DOI: 10.13203/j.whugis1997.03.010

第 22卷第 3期 武汉测绘科技大学学报 Vol. 22 No. 3
1997年 9月 Journal of Wuhan Technical University of Surveying and Mapping Sept. 1997

卡尔曼滤波可靠性分析及其在动态 GPS定位中的应用

柳响林　刘经南　杜道生

(武汉测绘科技大学地学测量工程学院,武汉市珞喻路 39号, 430070)

摘　要　从预测残差入手,通过假设检验,给出了卡尔曼滤波内外可靠性量度,并将其和模型偏差分离估计递推公式引入 GPS动态定位之中。通过对 WADGPS用户站的动态数据处理得到了一些结论。

关键词　卡尔曼滤波;预报残差;可靠性分析;模型偏差分离估计

分类号　P207.2; P228.4

1 卡尔曼滤波方程

GPS动态定位中,卡尔曼滤波常用离散化模型来描述系统。设系统状态方程和量测方程分别为:

$$X_k = \Phi_{k,k-1}X_{k-1} + \Gamma_{k-1}W_{k-1} \tag{1}$$

$$Z_k = H_kX_k + V_k \tag{2}$$

式中,X_k为 k时刻的 n维状态矢量,也是被估计矢量;Z_k为 k时刻上 m维量测矢量;$\Phi_{k,k-1}$为 $k-1$到 k时刻的系统一步转移矩阵($n\times n$);W_{k-1}为 $k-1$时刻的系统噪声(r维);Γ_{k-1}为系统噪声矩阵($n\times r$),它表征由 $k-1$到 k时刻的各个状态的程度;H_k为 k时刻的量测矩阵($m\times n$阶);V_k为 k时刻的 m维量测噪声。卡尔曼滤波要求$\{W_k\}$和$\{V_k\}$是互不相关的零均值的白噪声序列,有:

$$E\{W_kW_j^{\mathrm{T}}\} = Q_k\delta_{kj} \tag{3}$$

$$E\{V_kV_j^{\mathrm{T}}\} = R_k\delta_{kj} \tag{4}$$

Q_k和 R_k分别称为系统噪声和量测噪声的方差矩阵,在卡尔曼滤波中它们分别是已知值的非负定阵和正定阵;δ_{kj}是 Kronecker δ函数,即

$$\delta_{kj} = \begin{cases} 0 & (k\neq j) \\ 1 & (k=j) \end{cases} \tag{5}$$

初始状态的一、二阶统计特性为:

$$E\{X_0\} = m_{x_0},\quad \mathrm{var}\{X_0\} = C_{x_0} \tag{6}$$

卡尔曼滤波要求 m_{x_0}和 C_{x_0}为已知量,且要求 X_0与 W_k以及 V_k都不相关。

Kalman于 1960年给出了卡尔曼滤波方程

状态一步预测方程为:

$$\hat{X}_{k/k-1} = \Phi_{k,k-1}\hat{X}_{k-1} \tag{7}$$

状态估值计算方程为:

$$\hat{X}_k = \hat{X}_{k/k-1} + K_k(Z_k - H_k\hat{X}_{k/k-1}) \tag{8}$$

滤波增益方程为:

$$K_k = P_{k/k-1}H_k^{\mathrm{T}}(H_kP_{k/k-1}H_k^{\mathrm{T}} + R_k)^{-1} \tag{9}$$

一步预测均方误差方程为:

$$P_{k/k-1} = \Phi_{k,k-1}P_{k-1}\Phi_{k,k-1}^{\mathrm{T}} + \Gamma_{k-1}Q_{k-1}\Gamma_{k-1}^{\mathrm{T}} \tag{10}$$

估计均方误差方程:

$$P_k = (I - K_kH_k)P_{k/k-1}(I - K_kH_k)^{\mathrm{T}} + K_kP_kK_k^T \tag{11}$$

或

$$P_k = (I - K_kH_k)P_{k/k-1} \tag{12}$$

令 $r_k = Z_k - H_k\hat{X}_{k/k-1}$,它被称为预测残差。其方差矩阵

$$Q_{r_k} = H_kP_{k/k-1}H_k^{\mathrm{T}} + R_k \tag{13}$$

2 顾及偏差的卡尔曼滤波方程

卡尔曼滤波递推公式,其结果具有无偏性和方差最小性。但它要求系统噪声和量测噪声是零均值白噪声,同时要求状态方程能够比较准确地反映研究对象的运动状况。实际上,这些条件是难以完全满足的。例如,GPS伪距观测值作为滤波方程的量测值时,电离层、对流层折射误差、钟漂钟频误差等作为量测噪声就不是零均值的白噪声;GPS相位观测数据作为量测值时,周跳、初始整周模糊度解算误差都会使量测方程产生偏差;同时当用匀速或匀加速的运动模型来模拟研究对象的运动状况时,也不能完全地反映其真实的运

