DOI: 10.13203/j.whugis1998.03.016
第 23卷第 3期　　武 汉 测 绘 科 技 大 学 学 报　　Vol. 23 No. 3
1998年 9月　　Journal of Wuhan Technical University of Surveying and Mapping　　Sept. 1998

起算数据误差影响下的方差分量估计

黄加纳

(武汉测绘科技大学地学测量工程学院,武汉市珞喻路 129号, 430079)

摘　要　探讨了起算数据误差影响下的方差分量估计方法,给出了顾及起算数据误差影响时求解方差分量估值的方程组及单位权中误差估值的计算公式,并通过实例说明了当起算数据误差较大时,它们对方差分量估计的影响是不应忽略的。

关键词　起算数据误差; Helmert方差分量估计;单位权中误差估值
分类号　P207.1

在各种平差问题中,一般都包含有起算数据,并认为起算数据具有很高精度。所以在平差计算中,往往将它们当作没有误差的固定值。当起算数据误差不容忽视时,为了正确估算平差结果的精度,卓健成和文献 [1, 2]等探讨了顾及起算数据误差影响下的精度估算方法,推证了有关精度估算公式。笔者在文献 [3]中导出了顾及起算数据误差影响下的单位权中误差的估算公式。另一方面,当平差问题中有两类或更多类型的观测值时,为了正确给出它们的随机模型,通常采用验后估计的方法,即所谓方差分量估计法,常用的方法是 Helmert方差分量估计法。在讨论方差分量估计方法时,迄今为止,尚未见顾及起算数据误差影响下的方差分量估计问题的讨论。为此,本文对该方法进行了探讨。

1　给定基准下的方差分量估计

在平差问题中,称必要的起算数据为基准数据,或简称为基准。基准与未知参数之间的关系可以用基准方程来表达。每个基准可以列出一个基准方程,而一个基准方程也可以代表一个基准。例如,秩序平差中的附加条件方程就是一种基准方程。

平差问题的函数模型(线性形式)可表示为:

$$V = B\hat{x}_k - L,\quad G_k^{\mathrm{T}}\hat{x}_k - W_k = 0 \tag{1}$$

式中,第一式是误差方程;第二式是基准方程。设观测值 $\underset{n\times 1}{L}$ 的方差为 D_L,权阵为 $P = Q^{-1} = \sigma_0^2 D_L^{-1}$, $\underset{u\times 1}{\hat{x}_k}$ 表示在给定基准下未知参数的估值。又设基准个数为 d,系数阵的秩为 $\mathrm{rk}(G_k) = d$, $\mathrm{rk}(B) = u - d = t$, t是必要观测数。

按附有限制条件的间接平差可由(1)式得法方程:

$$\begin{cases} N\hat{x}_k + G_k K - B^{\mathrm{T}}PL = 0 \\ G_k^{\mathrm{T}}\hat{x}_k - W_k = 0 \end{cases} \tag{2}$$

式中, $N = B^{\mathrm{T}}PB$。已经证明[1],(2)式中的 $K = 0$, $Q_k G_k = G(G_k^{\mathrm{T}}G)^{-1}$,其中 $BG = 0$。于是由式(2)可得:

$$\begin{aligned}\hat{x}_k &= Q_k(B^{\mathrm{T}}PL + G_k W_k) = \\ &Q_{\hat{x}_k}B^{\mathrm{T}}PL + G(G_k^{\mathrm{T}}G)^{-1}W_k\end{aligned} \tag{3}$$

其中, $Q_k = (N + G_k G_k^{\mathrm{T}})^{-1}$, $Q_{\hat{x}_k}$为 $\hat{x}_k$ 的协因数阵,有:

$$\begin{aligned}Q_{\hat{x}_k} &= Q_k - Q_k G_k G_k^{\mathrm{T}} Q_k = \\ &Q_k - G(G_k^{\mathrm{T}}G)^{-1}(G^{\mathrm{T}}G_k)^{-1}G^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{4}$$

其中, G满足 $BG = 0$。

若有两类观测值 $\underset{n_1\times 1}{L_1}$ 和 $\underset{n_2\times 1}{L_2}$,设

$$L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix},\ V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix},\ D_L = \begin{bmatrix} D_{11} & 0 \\ 0 & D_{22} \end{bmatrix} \tag{5}$$

它们相应的权阵不准确,设为:

$$P_1 = \sigma_{01}^2 D_{11}^{-1},\quad P_2 = \sigma_{02}^2 D_{22}^{-1} \tag{6}$$

