DOI: 10.13203/j.whugis1998.03.013
第 23卷第 3期　　武 汉 测 绘 科 技 大 学 学 报　　Vol. 23 No. 3
1998年 9月　　Journal of Wuhan Technical University of Surveying and Mapping　　Sept. 1998

对 LEGE法性质的进一步讨论及其改进搜索方法*

於宗俦　李明峰

(武汉测绘科技大学地学测量工程学院,武汉市珞喻路 129号,430079)

摘　要　对 LEGE法中的若干问题作了进一步的讨论,证明了 $R\Delta = V$ 是 $A\Delta = f$ 非退化的线性变换,基于 $R\Delta = V$ 对粗差进行定位定值等效于基于 $A\Delta = f$ 对粗差进行定位定值。此外,提出了一种粗差定位定值判断指标的改进搜索方法。

关键词　粗差;定位定值;搜索
分类号　P207

文献 [1]提出的基于真误差向量 Δ的线性恒等式 $R\Delta = V$ 是进行多维粗差同时定位定值的 LEGE法。在 $R\Delta = V$ 中,R 为可靠性矩阵,V 为改正数向量。由测量平差理论可知,对于同一个平差问题,不论采用何种最小二乘平差函数模型,最后求得的 R 和 V 都严格相等。因此,LEGE法是一种从任何最小二乘平差函数模型出发都能对粗差进行同时定位定值的通用方法。

文献 [1]的论述和算例结果表明,对于多维粗差的同时定位定值而言,LEGE法既简单直观,又行之有效。本文将通过条件平差模型对 LEGE法的若干性质作进一步的讨论,提出另一种判断标准,从而进一步优化粗差定位定值的算法。

1　利用条件平差模型进行多维粗差的定位与定值

与测量平差问题一样,分析粗差的先决条件是要求观测数据中必须存在多余观测。设有一 n 维观测向量 L,其对应的真误差向量为 Δ,若多余观测数为 r,则应存在 r 个独立条件方程,其线性化后的形式为:

$$\underset{r,n}{A}\ \underset{n,1}{\Delta} = \underset{r,1}{f} \tag{1}$$

式(1)为条件平差的函数模型,其中等号左边是关于真误差向量(包括粗差)的线性函数,右边是常数项,即闭合差向量。闭合差向量中各分量的大小直接反映了真误差向量中是否存在异常值。如果有的闭合差数值很大,则表明观测值中一定存在着粗差;如果所有闭合差的数值都很小,可能是根本不存在粗差,也可能是粗差在条件式中相互抵消,不可能被发现。下面结合一个具体例子讨论。

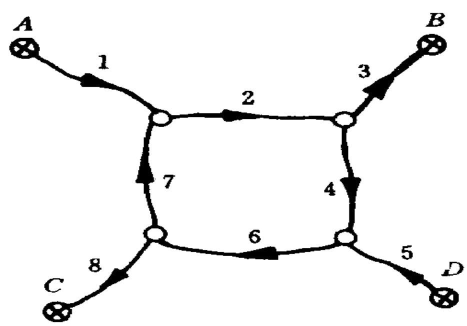

图 1　水准网
Fig. 1　Leveling Network

在图 1的水准网中,A、B、C、D 为已知点,观测值数 $n=8$,必要观测数 $t=4$,多余观测数 $r=n-t=4$。现模拟一组真误差为(单位 mm):

$$\Delta = [0.9\quad 0.8\quad -1.4\quad -0.4\quad \underline{10.7}\quad 1.2\quad -0.6\quad \underline{10.9}]^{\mathrm{T}} \tag{2}$$

下方划有横线者为粗差。由此列出 4个独立的条件方程式如下:

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta_1+\Delta_2+\Delta_3+\cdot+\cdot+\cdot+\cdot+\cdot=-0.9 \\ \cdot+\cdot-\Delta_3+\Delta_4-\Delta_5+\cdot+\cdot+\cdot=-9.7 \\ \Delta_1+\cdot+\cdot+\cdot+\cdot+\cdot-\Delta_7+\Delta_8=11.2 \\ \cdot+\cdot+\cdot+\cdot+\Delta_5+\Delta_6+\cdot+\Delta_8=22.8 \end{array}\right. \tag{3}$$

