和其生成树

Fig. 1 Connected Graph and Its Tree Graph

通过以上分析可知,在测量控制网中要求搜寻并生成一组不但相互独立而且是最小的闭合环。一般来说,对于一个确定的控制网,最小独立闭合环是唯一确定的。本文在图论理论的基础上,提出了一种逐步回代的算法,实现了最小独立闭合环的自动生成。

2 最小独立闭合环的自动生成算法

该算法包括化简控制网为连通图,形成控制网的一棵生成树和相应的余树,用逐步回代法搜寻最小独立闭合环。逐步回代法的核心思想是:将

余枝回加到生成树,通过改变余枝加到生成树上的先后顺序,保留该余枝在生成树上,逐步搜寻出最小独立闭合环,直到生成树最后变成原连通图,即所有的余枝都加到生成树上,就可以得到一组独立的最小闭合环。现将该算法详述如下。

2.1 化简控制网

对于测量控制网,生成最小闭合环是为了计算角度闭合差、距离闭合差和全长相对闭合差。角度闭合差需满足各内角都进行双向观测的条件;距离闭合差和全长相对闭合差还要求进行边长观测。因此,在生成最小独立的闭合环和附和导线时,首先要对控制网进行化简处理。

如图 2 中,(a)所示控制网,如果只进行角度闭合差的计算,单纯的观测边 S_7 就要被删除,删除后如 (c)所示。如果还要进行距离闭合差的计算,并且对 S_7 边长进行了观测,那么 S_7 就不能被删除。观察 (b)和 (c),两者有一个共同点,两图中都有自由度(顶点所关联的边数)为 1 的顶点,显然,这样的顶点对于寻找最小环是无意义的,应该被删除。于是 (a)就化简成 (e)所示图形,(b)化简成 (d)所示图形。化简控制网不仅得到图论所定义的连通图,而且可减少后续处理的工作量。

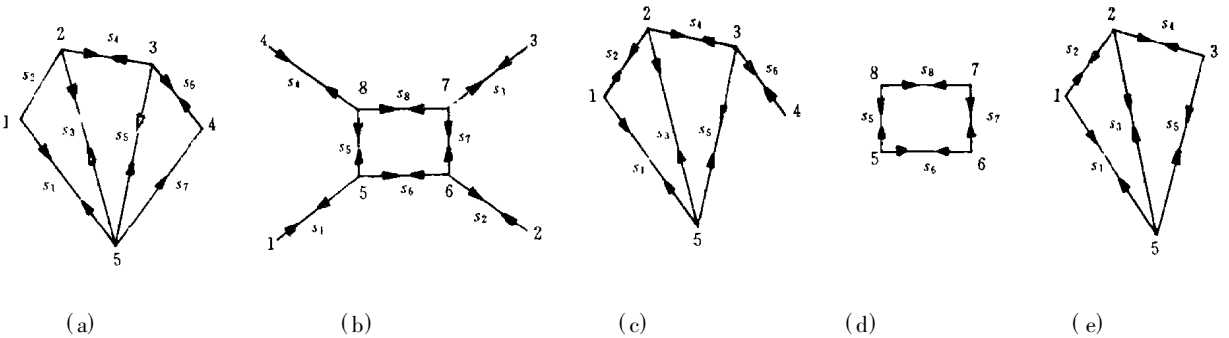


图 2 控制网化简

Fig. 2 Simplify Control Network

顺便指出,自由度为 1 的顶点虽然对于求最小闭合环无意义,但对于搜寻附和导线是有用的。所以在寻找附和导线时,控制网只去掉单向观测边,而且,含边长的单方向观测边仍应保留,以便判断是否为闭合导线。

2.2 生成树和余树的形成

由前述可知,经过化简后的控制网是一个连通图。从一个连通图 G 寻找一棵生成树是很简单的。首先判断是否有回路,若没有,那么 G 本身就是一棵生成树;如果 G 中有一个回路,从该回路中删除一条边,仍旧保持 G 是连通的,则删除一条边后的图形为生成树;若 G 中有多个回路,重

复从回路中删除一条边,直到删除最后一个回路中的一条边,且使 G 仍是连通的,则可得到图 G 的生成树。余树的生成比较简单,原连通图 G 中不在生成树上的边为余枝,余枝的集合就是余树。