则(1)式可写为:

$$\begin{cases} V_1 = B_1\hat{x}_k - L_1,\quad V_2 = B_2\hat{x}_k - L_2 \\ G_k^{\mathrm{T}}\hat{x}_k - W_k = 0 \end{cases} \tag{7}$$

依照 Helmert方法,由

$$\begin{cases} E(V_1^{\mathrm{T}}P_1V_1) = \mathrm{tr}(P_1D_{V_1}) \\ E(V_2^{\mathrm{T}}P_2V_2) = \mathrm{tr}(P_2D_{V_2}) \end{cases} \tag{8}$$

可得到求解方差分量估值 $\hat{\sigma}_{01}^2$和 $\hat{\sigma}_{02}^2$的方程

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}(n_1 + Q_{\hat{x}_k}N_1Q_{\hat{x}_k}N_1 - 2Q_{\hat{x}_k}N_1)\hat{\sigma}_{01}^2 + \\ &\mathrm{tr}(Q_{\hat{x}_k}N_1Q_{\hat{x}_k}N_2)\hat{\sigma}_{02}^2 = V_1^{\mathrm{T}}P_1V_1\end{aligned}$$

收稿日期: 1998-01-10。黄加纳,女, 53岁,副教授,现从事测量平差及信息处理研究。

$$\mathrm{tr}(Q_{\hat{x}_k} N_1 Q_{\hat{x}_k} N_2)\hat{\sigma}^2_{01} + \mathrm{tr}(n_2 + Q_{\hat{x}_k} N_2 Q_{\hat{x}_k} N_2 - 2Q_{\hat{x}_k} N_2)\hat{\sigma}^2_{02} = V_2^{\mathrm{T}} P_2 V_2 \quad (9)$$

式中,$N_1 = B_1^{\mathrm{T}} P_1 B_1$, $N_2 = B_2^{\mathrm{T}} P_2 B_2$。

如果利用(7)式中的第三式(基准方程)消去 $\hat{x}_k$ 中的 d 个未知参数,则可得到一般的 Helmert 方差分量估计公式。

当有 m 类观测值时,(9)式的一般形式为:

$$\mathrm{tr}(n_i + Q_{\hat{x}_k} N_i Q_{\hat{x}_k} N_i - 2Q_{\hat{x}_k} N_i)\hat{\sigma}^2_{oi} + \sum_{j \neq i} \mathrm{tr}(Q_{\hat{x}_k} N_i Q_{\hat{x}_k} N_j)\hat{\sigma}^2_{oj} = V_i^{\mathrm{T}} P_i V_i$$

$$i = 1, 2, \cdots, m \quad (10)$$

2 起算数据误差影响下的方差分量估计

平差问题中除基准数据外,如果还有非基准起算数据(即文献[2]中的多余的起算数据),而这些非基准起算数据存在不可忽略的误差,则应顾及它们对方差分量估计的影响。实际上,也就是讨论非基准起算数据误差对方差分量估计的影响。

设除基准数据外,有非基准起算数据 λ,它们在给定基准下的方差为 D_λ。此时,平差的函数模型可写为:

$$\begin{cases} V = B\hat{x} - L, \quad G_k^{\mathrm{T}}\hat{x} - W_k = 0 \\ G_\lambda^{\mathrm{T}}\hat{x} - \lambda = 0 \end{cases} \quad (11)$$

按附有条件的间接平差法可解得[2]:

$$\begin{cases} \hat{x} = [I - Q_{\hat{x}_k} G_\lambda (G_\lambda^{\mathrm{T}} Q_{\hat{x}_k} G_\lambda)^{-1} G_\lambda^{\mathrm{T}}]\hat{x}_k - Q_{\hat{x}_k} G_\lambda (G_\lambda^{\mathrm{T}} Q_{\hat{x}_k} G_\lambda)^{-1}\lambda \\ Q_{\hat{x}} = Q_{\hat{x}_k} - Q_{\hat{x}_k} G_\lambda (G_\lambda^{\mathrm{T}} Q_{\hat{x}_k} G_\lambda)^{-1} G_\lambda^{\mathrm{T}} Q_{\hat{x}_k} \end{cases} \quad (12)$$

式中,$\hat{x}_k$ 和 $Q_{\hat{x}_k}$ 是在不考虑(11)式中的第三式,即没有非基准起算数据时的解。它们可由(3)式和(4)式给出,即

$$\begin{cases} \hat{x}_k = Q_{\hat{x}_k} B^{\mathrm{T}} P L + G(G_k^{\mathrm{T}} G)^{-1} W_k \\ Q_{\hat{x}_k} = Q_k - G(G_k^{\mathrm{T}} G)^{-1}(G^{\mathrm{T}} G_k)^{-1} G^{\mathrm{T}} \end{cases} \quad (13)$$

