DOI: 10.13203/j.whugis1998.03.015
第 23卷第 3期 武 汉 测 绘 科 技 大 学 学 报 Vol.23 No.3
1998年 9月 Journal of Wuhan Technical University of Surveying and Mapping Sept. 1998

p-范分布的统计特性

王文祥

(武汉测绘科技大学基础课部,武汉市珞喻路 129号,430079)

摘 要 本文利用特征函数,得到了 p-范分布的几条重要性质。

关键词 p-范分布;特征函数;边缘分布

分类号 O241.1; P207

在误差分布理论中,Gauss在假定观测值的平均值为参数的最或然值下曾导出偶然误差服从正态分布,然后由极大似然法得到最小二乘原理。以正态分布作为误差分布的理论分布有许多优良的性质,比如正态分布的极大似然估计、最小二乘估计、最优线性无偏估计是完全一致的。在测量数据处理中,以往总假定观测值来自正态总体,理论和实践经验说明这是一个良好的近似描述。随着科学技术的发展,由于高技术仪器的复杂性以及所观测问题的难度与深度等因素,仍假定误差服从正态分布似嫌理由不足,且在数据处理的实践过程中也证明,观测值母体分布明显地偏离正态分布。囿于上述理由,孙海燕等在一组合理的假设条件下,推导出观测值的误差分布,称之为 p-范分布,并就 p-范分布的测量平差理论作了详细的研究[1]。为全面深刻地理解 p-范分布,本文对它的一些性质作进一步讨论。p-范分布包括拉普拉斯分布($p=1$)、正态分布($p=2$)、均匀分布($p\to\infty$)、退化分布($p\to 0$)等常见分布。

1 再生性

再生性是指同类型独立的随机变量之和仍为同类型随机变量[2]。

定理 1 设 x_1、x_2 分别服从均值为 μ_1、μ_2,方差为 σ_1^2、σ_2^2 的一元 p-范分布且 x_1 与 x_2 独立,则仅当 x_1 与 x_2 服从正态分布时,x_1+x_2 服从 p-范分布。

此定理说明了除 $p=2$(正态分布)外,其它 p-范分布不具有再生性。

证 根据文献[1]中结果,知 x_1 与 x_2 的特征函数分别为:

$$f_j(t)=e^{it\mu_j}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(\sigma_j t)^{2n}}{(2n)!}\cdot\left[\frac{\Gamma(1/p)}{\Gamma(3/p)}\right]^n\frac{\Gamma((2n+1)/p)}{\Gamma(1/p)}\qquad j=1,2 \tag{1}$$

由此知一元 p-范分布的特征函数由均值 μ、方差 σ^2 及 p 唯一确定,且知 x_1+x_2 的特征函数为:

$$\begin{aligned}f(t)&=f_1(t)\cdot f_2(t)=e^{it(\mu_1+\mu_2)}\sum_{k_1=0}^{\infty}(-1)^{k_1}\frac{(\sigma_1 t)^{2k_1}}{(2k_1)!}\cdot\left[\frac{\Gamma(1/p)}{\Gamma(3/p)}\right]^{k_1}\frac{\Gamma((2k_1+1)/p)}{\Gamma(1/p)}\cdot\sum_{k_2=0}^{\infty}(-1)^{k_2}\frac{(\sigma_2 t)^{2k_2}}{(2k_2)!}\cdot\\&\left[\frac{\Gamma(1/p)}{\Gamma(3/p)}\right]^{k_2}\frac{\Gamma((2k_2+1)/p)}{\Gamma(1/p)}=e^{it(\mu_1+\mu_2)}\cdot\\&\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\left[\frac{\Gamma(1/p)}{\Gamma(3/p)}\right]^n\left(\sum_{k_1+k_2=n}\frac{\sigma_1^{2k_1}\sigma_2^{2k_2}}{(2k_1)!\,(2k_2)!}\cdot\frac{\Gamma((2k_1+1)/p)\Gamma((2k_2+1)/p)}{\Gamma(1/p)\Gamma(1/p)}\right)\end{aligned}$$

其中,$\sum_{k_1+k_2=n}$ 表示对满足 $k_1+k_2=n$ 的一切非负整数求和,且最后一步利用到级数的柯西乘积。

首先,假设 x_1+x_2 服从一元 p-范分布,由于 $E(x_1+x_2)=\mu_1+\mu_2$,$D(x_1+x_2)=\sigma_1^2+\sigma_2^2$,且特征函数由均值、方差及 p 唯一确定,则在假设 x_1+x_2 服从一元 p-范分布时,x_1+x_2 的特征函数也有:

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{it(\mu_1+\mu_2)}(-1)^n t^{2n}\frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^n}{(2n)!}\cdot\left[\frac{\Gamma(1/p)}{\Gamma(3/p)}\right]^n\frac{\Gamma((2n+1)/p)}{\Gamma(1/p)}$$

比较 $f(t)$ 的两式,即得对任意非负整数 n,恒有:

$$\sum_{k_1+k_2=n}\frac{\sigma_1^{2k_1}\sigma_2^{2k_2}}{(2k_1)!\,(2k_2)!}\frac{\Gamma\left(\frac{2k_1+1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{2k_2+1}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}=\frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^n\,\Gamma\left(\frac{2n+1}{p}\right)}{(2n)!\,\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \tag{2}$$

收稿日期:1997-09-19.王文祥,男,34岁,讲师,现从事数理统计研究。

由上述恒等式来找 p 的关系式,令 $n=2$,有:

$$\frac{\Gamma(5/p)}{\Gamma(1/p)} = \frac{4!}{2!\cdot 2^2}\left[\frac{\Gamma(3/p)}{\Gamma(1/p)}\right]^2 \qquad (3)$$

利用(2)及(3)式,并令 $n=3$,经过计算得:

$$\frac{\Gamma(7/p)}{\Gamma(1/p)} = \frac{6!}{3!\cdot 2^3}\left[\frac{\Gamma(3/p)}{\Gamma(1/p)}\right]^3$$

依次类推归纳可得:

$$\frac{\Gamma((2n+1)/p)}{\Gamma(1/p)} = \frac{(2n)!}{n!\cdot 2^n}\left[\frac{\Gamma(3/p)}{\Gamma(1/p)}\right]^n \qquad (4)$$

故(4)式对 $n=0,1,2,\cdots$ 皆成立。

将(4)式代入(1)式,有:

$$f_j(t) = e^{it\mu_j - \sigma_j^2 t^2/2}$$

即 $x_j \sim N(\mu_j, \sigma_j^2), j=1,2$

本定理说明了 p-范分布对均值 μ 的检验将难以利用样本均值 $\bar{X}$。

2 边缘分布

n 元 p-范分布的密度函数为:

$$P(X) = (p^n\lambda^n)/(2^n\Gamma^n(1/p)|D|^{1/2})\cdot \exp\{-[\lambda\| L^{-1}(X-\mu)\|_p]^p\}$$

其中,$X=(x_1,\cdots,x_n)'$;$\lambda=\sqrt{\Gamma(3/p)/\Gamma(1/p)}$;$D$ 为正定阵;L 为满足 $LL'=D$ 的可逆阵;$\|X\|_p=\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$;$|D|$ 表示 D 的行列式。

n 元 p-范分布的特征函数为:

$$f(t_1,t_2,\cdots,t_n) = \int_{R^n} e^{it'X}\frac{p^n\lambda^n}{2^n\Gamma^n(1/p)|D|^{1/2}}\cdot \exp\{-[\lambda\| L^{-1}(X-\mu)\|_p]^p\}\,dx_1\cdots dx_n$$

令 $Y=(y_1,\cdots,y_n)'=L^{-1}(X-\mu)$,则

$$X = LY+\mu$$

该变换的雅可比行列式为 $|L|_+=|D|^{1/2}$,于是

$$f(t_1,\cdots,t_n) = \int_{R^n} e^{it'(LY+\mu)}\frac{p^n\lambda^n}{2^n\Gamma^n(1/p)|D|^{1/2}}\cdot \exp\{-\lambda^p\sum_{k=1}^n |y_k|^p\}|D|^{1/2}dy_1\cdots dy_n =$$

$$\frac{p^n\lambda^n}{2^n\Gamma^n(1/p)}e^{it'\mu}\prod_{k=1}^n\int_{-\infty}^{\infty} e^{ib_k y_k-\lambda^p|y_k|^p}dy_k =$$

$$\frac{1}{\Gamma^n(1/p)}e^{it'\mu}\prod_{k=1}^n\left[\sum_{m=0}^\infty(-1)^m(1/(2m)!)\cdot (b_k/\lambda)^{2m}\Gamma[(2m+1)/p]\right] \qquad (5)$$