收稿日期: 1997-06-09.柳响林,男,29岁,硕士,现从事测量数据处理理论与应用研究。

* 测绘遥感信息工程国家重点实验室开放研究基金资助项目。

动情况，也就是说，状态方程存在着模型偏差。卡尔曼滤波的可靠性分析就是要通过某种方法指明在一定的可能性下滤波的最小模型偏差及分析不可指明的模型偏差对状态估计的影响。

为模拟函数模型和随机模型中的偏差，可以给出顾及偏差的卡尔曼滤波方程：

$$X_k = \Phi_{k,k-1}X_{k-1} + B_k b + \Gamma_{k-1}W_{k-1}$$

$$W_k \sim N(0, Q_k) \qquad (14)$$

$$Z_k = H_k X_k + C_k b + V_k$$

$$V_k \sim N(0, R_k) \qquad (15)$$

式中，B_k、C_k 分别表示偏差向量 b 对状态方程和量测方程的影响。若仅量测向量中含有偏差，则 $B_k = 0$；若仅状态方程中含有偏差，则 $C_k = 0$；若模型中无偏差，则 $B_k = C_k = 0$，即为无偏差的卡尔曼滤波方程。噪声 W_k 和 V_k 的统计性质不变。若 W_k 和 V_k 是有色噪声，也可以分离成一个偏差和一个零均值白噪声之和，同样可以归结为上式。

由于卡尔曼滤波状态估值是线性的，偏差对滤波估值和预测残差的影响也是呈线性的（Frieland, 1969; Ignagni, 1981），故有下式：

$$\tilde{X}_{k/k-1} = \hat{X}_{k/k-1} + U_k b \qquad (16)$$

$$\tilde{X}_k = \hat{X}_k + G_k b \qquad (17)$$

$$\tilde{r}_k = r_k + S_k b \qquad (18)$$

式中，$\tilde{X}_{k/k-1}$、$\tilde{X}_k$、$\tilde{r}_k$ 分别表示带有偏差模型的预测状态值、滤波状态值和预测残差；$\hat{X}_{k/k-1}$、$\hat{X}_k$、r_k 分别表示不带偏差模型的预测状态值、滤波值和预测残差；U_k、G_k、S_k 为敏感矩阵。

尽管常规卡尔曼滤波算法亦可用来估计 X_k 和 b，但是它要求将 b 增广为状态，然后对增广后的状态进行估计，但它增加了状态向量的维数，势必增加计算量和计算时间。这里采用一种偏差分离估计方法直接对状态 X_k 和偏差 b 进行估计。具体做法是当系统不存在模型偏差时，仅采用不顾及模型偏差的卡尔曼滤波方程；当存在模型偏差时，同时对偏差进行估计，然后用偏差的估计值修正不顾及偏差模型的状态估计值，得到状态的最优估计值。由于不存在状态增广，因而该方法计算效率高，数值性好。其不顾及偏差模型的滤波方程如式（7）～（12），其偏差估计器为：

$$\hat{b}_{k/k-1} = \hat{b}_{k-1/k-1} \quad (\hat{b}_{0/0} = 0) \qquad (19)$$

$$P_{b_{k/k-1}} = P_{b_{k/k-1}} \quad (P_{0/0}\text{预先给定}) \qquad (20)$$

$$\hat{b}_{k/k} = \hat{b}_{k/k-1} + [S_k^{\mathrm{T}} Q_{r_k}^{-1} S_k + P_{b_{k/k-1}}^{-1}]^{-1}$$

$$S_k^{\mathrm{T}} Q_{r_k}^{-1}(r_k - S_k \hat{b}_{k/k-1}) \qquad (21)$$

$$P_{b_{k/k}} = [S_k^{\mathrm{T}} Q_{r_k}^{-1} S_k + P_{k/k-1}^{-1}]^{-1} \qquad (22)$$

$$U_k = \Phi_{k/k-1} G_{k-1} + B_k \qquad (23)$$

$$S_k = H_k U_k + C_k \qquad (24)$$

$$G_k = U_k - K_k S_k \qquad (25)$$

当时刻 k 出现偏差时，取 $G_{k-1} = 0$，开始递推计算 U_k、G_k、S_k；并令 $\hat{b}_{k-1/k-1} = 0$，$P_{b_{k-1/k-1}} = 0$，执行上述递推公式。若经过一段无偏差的滤波后，再次出现偏差时，重新启动上述偏差估计器。