显然,任一闭合差的大小都完全取决于出现于该条件式中各真误差的大小。当某一真误差的数值愈大(粗差),则其对闭合差的贡献也愈大。一般而言,若在 n 维真误差向量中包含着 k 个($k \leqslant r$)粗差和 $k' = n-k$ 个非粗差,如果将这 k 个粗差归入第一个向量 Δ,其余的真误差都归入第二个

收稿日期:1997-07-18。於宗俦,男,74岁,教授,博士生导师,现从事近代测量平差理论和方法研究。

向量 X_{II},则可把(1)式写成如下分块形式:

$$\underset{r,k}{A_{\mathrm{I}}}\underset{k,1}{X_{\mathrm{I}}}+\underset{r,k'}{A_{\mathrm{II}}}\underset{k',1}{X_{\mathrm{II}}}=\underset{r,1}{f} \tag{4}$$

毫无疑问,此时 $A_{\mathrm{I}}X_{\mathrm{I}}$ 项对闭合差的影响将远远大于 $A_{\mathrm{II}}X_{\mathrm{II}}$ 项,换言之,闭合差 f 的数值主要取决于 $A_{\mathrm{I}}X_{\mathrm{I}}$ 项的数值。以上述例题为例,其中 X_5、X_8 为粗差,对照(3)式知:

$$A_{\mathrm{I}}=\begin{bmatrix}0&0\\-1&0\\0&1\\1&1\end{bmatrix},\quad X_{\mathrm{I}}=\begin{bmatrix}X_5\\X_8\end{bmatrix} \tag{5}$$

$$A_{\mathrm{II}}=\begin{bmatrix}1&1&1&0&0&0\\0&0&-1&1&0&0\\1&0&0&0&0&-1\\0&0&0&0&1&0\end{bmatrix}$$

$$X_{\mathrm{II}}=[X_1\quad X_2\quad X_3\quad X_4\quad X_6\quad X_7]^{\mathrm{T}}$$

由模拟值可以算出:

$$\underset{4,2}{A_{\mathrm{I}}}\underset{2,1}{X_{\mathrm{I}}}=[0.0\quad -10.7\quad 10.9\quad 21.6]^{\mathrm{T}} \tag{6a}$$

$$\underset{4,6}{A_{\mathrm{II}}}\underset{6,1}{X_{\mathrm{II}}}=[-0.9\quad 1.0\quad 0.3\quad 1.2]^{\mathrm{T}} \tag{6b}$$

比较可知,(6a)式中 $A_{\mathrm{I}}X_{\mathrm{I}}$ 的各元素与(3)式中的闭合差数值相近,两者之差即为(6b)式中的元素。式(6a)和式(6b)中的数值分别是 $A_{\mathrm{I}}X_{\mathrm{I}}$ 和 $A_{\mathrm{II}}X_{\mathrm{II}}$ 项的精确值,这表明,包含了所有 k 个粗差的 $A_{\mathrm{I}}X_{\mathrm{I}}$,其精确值是近似等于条件方程的闭合差。实际上,由于所有真误差(包括粗差)的大小未知,故 $A_{\mathrm{I}}X_{\mathrm{I}}$ 和 $A_{\mathrm{II}}X_{\mathrm{II}}$ 的精确值事实上是无法知道的,而目的是要对 k 个粗差进行定位和定值,基于此,如果我们能通过某种办法从原条件方程中正确地取出与 k 个粗差有关的 $A_{\mathrm{I}}X_{\mathrm{I}}$ 项,并且去掉与粗差无关的 $A_{\mathrm{II}}X_{\mathrm{II}}$ 项,同时用条件式已知的闭合差来代替 $A_{\mathrm{I}}X_{\mathrm{I}}$ 项未知的精确值,则有如下近似等式:

$$\underset{r,k}{A_{\mathrm{I}}}\underset{k,1}{X_{\mathrm{I}}}\doteq\underset{r,1}{f} \tag{7}$$

式(7)是含有 k 个未知数(粗差)的 r 个方程($k\leqslant r$),若 $\underset{r,k}{A_{\mathrm{I}}}$ 列满秩,则可按文献[1]中的(9)式求得 X_{I} 的最小二乘解为:

$$\underset{k,1}{\hat{X}_{\mathrm{I}}}=(A_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}A_{\mathrm{I}})^{-1}A_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}f \tag{8}$$