其中,$Q_k = (N + G_k G_k^{\mathrm{T}})^{-1}$, G 满足 $BG = 0$ 且可得:

$$\hat{x} = Q_{\hat{x}} B^{\mathrm{T}} P L + \eta_\lambda \lambda + \eta_k W_k \quad (14)$$

式中,

$$\eta_\lambda = -Q_{\hat{x}_k} G_\lambda (G_\lambda^{\mathrm{T}} Q_{\hat{x}_k} G_\lambda)^{-1} \quad (15)$$

$$\eta_k = (I + \eta_\lambda G_\lambda^{\mathrm{T}}) G (G_k^{\mathrm{T}} G)^{-1} \quad (16)$$

仍设有两类观测值 $\underset{n_1 \times 1}{L_1}$ 和 $\underset{n_2 \times 1}{L_2}$,它们相应的权阵取为:

$$P_1 = \hat{\sigma}^2_{01} D_{11}^{-1}, \quad P_2 = \hat{\sigma}^2_{02} D_{22}^{-1} \quad (17)$$

将(11)式写为:

$$\begin{cases} V_1 = B_1\hat{x} - L_1, \quad V_2 = B_2\hat{x} - L_2 \\ G_k^{\mathrm{T}}\hat{x} - W_k = 0, \quad G_\lambda^{\mathrm{T}}\hat{x} - \lambda = 0 \end{cases} \quad (18)$$

依 Helmert 方法,仍有:

$$\begin{cases} E(V_1^{\mathrm{T}} P_1 V_1) = \mathrm{tr}(P_1 D_{V_1}) \\ E(V_2^{\mathrm{T}} P_2 V_2) = \mathrm{tr}(P_2 D_{V_2}) \end{cases} \quad (19)$$

将(14)式代入(18)式的第一式,得:

$$V_1 = B_1 Q_{\hat{x}} B^{\mathrm{T}} P L + B_1 \eta_\lambda \lambda + B_1 \eta_k W_k - L_1 = (B_1 Q_{\hat{x}} B_1^{\mathrm{T}} P_1 - I) L_1 + B_1 Q_{\hat{x}} B_2^{\mathrm{T}} P_2 L_2 + B_1 \eta_\lambda \lambda + B_1 \eta_k W_k \quad (20)$$

式中,W_k 是基准数据的函数,它们没有误差;λ 是有误差的非基准起算数据,其方差为 D_λ。观测值的方差为:

$$D_{11} = \hat{\sigma}^2_{01} P_1^{-1}, \quad D_{22} = \hat{\sigma}^2_{02} P_2^{-1} \quad (21)$$

由协方差传播律可得:

$$D_{V_1} = (P_1^{-1} + B_1 Q_{\hat{x}} N_1 Q_{\hat{x}} B_1^{\mathrm{T}} - 2B_1 Q_{\hat{x}} B_1^{\mathrm{T}})\hat{\sigma}^2_{01} + B_1 Q_{\hat{x}} N_2 B_1^{\mathrm{T}} \hat{\sigma}^2_{02} + B_1 \eta_\lambda D_\lambda \eta_\lambda^{\mathrm{T}} B_1^{\mathrm{T}} \quad (22)$$

故有:

$$E(V_1^{\mathrm{T}} P_1 V_1) = \mathrm{tr}(n_1 + Q_{\hat{x}} N_1 Q_{\hat{x}} N_1 - 2Q_{\hat{x}} N_1)\hat{\sigma}^2_{01} + \mathrm{tr}(Q_{\hat{x}} N_1 Q_{\hat{x}} N_2)\hat{\sigma}^2_{02} + \mathrm{tr}(N_1 \eta_\lambda D_\lambda \eta_\lambda^{\mathrm{T}})$$

同理可得:

$$E(V_2^{\mathrm{T}} P_2 V_2) = \mathrm{tr}(Q_{\hat{x}} N_1 Q_{\hat{x}} N_2)\hat{\sigma}^2_{01} + \mathrm{tr}(n_2 + Q_{\hat{x}} N_2 Q_{\hat{x}} N_2 Q_{\hat{x}} N_2 - 2Q_{\hat{x}} N_2)\hat{\sigma}^2_{02} + \mathrm{tr}(N_2 \eta_\lambda D_\lambda \eta_\lambda^{\mathrm{T}})$$