其中,$b\triangleq(b_1,\cdots,b_n)\triangleq t'L$。

由此可见,一般分布还依赖于 L($p=2$ 例外)。例如取 $p=1, n=2, D=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, L_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, L_2=\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2&\sqrt{2}/2\\-\sqrt{2}/2&\sqrt{2}/2\end{pmatrix}$,显然 $L_1L_1'=D=L_2L_2'$。

但取 L_1 时的特征函数为:

$$f_1(t_1,\cdots,t_n) = e^{it'\mu}\prod_{k=1}^2\sum_{m=0}^\infty(-1)^m(1/(2m)!)\cdot (t_k/\lambda)^{2m}\Gamma(2m+1) = e^{it'\mu}\frac{1}{1+(t_1/\lambda)^2}\cdot\frac{1}{1+(t_2/\lambda)^2}$$

而取 L_2 时的特征函数为:

$$f_2(t_1,\cdots,t_n) = e^{it'\mu}\frac{1}{1+\frac{1}{2}\left(\frac{t_1+t_2}{\lambda}\right)^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{2}\left(\frac{t_1-t_2}{\lambda}\right)^2}$$

显然 $f_1(t_1,\cdots,t_n)\neq f_2(t_1,\cdots,t_n)$,即各代表不同分布。

鉴于上述理由,可设 X 服从 μ、D、L 的 n 元 p-范分布,简记为 $X\sim PN_n(\mu,D,L)$,而服从均值为 μ、方差为 σ^2 的一元 p-范分布,简记为 $X\sim PN(\mu,\sigma^2)$。下面的几个定理说明了其合理性。

在(5)式中令 $t_2=\cdots=t_n=0, t_1=t$,且设 $L=(l_{ij})$,则 x_1 的特征函数为:

$$f(t) = e^{it\mu_1}\frac{1}{\Gamma^n(1/p)}\prod_{k=1}^n\left[\sum_{m=0}^\infty(-1)^m\frac{1}{(2m)!}\cdot\left(\frac{l_{1k}}{\lambda}\right)^{2m}t^{2m}\Gamma\left(\frac{2m+1}{p}\right)\right]$$

其中,$(x_1,\cdots,x_n)'=X, (\mu_1,\cdots,\mu_n)'=\mu$,利用柯西乘积得:

$$f(t) = e^{it\mu_1}\sum_{m=0}^\infty(-1)^m\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{2m}\left[\sum_{k_1+\cdots+k_n=m}\frac{l_{11}^{2k_1}\cdots l_{1n}^{2k_n}\Gamma\left(\frac{2k_1+1}{p}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{2k_n+1}{p}\right)}{(2k_1)!\cdots(2k_n)!\,\Gamma^n(1/p)}\right]$$

因为 $D(x_1)=l_{11}^2+l_{12}^2+\cdots+l_{1n}^2$,欲使 x_1 服从一元 p-范分布,则必有:

$$\sum_{k_1+\cdots+k_n=m}\frac{l_{11}^{2k_1}\cdots l_{1n}^{2k_n}\Gamma\left(\frac{2k_1+1}{p}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{2k_n+1}{p}\right)}{(2k_1)!\cdots(2k_n)!\,\Gamma^n(1/p)} = \frac{(l_{11}^2+\cdots+l_{1n}^2)^m\cdot\Gamma((2m+1)/p)}{(2m)!\,\Gamma(1/p)} \qquad (6)$$

由此得以下定理:

定理 2 设 $X\sim PN_n(\mu,D,L)$,且 $l_{12}^2+\cdots+l_{1n}^2\neq 0$,如果 X 的一元边缘分布(关于 x_1)是一元 p-范分布,则 $X\sim N_n(\mu,D)$,即 X 服从正态分布。

证 若其边缘分布为 p-范分布,则(6)式成立,同定理 1的推导,有:

$$\frac{\Gamma\left(\frac{2n+1}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} = \frac{(2n)!}{2^n n!}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{3}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}\right]^n \qquad (7)$$