显然,此时解出的 $\underset{k,1}{\hat{X}_{\mathrm{I}}}$ 向量中的 k 个元素,其序号即为含有粗差的观测值序号(定位),其数值即为粗差的估值(定值)。例如,利用上面给定的数值可以算得:

$$A_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}A_{\mathrm{I}}=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix},\quad A_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}f=\begin{bmatrix}32.5\\34.0\end{bmatrix}$$

于是按(8)式可解得:

$$\hat{X}_{\mathrm{I}}=\begin{bmatrix}\hat{X}_5\\\hat{X}_8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}32.5\\34.0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10.33\\11.83\end{bmatrix}$$

上述粗差估值与其模拟值(真值)的差异分别为 0.37 mm和 -0.93 mm。根据大量试算表明,粗差估值与其模拟值(真值)之差一般都在随机误差量级之内。

按上述方法进行多维粗差的定位与定值,其特点和优点是:1)思路简单明了,方法简便有效;2)所有计算过程只涉及数值方程的解算,而无需考虑到观测值的精度,因此,对于粗差的定位定值而言,在实际计算中总是可以简单地取权阵为单位阵;3)由(8)式求得的粗差估值之所以不等于其模拟值(真值),主要是因为从(4)式中略去了 $A_{\mathrm{II}}X_{\mathrm{II}}$ 项,而与 X_{I} 中包含的粗差个数多少无关。由于 X_{II} 中包含的都是随机误差,其数值均较小且有正有负,相互抵消,故 $A_{\mathrm{II}}X_{\mathrm{II}}$ 项的数值相对于 $A_{\mathrm{I}}X_{\mathrm{I}}$ 项而言总是很小,因此,不论粗差个数是多少,由(8)式解得的粗差估值与其真值之差一般均能保持在随机误差量级之内。

由以上讨论可知,设在 n 维真误差向量中包含着 k 个($k\leqslant r$)粗差,那么利用条件平差模型(1)式进行 k 维粗差定位定值的实质就是:从原条件方程(3)中只保留与 k 个粗差有关的 k 列,而删去其余的列,然后由(8)式求得其最小二乘解。但事实上,我们事先既不知道在 n 个真误差中究竟有多少个粗差,也不知道哪几个 X_i 是粗差。因此,最关键的问题就是采取什么办法才能保证从原条件方程(3)中正确地取出与 k 个粗差有关的 $A_{\mathrm{I}}X_{\mathrm{I}}$ 项来。为此,仍然采用文献[1]中所提出的逐阶列组合搜索法,其具体步骤和做法,将在本文第 4部分结合改进的搜索方法一并予以介绍。

2　$RX=V$ 与 $AX=f$ 在粗差定位定值中的等效性

进行多维粗差同时定位定值之所以选择条件平差模型,就是因为该模型中的条件方程式直接显示了真误差向量 X 与闭合差向量 f 之间的线性函数关系,因而应用线性化后的条件方程式就可以直接进行粗差的定位与定值。在最小二乘平差中,除了条件平差模型外,还有间接平差、附有未知数的条件平差、附有条件的间接平差以及概括平差等模型。这些模型与条件平差模型不同之处就在于这些模型中都包含着个数不等的未知参数,如果仍将上节介绍的方法应用到这些模型上来进行粗差定位定值,则必须首先将这些模型中的所有参数消去,使得它们最后都归化成条件平差的模型,显然,这样做是不方便的。因此,利用条件平差模型进行粗差的定位定值,只适合于条件

平差的情况,这是该方法实用上存在的局限性。

在文献[1]中已经指出,应用 $RX = V$ 进行粗差定位与定值,可以适用于所有的平差模型。本节将证明 $RX = V$ 实际上就是 $AX = f$ 非退化的线性变换,对于多维粗差的同时定位定值而言,二者是完全等效的。