当已知非基准起始数据 λ 在给定基准(11)式的第二式下的方差为 D_λ 时,求解方差分量估值 $\hat{\sigma}^2_{01}$、$\hat{\sigma}^2_{02}$ 的方程组为:

$$\mathrm{tr}(n_1 + Q_{\hat{x}} N_1 Q_{\hat{x}} N_1 - 2Q_{\hat{x}} N_1)\hat{\sigma}^2_{01} + \mathrm{tr}(Q_{\hat{x}} N_1 Q_{\hat{x}} N_2)\hat{\sigma}^2_{02} = V_1^{\mathrm{T}} P_1 V_1 - \mathrm{tr}(N_1 \eta_\lambda D_\lambda \eta_\lambda^{\mathrm{T}})$$

$$\mathrm{tr}(Q_{\hat{x}} N_1 Q_{\hat{x}} N_2)\hat{\sigma}^2_{01} + \mathrm{tr}(n_2 + Q_{\hat{x}} N_2 Q_{\hat{x}} N_2 - 2Q_{\hat{x}} N_2)\hat{\sigma}^2_{02} = V_2^{\mathrm{T}} P_2 V_2 - \mathrm{tr}(N_2 \eta_\lambda D_\lambda \eta_\lambda^{\mathrm{T}}) \quad (23)$$

当 $\sigma^2_{01} = \sigma^2_{02} = \sigma^2_0$ 时,可以证明:

$$(n - u - d - r_\lambda)\hat{\sigma}^2_0 = V^{\mathrm{T}} P V - \mathrm{tr}(N \eta_\lambda D_\lambda \eta_\lambda^{\mathrm{T}})$$

其中,r_λ 为非基准起算数据的个数,$r_0 = n - u - d - r_\lambda$,即为多余观测数。所以,顾及起算数据误差影响时,单位权方差的估值为:

$$\hat{\sigma}^2_0 = \frac{1}{r_0}[V^{\mathrm{T}} P V - \mathrm{tr}(N \eta_\lambda D_\lambda \eta_\lambda^{\mathrm{T}})] \quad (24)$$

3 算 例

如图 1,水准网上的 B、C、D、E 为未知水准点,A、F 两已知点高程的方差分别为 2 mm² 和 8 mm²,协方差为 0.5 mm²。网中有 2种不同精度的高差观测值,第一类为 $L_1 \sim L_4$,第二类为 $L_5 \sim L_8$,它们的初始权均取 1。现要求以 A 点为高程基准,应用方差分量估计方法求定两类观测值的方差。

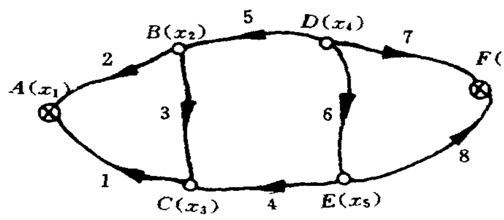

图 1　水准网示意图

Fig. 1　Sketch of Leveling Network

其计算步骤是:

1) 列出误差方程、基准方程和非基准起算数据方程。

$$V_1=\begin{bmatrix}1&0&-1&0&0&0\\1&-1&0&0&0&0\\0&-1&1&0&0&0\\0&0&1&0&-1&0\end{bmatrix}\hat{x}-$$

$$[-3.70\quad -0.10\quad -2.30\quad -2.60]^T$$

$$V_2=\begin{bmatrix}0&1&0&-1&0&0\\0&0&0&-1&1&0\\0&0&0&-1&0&1\\0&0&0&0&-1&1\end{bmatrix}\hat{x}-$$

$$[-3.70\quad 1.30\quad 2.50\quad -4.20]^T$$

$$[1\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0]\hat{x}=0$$

$$[0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 1]\hat{x}=0$$

2) 按转换法计算 F点高程在以 A点为高程基准情况下的方差 D_F。

由不同基准下方差转换公式:

$$D_{\hat{x}_k}=[I-G(G_k^T G)^{-1}G_k^T]D_{\hat{x}_j}\cdot$$

$$[I-G_k(G^T G_k)^{-1}G^T]$$

因此有:

$$I-G(G_k^T G)^{-1}G_k^T=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}^T=$$

$$\begin{bmatrix}0&0\\-1&1\end{bmatrix}$$

所以, $\begin{bmatrix}D_A&D_{AF}\\D_{FA}&D_F\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\-1&1\end{bmatrix}\cdot$

$$\begin{bmatrix}2&0.5\\0.5&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&9\end{bmatrix}$$