2.3 自动生成最小独立闭合环

得到了生成树和余树之后,我们就可以用逐步回代法来寻找最小闭合环了。把第一次得到的生成树和余树分别用 $tree^{(0)}$ 和 $vtree^{(0)}$ 表示,把逐步回代所得到的“生成树”和“余树”用上标表示,如 $tree^{(1)}$ 、 $vtree^{(1)}$...。这里它们不再是图论中所定义的生成树和余树,用引号表示以示区别。实际中的控制网网形比较复杂,为了方便起见,选一个简

单的图形为例来说明 图 1 中 (a) 所示的连通图作为一个控制图, 观测其内角和边长, 图 1 中 (c) 所示的生成树作为 $tree^{(0)}$ 。用逐步回代法寻找这个控制网的最小独立闭环的步骤如下:

1) 把余树中的余枝分别加到生成树上, 通过删除非回路边, 可以得到一组独立闭环, 找出最小闭环, 这些最小闭环就是需搜寻的 例如用 $tree^{(0)}$ 得到一组独立闭环为 215 3215 53215, 显然, 其中最小闭环为 215, 形成 215 的余枝为 S_3 把 S_3 加到 $tree^{(0)}$ 上得到 $tree^{(1)}$, 如图 3(a) 所示。从 $vtree^{(1)}(S_3, S_5, S_7)$ 中删除 S_3 , 得到 $vtree^{(1)}(S_5, S_7)$, 并把最小闭环 215 记录下来。

2) 分别寻找 $vtree^{(1)}$ 中余枝的两端点“生成树” $tree^{(1)}$ 中的最短路径, 该最短路径与余枝构成一组闭环, 在这组闭环中寻找最小闭环, 并记录下来 在如图 3(a) 所示 $tree^{(1)}$ 中, 按上述方法分别找到 325 和 4325, 比较之, 得到最小环 325, 记录下来 把形成 325 的余枝 S_5 加到 $tree^{(1)}$ 上, 得到 $tree^{(2)}$, 如图 3(b) 所示。从 $vtree^{(1)}$ 中删除 S_5 , 得到 $vtree^{(2)}(S_7)$ 。

3) 重复 2), 直至所有的余枝都加到生成树上, 最后得到的 $tree^{(n)}$ 即为原连通图, 而 $vtree^{(n)}$ 为空。每步中得到并记录下来的最小闭环就是所要寻找的一组最小独立闭环。在如图 3(b) 所示的 $tree^{(2)}$ 中找 S_7 两端点 5 和 4 的最短路径 435, 加上余枝 S_7 , 得到最后一个最小闭环 435, 并记录下来, 同时把 S_7 加到 $tree^{(2)}$ 上, 得到 $tree^{(3)}$, 如图 3(c) 所示。从 $vtree^{(2)}$ 中删除 S_7 , 得到 $vtree^{(3)}$ 为空。至此, 结束寻找最小闭环。215 325 435 就是所要寻找的一组最小独立闭环。

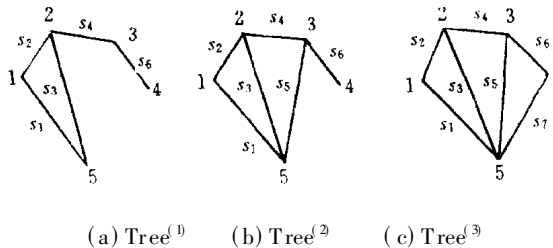


图 3 搜寻最小环

Fig. 3 Searching Least Loop

显然, 若第一次得到的生成树 $tree^{(0)}$ 如图 1 (b) 所示, 根据上述算法, 第一步就可得到所要寻找的 3 个最小独立闭环 215 325 435

大地四边形是测量控制网的一种基本图形, 它有 4 个点 6 条边, 由前述可知, 它可生成 3 个最小独立闭环

一个大地四边形如图 4(a) 所示, 图 4(b) 和

(c) 分别是它的两棵生成树。采用逐步回代算法, 若得到的生成树如图 4(b) 所示, 那么第一步搜寻到 2 个最小独立闭环 214 和 213, 第二步搜寻到第三个最小独立闭环 324 或者 314 若第一步得到的生成树如图 4(c) 所示, 那么第一步就可以搜寻到 3 个最小独立闭环 213 214 与 314 由此可见, 大地四边形的 3 个最小闭环不是唯一确定的。