对于一 n 维观测向量,多余观测数为 r 的条件平差,其函数模型和随机模型分别为:

$$\underset{r,n}{A}\underset{n,1}{X} = \underset{r,1}{f} \tag{9a}$$

$$E(X) = 0,\ D(L) = D(X) = e_0^2 P^{-1} = e_0^2 Q \tag{9b}$$

在条件平差中,计算改正数向量 V 及其验后协因数阵 Q_V 的公式分别为[3,4]:

$$\underset{n,1}{V} = QA^{\mathrm{T}}N_{aa}^{-1}f \tag{10}$$

$$\underset{n,n}{Q_V} = QA^{\mathrm{T}}N_{aa}^{-1}AQ \quad (N_{aa} = AQA^{\mathrm{T}}) \tag{11}$$

根据最小二乘平差理论知,其误差向量与改正数向量之间存在着如下确定的严格等式[4,5]:

$$\underset{n,n}{R}\underset{n,1}{X} = \underset{n,1}{V} \tag{12a}$$

式中,

$$\underset{n,n}{R} = \underset{n,n}{Q_V}\underset{n,n}{P} \tag{12b}$$

将式(11)代入式(12b),则有:

$$R = QA^{\mathrm{T}}N_{aa}^{-1}A \tag{13}$$

顾及(10)式和(13)式,则可将(12a)式写成:

$$QA^{\mathrm{T}}N_{aa}^{-1}AX = QA^{\mathrm{T}}N_{aa}^{-1}f \tag{14}$$

现令 $S = QA^{\mathrm{T}}N_{aa}^{-1}$,则(14)式又可写成:

$$SAX = Sf \tag{15}$$

不难看出,上式实际上就是在(9a)式两端左乘 S 矩阵的结果,由此可知,(12a)式实际上就是条件方程(9a)在矩阵 S 作用下的一个线性变换。此外,因 $\mathrm{rank}(S) = \mathrm{rank}(QA^{\mathrm{T}}N_{aa}^{-1}) = \mathrm{rank}(A) = r$,这就进一步表明,$RX = V$ 不仅是条件方程 $AX = f$ 的线性变换,而且是非退化的线性变换。因此,$RX = V$ 中的所有方程都是 r 个独立条件式的一个线性组合。$RX = V$ 所含的关于真误差的信息完全等价于 $AX = f$ 所含的关于真误差的信息,所以,基于 $RX = V$ 进行粗差定位定值必等效于基于 $AX = f$ 进行粗差定位定值。在 LEGE法中[1],观测权阵 P 取值不同并不影响粗差定位定值结果的一致性,其原因就在于对应于新的权阵 P' 的 $R'X = V'$ 仍然是 $AX = f$ 非退化的线性变换,只不过变换矩阵成为 $S' = Q'A^{\mathrm{T}}N_{aa}^{-1}$ 而已。为了区别起见,我们称基于 $AX = f$ 的粗差定位定值方法为粗差的直接定位定值法(The Method for Locating and Evaluating Gross Errors Directly, LEGED法),称基于 $RX = V$ 的粗差定位定值方法为粗差的通用定位定值法(The Method for Locating and Evaluating Gross Errors Universally, LEGEU法)。

需要强调的是,方程 $RX = V$ 描述了平差后改正数向量 V 与真误差向量 X 之间存在的数值恒等关系,即任意给定一个向量 X 就必然存在一个与之对应的向量 V。因此,不论在向量 X 中是否存在粗差,也不论存在了多少个粗差,$RX = V$ 的恒等关系总是成立的。而 LEGE法正是巧妙地利用了这一性质而提出的。类似于上节所述,LEGE法的实质就是通过列组合搜索法找出包含全部粗差的 $R_{\mathrm{I}}X_{\mathrm{I}}$ 项,并求得其最小二乘解。估值 $\hat{X}_{\mathrm{I}}$ 之所以不等于其真值 X_{I},主要是由于忽略了数值相对较小的 $R_{\mathrm{II}}X_{\mathrm{II}}$ 项而引起的。如果认为改正数 V 是真误差 X 的估值,而再用真误差的估值来估计真误差的本身,故 LEGE法缺乏理论依据,显然,这种说法是由于没有考虑到方程 $RX = V$ 的性质的缘故。

3 LEGED法与 LEGEU 法的算例比较

LEGED法与 LEGEU 法的粗差定位定值搜索步骤完全一样,此处不再重复叙述(参阅文献[1])。但是,采用 LEGED法进行搜索时,为了提高数字计算的精度,采取了如下一些变化:

1) 在 $AX = f$ 中,为了使每个条件方程都能等量级地反映闭合差,须将 $AX = f$ 化为标准化条件方程 $\bar{A}X = \bar{f}$。关于条件式的标准化问题详见文献[2]。设用 a_{ij} 和 $\bar{a}_{ij}$ ($i = 1, 2, \cdots, r; j = 1, 2, \cdots, n$)分别表示系数阵 A 和 $\bar{A}$ 的元素,f_i 和 $\bar{f}_i$ ($i = 1, 2, \cdots, r$)分别表示闭合差向量 f 和 $\bar{f}$ 的元素。构建 $r \times n$ 的矩阵 C,用 c_{ij} ($i = 1, 2, \cdots, r; j = 1, 2, \cdots, n$)表示其元素。若 $a_{ij} \neq 0$,取 $c_{ij} = 1$;否则,取 $c_{ij} = 0$,因此,有下列标准化公式:

$$\begin{aligned} \bar{a}_{ij} &= a_{ij} \cdot \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \\ \bar{f}_i &= f_i \cdot \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \qquad i = 1, 2, \cdots, r \end{aligned} \tag{16}$$

2)判断是否存在 k 个粗差的指标 $d^{(k-1,k)}$ 的计算公式为[2]:

$$d^{(k-1,k)} = \sqrt{(\bar{f}^{(k-1)\mathrm{T}}\bar{f}^{(k-1)}) / (\bar{f}^{(k)\mathrm{T}}\bar{f}^{(k)})} \tag{17}$$

其中,$\bar{f}^{(k-1)}$ 和 $\bar{f}^{(k)}$ 为分别由 $(k-1)$阶保留解和 k 阶保留解修正原观测值后求得的标准化闭合差向量。

现对文献[1]中的测角网算例采用 LEGED法进行粗差定位定值搜索,并将搜索结果与 LEGEU 法的结果比较,搜索和比较结果如表 1 所示。表中,No.表示粗差的个数,N. X表示粗差

在真误差向量中的序号, $\hat{X}(\mathrm{I})$和 $\hat{X}(\mathrm{II})$分别表示 LEGED法和 LEGEU法的粗差定位定值结果, $\Delta X(\mathrm{I})$和$\Delta X(\mathrm{II})$分别表示两方法的粗差估值与粗差真值之差, $\Delta X(\mathrm{I},\mathrm{II})$表示两方法的粗差估值之差。

表 1　LEGED与 LEGEU法的粗差定位定值结果比较 (测角网) (/″)

Tab. 1　Comparison of the Results of Locating and Evaluating Gross Errors Computed by the LEGED and LEGEU (Triangulation Network)

No.	N. X	X	$\hat{X}(\mathrm{I})$	$\hat{X}(\mathrm{II})$	$\Delta X(\mathrm{I})$	$\Delta X(\mathrm{II})$	$\Delta X(\mathrm{I},\mathrm{II})$
1	2	12.6	10.31	10.67	2.29	1.93	−0.36
2	6	9.5	9.29	8.57	0.21	0.93	0.72
	10	−11.8	−10.31	−10.35	−1.49	−1.45	0.04
3	1	12.1	10.42	10.34	1.68	1.76	0.08
	7	10.3	14.08	14.16	−3.78	−3.86	−0.08
	9	−8.1	−7.73	−8.25	−0.37	0.15	0.52
4	1	−11.1	−9.96	−9.94	−1.14	−1.16	−0.02
	2	9.6	7.78	7.66	1.82	1.94	0.12
	9	10.9	12.35	12.60	−1.45	−1.70	−0.25
	10	−17.2	16.12	15.90	1.08	1.30	−0.22

由表 1中数据可知,在该测角网的算例中, LEGED法的粗差定位定值结果与 LEGEU法的粗差定位定值结果完全一致,即不仅粗差定位完全准确,而且粗差估值与粗差真值之差都在随机误差的量级之内。