即得 $D_F=9\ \mathrm{mm}^2$。

3) 对水准网进行第一次平差，求解未知参数 $\hat{x}$和改正数 V_1、V_2。

4) 计算 (23)式中 $V_1^T P_1 V_1$、$V_2^T P_2 V_2$的系数项和起算数据误差影响项，得:

$$V_1^T P_1 V_1=61.1924,\quad V_2^T P_2 V_2=77.0280$$

$$\mathrm{tr}(N_1 h D_{\hat{x}} h^T)=5,\quad \mathrm{tr}(N_2 h D_{\hat{x}} h^T)=3$$

5)组成顾及起算数据误差影响的方差分量估计方程，并求解两类观测值的方差分量估值 $\hat{\sigma}^2_{01(1)}$、$\hat{\sigma}^2_{02(1)}$。

方差分量估计方程为:

$$\begin{bmatrix}1.472&0.693\\0.693&1.425\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{\sigma}^2_{01}\\\hat{\sigma}^2_{02}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}61.192\\77.028\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}$$

得:

$$\hat{\sigma}^2_{01(1)}=17.821,\quad \hat{\sigma}^2_{02(1)}=43.315$$

其比值为 $\hat{\sigma}^2_{02(1)}/\hat{\sigma}^2_{01(1)}=2.43$

6)取定新的单位权中误差，重新对两类观测值定权，并重复 3)、4)、5)的计算。当 $\hat{\sigma}_{01(i)}\approx\hat{\sigma}_{02(i)}$时，则完成计算。

如果在上述第 4步计算时不顾及起算数据误差的影响，可解得 $\hat{\sigma}^2_{01(1)}=20.909$, $\hat{\sigma}^2_{02(1)}=43.885$, 其比值为 2.97。

若起算数据的方差为 $D_F=36\ \mathrm{mm}^2$，可解得 $\hat{\sigma}^2_{01(1)}=8.430$, $\hat{\sigma}^2_{02(1)}=41.533$，其比值为 4.93。

可以看到，当起算数据的误差较大时，它们对方差分量估计的影响是不应忽略的。

参　考　文　献

1　崔希璋. 广义测量平差 (第二版). 北京: 测绘出版社, 1992. 53

2　尹任祥. 附合网的平差基准和广义相对误差椭圆. 武汉测绘科技大学学报, 1994(增刊): 33～37

3　黄加纳. 顾及起始数据误差影响时单位权中误差的估值. 武汉测绘科技大学学报, 1986(4): 64～74

Estimation of Variance Components Under the Influence of the Initial Datum Error

Huang Jiana

(School of Geo-science and Surveying Engineering, WTUSM, 129 Luoyu Road, Wuhan, China, 430079)

Abstract　The estimation method of variance components which are under the influence of the initial datum error is presented. Coupled equations of calculating the variance compo-

nents estimation as the influence of the initial datum error is taken into consideration and the formula which is used for computing the estimate value of the standard error of unit weight are put forward. In the end, an instance is cited to illustrate that the influence of the initial datum error on the estimation of variance components should not be omitted when it is biggish.
Key words initial datum error; helmert estimation of variance components; estimate value of standard error of unit weight

(上接第 232页)

参 考 文 献

1 Sugeno M. Theory of Fuzzy Integrals and Its Application: [Ph. D. Dissertation]. Tokyo: Tokyo Institute of Technology, 1974
2 王震源,李法朝. Fuzzy积分在评判过程中的应用.模糊数学, 1985, 5(2): 109~ 113
3 郭桂蓉,庄钊文.信息处理中的模糊技术.长沙: 国防科技大学出版社, 1993. 118~ 128
4 杨伦标.模糊数学原理及应用.广州: 华南理工大学出版社, 1993. 315~ 329
5 王光远.论综合评判几种数学模型的实质及应用.模糊数学, 1984, 4(4): 81~ 87

Research on Fuzzy Integrals Assessment Model of Large Dam's Observed Behavior

He Jinping Li Zhenzhao Xue Guiyu Li Min
(College of Hydroelectric Engineering, WUHEE, Luojiashan, Wuhan, China, 430072)

Abstract Based on the analysis of the assessment system of dam's observed behavior, a new way for studying large dam's observed behavior assessment by means of applying fuzzy integrals assessment model is provided. The example shows that the method presented in this paper is reasonable and feasible.
Key words large dam; observed behavior; fuzzy integrals; comprehensive assessment