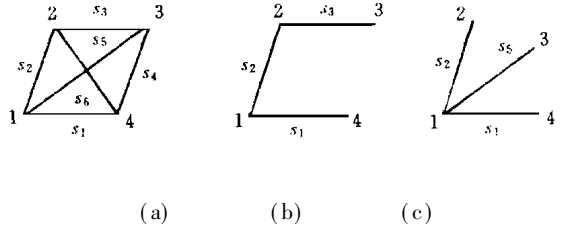


图 4 大地四边形

Fig. 4 Geodetic Quadrilateral

3 附和导线的自动生成算法

考虑到目前生产单位使用最多的是导线网, 而对于导线网的检核, 还包括计算附和导线及闭合导线的闭合差, 另外对于导线中的粗差探测, 也要事先知道导线的路线信息, 因此, 这里对附和导线的自动生成算法作一些讨论

对于任意一个导线网, 都有两个或两个以上已知点 首先, 把这些已知点按下述原则进行分组: 若两已知点间有双向方向观测 (即互为定向方向点), 就把这两个已知点当作一组, 并用该两点的点来表示 若两已知点间为单方向观测 (即在一点上以另一点定向), 则两个已知点也为一组, 并用点表示 因为有时存在公共定向点, 故点对中有相同点号 若已知点与其它已知点无方向连接, 则该点为一组 通过分组, 得到新的“独立”已知点组, 在这里“独立”的意义是指它们之间没有双向方向观测连接 然后, 对这组独立的已知点组按下述组合法进行搜寻, 生成附和导线

1) 设有 k 个已知点组, 任取一点组, 分别寻找这点组到其它各点组的最短路径, 并记录下来

2) 取下一个已知点组, 分别寻找该点组到其它各点组的最短路径, 并记录下来

3) 重复第 2 步, 直到 $k-1$ 个已知点组 由上可见, 若有 k 个已知点组, 则可生成 k^2 条附和导线, 所以上述算法称为组合法

闭合导线的搜寻是借助于最小独立闭环来实现的。因为闭合导线可以看成一条环路, 我们通过逐步回代搜寻到一组最小独立闭环后, 判断

每个环的边长是否都进行了观测,若是,该闭合环也是一条闭合导线。

4 应用与算例

根据上述算法,用 Visual C⁺ 语言编程并与“科傻”系统连接,实现了最小独立闭合环和附合导线的自动生成及各种闭合差的计算和检核,这对于任意平面控制网,具有以下应用意义:

1)通过计算最小独立闭合环的闭合差,与限差进行比较,可以判断组成该环的观测值是否含有粗差,即闭合差超过限差则认为观测值含粗差。若粗差观测值位于公共边上,则相邻独立环的闭合差都可能超限;若不在公共边上(即在外围边上),则粗差只对一个环产生影响。若网中还包括附合路线的闭合差信息,则可有效地判断观测值粗差的可能位置。

2)根据最小独立闭合环的闭合差可按下式计算测角中误差:

$$m_{\beta} = \pm ((f_{\beta}^2 / n) / N)^{1/2}$$

式中, f_{β} 为闭合环的角度闭合差("); N 为闭合环的个数; n 为闭合环内角的个数

如果每一个最小独立闭合环都是三角形,上式即为菲列罗公式。

注意:

① 应将闭合差超限的独立环去掉。

② 若 N 太小 ($N < 8$ 或 10 时),则 m_{β} 的置信区间较大,这时 m_{β} 的值只能作为参考。

若将测角中误差 m_{β} 转化成方向中误差,再与方向观测值的先验精度比较,可以评价方向观测值的观测质量。

3)对于导线网,若闭合环中任一观测值含有粗差,该粗差将会分配到该环的其它观测值上,一般的统计检验方法将失效。若只有一个方向观测值含粗差时,则可通过下述方法(也在程序中实现并证明有效)探测:任意假定闭合环中的一个点为起点,与该点相连的边为起始边,起点坐标与起始边的方位角可任意假定,分别沿顺时针和逆时针方向推算环中各点的坐标,然后对两组值进行比较,这时,坐标相近的那个点上的方向观测值含有粗差。这种方法同样适合于附合导线,但导线两端的已知坐标应不含粗差。