4　搜索粗差的改进判断标准和计算步骤

建立判断粗差的公式的基本思想是:每当搜索到一个粗差,并且用它去修正原观测值后,再用修正后的观测向量重新进行平差计算,由此而求得的单位权中误差估值 $\hat{\sigma}_0$一定小于其修正前求得的估值。当搜索到所有的 k个粗差时,用它们去修正原观测值,并用修正后的观测向量进行平差计算,由于这时所有的粗差都已得到了改正,故由此算得的 $\hat{\sigma}_0$不仅比前一阶搜索中的 $\hat{\sigma}_0$要小,而且会突然地变小。根据大量的试算,给出了文献 [1]中的判断标准,这些标准的特点是着眼于前后两次搜索中 $\hat{\sigma}_0$的比值。

在文献 [1]中就曾指出,如果某些观测值含有大于 3倍中误差 ($3\sigma_0$)的真误差,则称这些真误差为“粗差”。因此粗差具有相对的意义,它是相对于观测精度而言的。事实上,粗差的定位与定值总是针对某一具体测量工程的观测成果来进行的。若该测量成果是属于某一等级的水准网或其它类型的测量网,那么根据现行规范或以往同类测量工作的经验,就不难对这一等级的成果规定出一个合理的误差界限,凡误差大于此界限值的则认为它是粗差。例如,在前面所举的例子中,若根据其具体情况,应规定绝对值大于 5 mm的误差即为“粗差”,那么,搜索的结果, X_5和 X_8是粗差,因为它们的估值均超过了 5 mm。即使规定的界限值稍有变动,搜索的结论仍不会改变。可见,对粗差的搜索标准在一定范围内稍有变动,并不会过多地影响搜索的结果,问题在于所规定的限值是否符合该测量成果的实际精度。再如,如果规定的界限值为 15 mm,那么,搜索的结果将是没有粗差。假设在某次粗差定位定值中事先给定的误差限值为 X_{lim},则粗差的搜索计算与判断步骤应为:

1) 选定一平差函数模型,取观测权阵 $P= I$,根据原观测向量计算 R和 $V^{(0)}$。其中, $V^{(0)}$的上标 (0)表示 V是由原观测向量平差计算而得。

2) 进行 1阶搜索。从 n个 1阶解中确定出 1阶保留解 $\hat{X}_1^{(1)}$[1])。若$|\hat{X}_1^{(1)}|\leqslant|X_{lim}|$,则认为原观测向量中不存在粗差,搜索到此结束;若$|\hat{X}_1^{(1)}|>|X_{lim}|$,则认为 $\hat{X}_1^{(1)}$所对应的真误差为粗差,继续 2阶搜索。

3) 保留 1阶保留解所确定的粗差序号,进行 2阶搜索。从 $(n-1)$个 2阶解中确定出 2阶保留解 $\hat{X}^{(2)}$ (设 $\hat{X}^{(2)}=[\hat{X}_1^{(2)}\ \hat{X}_2^{(2)}]^{\mathrm{T}}$)。若$|\hat{X}_2^{(2)}|\leqslant|X_{lim}|$,则认为原观测向量中只存在 1个粗差, 1阶保留解即为粗差解,搜索到此结束;若$|\hat{X}_2^{(2)}|>|X_{lim}|$,则认为 $\hat{X}^{(2)}$所对应的真误差均为粗差,继续向 3阶搜索。

4) 类似地,保留 $(i-1)$阶保留解所确定的粗差序号,进行 i阶搜索 ($i\leqslant r-1$)。从 $(n-(i-1))$个 i阶解中确定出 i阶保留解 $\hat{X}^{(i)}$ (设 $\hat{X}^{(i)}=[\hat{X}_1^{(i)}\ \hat{X}_2^{(i)}\ \cdots\ \hat{X}_i^{(i)}]^{\mathrm{T}}$)。若$|\hat{X}_i^{(i)}|\leqslant|X_{lim}|$,则认为原观测向量中只存在 $(i-1)$个粗差, $(i-1)$阶保留解即为粗差解,搜索到此结束;若$|\hat{X}_i^{(i)}|>|X_{lim}|$,则认为 $\hat{X}^{(i)}$所对应的真误差均为粗差,继续向 $(i+1)$阶搜索 ($i+1\leqslant r-1$)。