对 $n=0,1,2,\cdots$ 成立。

将(7)式代入(5)式,有:

$$f(t_1,\cdots,t_n)=e^{it'\mu-t'Dt/2}$$

即有 $X\sim N_n(\mu,D)$。

定理 3 设 $X=(x_1,\cdots,x_n)'\sim PN_n(\mu,D,L)$,且 $l_{12}=\cdots=l_{1n}=0$,则 $x_1\sim PN(\mu_1,l_{11}^2)$。如果还有 $l_{21}=l_{31}=\cdots=l_{n1}=0$,则 $(x_2,\cdots,x_n)$ 也服从 $n-1$ 元 p-范分布,且 x_1 与 $(x_2,\cdots,x_n)$ 独立。

证 在定理假设条件下,(6)式显然成立,即 $x_1\sim PN(\mu_1,l_{11}^2)$。

当还有 $l_{21}=\cdots=l_{n1}=0$ 时,$(x_2,\cdots,x_n)$ 的特征函数((5)式中令 $t_1=0$)为:

$$e^{i(t_2\mu_2+\cdots+t_n\mu_n)}\frac{1}{\Gamma^{n-1}(1/p)}\prod_{k=2}^{n}\left[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}\cdot\left(\frac{b_k}{\lambda}\right)^{2m}\Gamma\left(\frac{2m+1}{p}\right)\right]$$

因此 $(x_2,\cdots,x_n)$ 服从 $n-1$ 元 p-范分布,且 x_1 与 $(x_2,\cdots,x_n)$ 独立。

定理 4 设 $X=\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}\begin{matrix}k\times1\\(n-k)\times1\end{matrix}\sim PN_n(\mu,D,L)$,且 $\mu=\begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2\end{pmatrix}$,$D=\begin{pmatrix}D_1&0\\0&D_2\end{pmatrix}$,$L=\begin{pmatrix}L_{11}&0\\0&L_{22}\end{pmatrix}$,这里的分块方式与 X 相适应,则有:

$X_1\sim PN_k(\mu_1,D_1,L_{11})$,$X_2\sim PN_{n-k}(\mu_2,D_2,L_{22})$ 且 X_1 与 X_2 相互独立。

证 在(5)式中分别令 $t_1=\cdots=t_k=0$,$t_{k+1}=\cdots=t_n=0$,即得 X_2 与 X_1 的特征函数,其结论可相应得到。

3 线性变换

定理 5 设 $X\sim PN_n(\mu,D,L)$,$Y=AX$,$|A|\neq0$,则 $Y\sim PN_n(A\mu,ADA',AL)$。

证 X 的分布函数为:

$$f(X)=\frac{\lambda^n p^n}{2^n\Gamma^n(1/p)|D|^{1/2}}\cdot\exp\{-\lambda\|L^{-1}(X-\mu)\|_p^p\}$$

从而 Y 的分布函数为:

$$g(Y)=\frac{\lambda^n p^n}{2^n\Gamma^n(1/p)|D|^{1/2}}\exp\{-[\lambda\|L^{-1}(A^{-1}Y-\mu)\|_p]^p\}|A^{-1}|_+=\frac{\lambda^n p^n}{2^n\Gamma^n(1/p)|ADA'|^{1/2}}\cdot\exp\{-[\lambda\|(AL)^{-1}(Y-A\mu)\|_p]^p\}$$

又 $AL(AL)'=ALL'A'=ADA'$,即 $Y\sim PN_n(A\mu,ADA',AL)$,其中 $|A|_+$ 表示 A 的行列式的绝对值,$\lambda=\sqrt{\Gamma(3/p)/\Gamma(1/p)}$。

对一般的线性变换,上述结论不一定成立。

4 条件分布

定理 6 设 $X\sim PN_{m+n}(\mu,D,L)$,D 为正定阵,且

$$X=\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}\begin{matrix}m\times1\\n\times1\end{matrix},\quad\mu=\begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2\end{pmatrix}\begin{matrix}m\times1\\n\times1\end{matrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}D_{11}&D_{12}\\D_{21}&D_{22}\end{pmatrix},\quad L=\begin{pmatrix}L_{11}&0\\L_{21}&L_{22}\end{pmatrix},$$

$$D_{11}:m\times m,\ L_{11}:m\times m,$$

则有:

1) $X_1\sim PN_m(\mu_1,D_{11},L_{11})$;