值得注意的是,一个环中若含有两个以上粗差,一般是无法探测出来的,只有在网的设计中,利用增加导线网的结点数(即环数),减少相邻两结点间的边数的方法来提高网的可靠性。由于在实际中总是采用多测回观测以及往返观测等措施,所以工程网中一般含粗差的观测值极少。

为了检核算法和程序的正确性,我们对各种实测和模拟的测角网、边角网、导线网和混合网进行了检查计算,结果表明其计算是正确的。现举例说明。

某实测导线网共有 114 个点,其中有 7 个已知点,独立的已知点组为 5,生成 $C_5^2 = 10$ 条附合导线,25 个最小独立闭合环。由最小独立闭合环闭合差计算的测角中误差与方向观测值的验后中误差一致。计算中发现全部角度闭合差均符合限差规定,但距离闭合差超限。该网中,第 18 个闭合环的 $\Delta S_{18} = 60.41\text{cm}$,第 25 个闭合环的 $\Delta S_{25} = 56.75\text{cm}$ 。由于与这两个闭合环相邻的闭合环都符合限差要求,且两个距离闭合差均为正,故可判断两个环的 4 条公共边含有 0.6m 左右的边长粗差,但很难确定究竟哪一条(或多条)含粗差。我们建议作业单位对这 4 条公共边进行检查,果然发现其中有一条边在转抄时有 0.6m 的错误。

5 结束语

本文所讨论的算法主要是针对平面测量控制网,它具有严密、通用的特点,只用到控制网平差所需的基于测站的网点信息和观测值文件,而不需任何附加信息。根据上述算法我们也实现了水准网最小独立闭合环的生成、闭合差计算与检查,并通过实例得到了验证。另外,本文所提出的算法在原则上也适用于 GPS 基线网。

参 考 文 献

- 1 吴文泷.图论基础及应用.北京:铁道出版社,1984
- 2 杨洪.图论常用算法选编.北京:铁道出版社,1988
- 3 白征东.GPS网中最小独立闭合环的自动搜索.测绘科技动态,1994(2): 18~ 21
- 4 张正禄,罗年学.“科傻”系统——地面控制测量一体化自动化的研究与应用.测量员,1996(5): 15~ 21

Algorithms to Produce Least Independent Close Loops and Connecting Traverses Automatically

Feng Yan Zhang Zhenglu Luo Nianxue

(School of Geo-science and Surveying Engineering, W TU SM, 129 Luoyu Road, Wuhan, China, 430079)

Abstract In order to meet the needs of users and to improve the data processing function in control surveying, we have proposed two algorithms in this paper based on graph theory. According to the observation file of control network, one is the step-by-step back-substitution algorithm, with which a set of least independent close loops in control network can be produced automatically. And the other is called combination algorithm, which is used to produce the connecting traverses. The corresponding program is developed. Finally, illustrations are given to show that the proposed algorithms are valid and effective.

Key words graph theory; surveying control network; least independent close loop; connection traverse; step-by-step back-substitution algorithm

(上接第 250 页)

在给定 $X_1 = x_1$ 下,

$$X_2 | X_1 = x_1 \sim PN_n(\mu_2 + D_{21}D_{11}^{-1}(x_1 - \mu_1), D_{22} - L_{22})$$

综观定理 2 3 4 6 知,只有在 L 满足一定的条件下,其边缘分布才为 p -范分布,这是与正态分布的不同之处

参 考 文 献

1 孙海燕. p -范分布理由及其在测量数据处理中的应

用: [学位论文]. 武汉: 武汉测绘科技大学, 1995

2 复旦大学. 概率论. 北京: 人民教育出版社, 1979

3 王松桂. 线性模型的理论及其应用. 合肥: 安徽教育出版社, 1987

Statistical Properties of the p -th Power Norm Distribution

Wang Wenxiang

(Department of Basic Courses, W TUSM, 129 Luoyu Road, Wuhan, China, 430079)

Abstract In this paper, some interesting properties of the p -th power norm distribution by characteristic function are given.

Key words p -th norm distribution; characteristic function; edge distribution