例如,图 2为一边角网,角度观测数 $n_T=14$,边长观测数 $n_s=5$,即观测总数 $n=n_T+n_s=19$,必要观测数 $t=6\times2-3=9$,多余观测数 $r=n-t=10$。根据以往的同类测量知这种测量网的角度误差应不大于 1.5",故取 $X_{lim}=1.5$。现分别对该边角网模拟 1个、2个、3个、4个粗差,这些数据均列于表 2。其中,角度真值的单位为度、分、秒,边长真值的单位为 cm,角度真误差的单位为 s,边长真误差的单位为 cm。

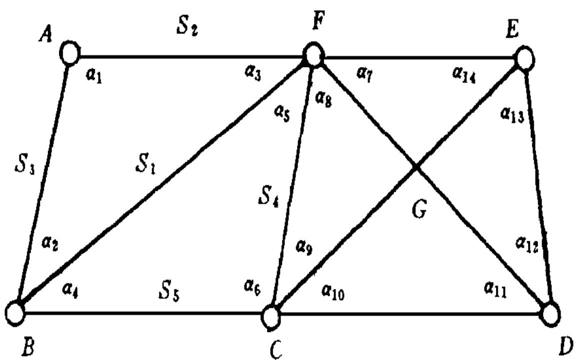

图 2 边角网

Fig. 2 Triangulateration Network

从 LEGEU法模型出发,根据上述粗差定位定值搜索计算步骤对模拟的 4组观测分别进行搜索,其结果均列于表 3。其中,N. X表示各阶保留解元素的序号,$\hat{X}$表示各阶保留解的数值(序号为 1~14的解元素的单位为 s,序号为 15~19的解元素的单位为 cm),$|\hat{X}|>|X_{lim}|$表示各阶保留解的数值是否大于$|X_{lim}|$(即判断对应的真误差是否为粗差,$|X_{lim}|=1.5$)。

表 2 边角网的模拟观测数据

Tab. 2 The Simulated Observations of a Triangulateration Network

类别	序号	观测	真值 ° ′ ″	观测真误差			
				1个粗差	2个粗差	3个粗差	4个粗差
角度	1	T_1	129 07 00.7	0.2	0.2	0.2	0.2
	2	T_2	23 28 50.1	0.3	0.3	-2.3	2.3
	3	T_3	27 24 09.2	0.5	2.5	0.5	0.5
	4	T_4	23 31 29.3	0.1	0.1	0.1	0.1
	5	T_5	25 02 18.9	-0.3	-0.3	-0.3	-5.3
	6	T_6	131 26 11.8	-0.1	-0.1	-0.1	-0.1
	7	T_7	65 52 35.3	1.7	0.2	0.2	0.2
	8	T_8	63 14 25.2	0.4	0.4	0.4	0.4
	9	T_9	23 28 51.3	0	0	0	0
	10	T_{10}	23 31 28.6	-0.7	-1.7	-0.7	-0.7
	11	T_{11}	69 45 14.9	0.1	0.1	1.8	0.1
	12	T_{12}	61 40 56.9	-0.4	-0.4	-0.4	-1.6
	13	T_{13}	25 02 19.6	0.3	0.3	0.3	0.3
	14	T_{14}	27 24 08.2	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5
边长	15	S_1	264 051.1	-0.2	-0.2	-0.2	-0.2
	16	S_2	135 601.7	0.3	0.3	0.3	0.3
	17	S_3	156 634.7	0.4	0.4	5.4	0.4
	18	S_4	140 585.0	-1.0	-1.0	-1.0	-4.2
	19	S_5	149 067.2	-0.2	-0.2	-0.2	-0.2

由表 3可知,在模拟了 1个粗差的 2阶保留解中,有$|\hat{X}_8|\leqslant|X_{lim}|$成立,所以认为观测向量中只存在 1个粗差,1阶保留解即为粗差解,即 $\hat{X}=1.65''$。同理,在模拟了 2个粗差的搜索结果中,判断认为观测向量中存在 2个粗差,粗差解为 $\hat{X}=2.49''$,$\hat{X}_{10}=-1.84''$;在模拟了 3个粗差的搜索结果中,判断认为观测向量中存在 3个粗差,粗差解为 $\hat{X}_{17}=5.76$ cm,$\hat{X}_2=-2.46''$,$\hat{X}_{11}=1.52''$;在模拟了 4个粗差的搜索结果中,判断认为观测向量中存在 4个粗差,粗差解为 $\hat{X}_5=-5.19''$,$\hat{X}_{18}=-4.47$ cm,$\hat{X}_2=2.37''$,$\hat{X}_{12}=-1.93''$。