2) 给定 $X_1=x_1$ 时,X_2 的条件分布为:

$$X_2|X_1=x_1\sim PN_n(\mu_2+D_{21}D_{11}^{-1}(x_1-\mu_1),D_{22\cdot1})$$

其中,$D_{22\cdot1}=D_{22}-D_{21}D_{11}^{-1}D_{12}$。

证 显然 D_{11} 为正定阵。令

$$A=\begin{pmatrix}I_m&0\\-D_{21}D_{11}^{-1}&I_n\end{pmatrix}$$

作线性变换:

$$Y=\begin{pmatrix}Y_1\\Y_2\end{pmatrix}=AX=\begin{pmatrix}I_m&0\\-D_{21}D_{11}^{-1}&I_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X_1\\X_2-D_{21}D_{11}^{-1}X_1\end{pmatrix}$$

由定理 5知:

$$Y\sim PN_{m+n}\left[\begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2-D_{21}D_{11}^{-1}\mu_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}D_{11}&0\\0&D_{22\cdot1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}L_{11}&0\\0&L_{22}\end{pmatrix}\right]$$

这里利用到:

$$A\mu=\begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2-D_{21}D_{11}^{-1}\mu_1\end{pmatrix}\quad ADA'=\begin{pmatrix}D_{11}&0\\0&D_{22\cdot1}\end{pmatrix}$$

$$AL=\begin{pmatrix}L_{11}&0\\L_{21}-D_{21}D_{11}^{-1}L_{11}&L_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}L_{11}&0\\0&L_{22}\end{pmatrix}$$

因 $LL'=D$,得 $D_{11}=L_{11}L'_{11}$,$D_{21}=L_{21}L'_{11}$,$D_{12}=L_{11}L'_{21}$,$D_{22}=L_{21}L'_{12}+L_{22}L'_{22}$,即有:

$$L_{21}-D_{21}D_{11}^{-1}L_{11}=0$$

由此知 $D_{22\cdot1}$ 为正定阵且依定理 4有:

$$Y_1=X_1\sim PN_m(\mu_1,D_{11},L_{11})$$

$$Y_2=X_2-D_{21}D_{11}^{-1}X_1\sim PN_n(\mu_2-D_{21}D_{11}^{-1}\mu_1,D_{22\cdot1},L_{22})$$

其中要利用关系 $L_{22}L'_{22}=D_{22}-L_{21}L'_{21}=D_{22}-L_{21}L_{11}^{-1}D_{12}=D_{22}-D_{21}(L'_{11})^{-1}L_{11}^{-1}D_{12}=D_{22}-D_{21}D_{11}^{-1}D_{12}=D_{22\cdot1}$。

(下转第 259页)

Algorithms to Produce Least Independent Close Loops and Connecting Traverses Automatically

Feng Yan　Zhang Zhenglu　Luo Nianxue
(School of Geo-science and Surveying Engineering, WTUSM, 129 Luoyu Road, Wuhan, China, 430079)

Abstract　In order to meet the needs of users and to improve the data processing function in control surveying, we have proposed two algorithms in this paper based on graph theory. According to the observation file of control network, one is the step-by-step back-substitution algorithm, with which a set of least independent close loops in control network can be produced automatically. And the other in called combination algorithm, which is used to produce the connecting traverses. The corresponding program is developed. Finally, illustrations are given to show that the proposed algorithms are valid and effective.

Key words　graph theory; surveying control network; least independent close loop; connection traverse; step-by-step back-substitution algorithm

(上接第 250页)

在给定 $X_1 = x_1$ 下,

$$X_2 | X_1 = x_1 \sim PN_n(\_{}_2 + D_{21}D_{11}^{-1}(x_1 - \_{}_1),\ D_{22\cdot 1}, L_{22})$$

综观定理 2 3 4 6知 ,只有在 L 满足一定的条件下 ,其边缘分布才为 p-范分布 ,这是与正态分布的不同之处.

参　考　文　献

1　孙海燕 . p-范分布理由及其在测量数据处理中的应用: [学位论文].武汉: 武汉测绘科技大学 , 1995
2　复旦大学.概率论 .北京: 人民教育出版社 , 1979
3　王松桂 .线性模型的理论及其应用.合肥: 安徽教育出版社 , 1987

Statistical Properties of the p-th Power Norm Distribution

Wang Wenxiang
(Department of Basic Courses, WTUSM, 129 Luoyu Road, Wuhan, China, 430079)

Abstract　In this paper, some interesting properties of the p-th power norm distribution by characteristic function are given.

Key words　p-th norm distribution; characteristic function; edge distribution