该例表明,在误差界限值 X_{lim}给定的情况下,LEGEU法(或 LEGED法)的粗差定位定值搜索计算和判断过程可大为简化,且不失其准确和有效性。

顺便指出,在根据 LEGED法或 LEGEU法对粗差进行定位定值搜索时,若控制网含有不同类型的观测量,应注意选取合适的观测量的单位,

从而使粗差定位定值模型中与不同类型观测量的真误差对应的系数保持在同一数量级。否则 ,粗差将不能被客观地反映在模型中 ,因而会影响粗差定位定值的有效性和准确性。

表 3　边角网多维粗差的定位定值结果 ($e_0 = \pm 0.5$)

Tab. 3　The Results of Locating and Evaluating Multidimensional Gross Errors of the Triangulateration Network

解的阶数	1个粗差			2个粗差			3个粗差			4个粗差		
	N.X	$\hat{X}$	$\lvert\hat{X}\rvert > \lvert 3e_0\rvert$	N.X	$\hat{X}$	$\lvert\hat{X}\rvert > \lvert 3e_0\rvert$	N.X	$\hat{X}$	$\lvert\hat{X}\rvert > \lvert 3e_0\rvert$	N.X	$\hat{X}$	$\lvert\hat{X}\rvert > \lvert 3e_0\rvert$
1	7	1.65	粗差	3	2.49	粗差	17	4.83	粗差	5	−6.44	粗差
2	7	1.65	粗差	3	2.49	粗差	17	5.76	粗差	5	−5.21	粗差
	18	−1.34	非粗差	10	−1.84	粗差	2	−2.46	粗差	18	−4.42	粗差
3				3	2.52	粗差	17	5.76	粗差	5	−5.19	粗差
				10	−1.84	粗差	2	−2.46	粗差	18	−4.47	粗差
				18	−1.36	非粗差	11	1.52	粗差	2	2.37	粗差
4							17	5.39	粗　差	5	−5.19	粗　差
							2	−2.34	粗　差	18	−4.47	粗　差
							11	1.52	粗　差	2	2.37	粗　差
							18	−1.24	非粗差	12	−1.93	粗　差
5										5	−5.30	粗　差
										18	−4.16	粗　差
										2	2.82	粗　差
										12	−1.93	粗　差
										16	1.13	非粗差

应注意的是 ,在多维粗差的定位定值搜索中 ,有时会出现粗差的等价解。该解并非包含了所有真正的粗差 ,但其对条件方程闭合差的贡献等效于所有真正的粗差对条件方程闭合差的贡献。是否存在粗差的等价解取决于粗差的个数及其在控制网中的分布情况 ,具有等价解的粗差称为图相关粗差。有关图相关粗差的问题 ,笔者将另文讨论。

参　考　文　献

1　於宗俦 ,李明峰 .多维粗差的同时定位与定值 .武汉测绘科技大学学报 , 1996, 21(4): 323～ 329

2　李明峰 .动态平差概括模型及形变与粗差的定位定值方法: [学位论文].武汉: 武汉测绘科技大学 , 1996

3　於宗俦 ,于正林 .测量平差原理 .武汉: 武汉测绘科技大学出版社 , 1990

4　黄维彬 .近代平差理论及其应用 .北京: 解放军出版社 , 1992

5　晁定波 ,薄志鹏 .现代大地控制网优化设计理论 ,武汉: 武汉测绘科技大学出版社 , 1991

A Further Discussion on the Nature of the LEGE Method and Its Improved Searching Method

Yu Zongchou　Li Mingfeng

(School of Geo-science and Surveying Engineering, WTUSM, 129 Luoyu Road, Wuhan, China, 430079)

Abstract　In this paper, a further discussion on the LEGE method is given. It is proved that $R\hat{X}= V$ is the non-degenerate linear transformation of $A\hat{X}= f$, and the results of locating and evaluating gross errors are the same both in terms of $A\hat{X}= f$ and in terms of $R\hat{X}= V$. In addition, the improved searching method for locating and evaluating gross errors is presented.

Key words　gross error; location and evaluation; search