将递推计算而得的 b 代入式（16）、（17），即可得到顾及偏差的卡尔曼滤波最优状态估值。

3　模型偏差假设检验及可靠性分析

上述所谓偏差分离估计方法遗留下如何确定 B_k、C_k 矩阵的问题，原则上只有对偏差出现机理和影响特点了如指掌才能确定，而这几乎是不可能的。探明卡尔曼滤波在什么时候有偏差出现成为解决偏差估计的关键，解决这个问题同时也给可靠性分析找到了切入点。

传统控制网利用改正数构建相应的统计检验量来探测观测值中是否含有粗差。卡尔曼滤波可以通过预测残差来构建统计量探测系统是否含有模型偏差，是因为预测残差是量测值 Z_k 和 $\hat{X}_{k/k-1}$ 之间的关系式，假设 k 时刻以前没有模型偏差出现，则由先验信息递推而得的 $\hat{X}_{k/k-1}$ 就是无偏的。Z_k 是 k 时刻的量测值，如果 k 时刻出现模型偏差就会在 r_k 上有所反映，利用 r_k 构建统计量可以检验模型偏差是否出现。

探明模型偏差的出现实际上是两次模型偏差定位问题。一次是判定偏差在什么时刻出现，查出某一时刻有模型偏差时，还需断定该时刻哪个量测值上有偏差。因此，需要应用两次假设检验过程。

第一次假设检验：

$$H_0: E\{r_k\} = 0, E\{r_k r_k^{\mathrm{T}}\} = Q_{r_k} \qquad (26)$$

$$H_1: E\{r_k\} = S_k b;$$

$$E\{(r_k - S_k b)(r_k - S_k b)^{\mathrm{T}}\} = Q_{r_k} \qquad (27)$$

由极大似然估计可以推导出偏差检测函数：

$$T_G = r_k^{\mathrm{T}} Q_{r_k}^{-1} r_k \qquad (28)$$

由于 r_k 是高斯随机向量，故 T_G 服从 χ^2 分布，根据 χ^2 分布的定义，可以得到：

$$H_0: T_G \sim \chi^2(m_k, 0) \qquad (29)$$

$$H_1: T_G \sim \chi^2(m_k, \lambda) \qquad (30)$$

式中，m_k 为 χ^2 分布的自由度；其大小等于该时刻观测值的个数，λ 为非中心参数。

$$\lambda = b^{\mathrm{T}}(S_k^{\mathrm{T}} Q_{r_k}^{-1} S_k) b \qquad (31)$$

当 $T_G \leqslant \chi^2_{\mathrm{T}}(m_k, 0)$ 时，则接受 H_0，即系统无偏

差;否则,拒绝 H_0,接受 H_T,即在给定的显著性水平 T下,函数模型中存在确定的偏差向量。

探明 k时刻有偏差后,还要对 k时刻各个观测值上可能的偏差进行检测,其局部一维定位检验统计量:

$$H_0: T_g = (S_i^{\mathrm{T}} Q_{r_i}^{-1} r_i)^2 / S_i^{\mathrm{T}} Q_{r_i}^{-1} S_i \sim \chi^2(1, 0) \tag{32}$$

此时,应令 $C_k^i = (\underset{1}{0}, 0, \cdots, 0, \underset{i}{1}, 0, \cdots, \underset{m_k}{0})^{\mathrm{T}}$,动态 GPS定位采样率足够大时,状态方程可以近似认为没有模型偏差,令 $B_k = 0$,仅讨论量测值中有偏差的情况。(32)式实际上是第二次假设检验。

检验统计量从每一个候选的一维备选假设中计算出来,T_g 最大的备选假设被认为最有可能存在偏差。如果 $T_g \geqslant \chi_T^2(1, 0)$,模型偏差在置信水平 (1- T)下被认为存在。确定了偏差的位置后,即可用前述偏差估计器对偏差进行估计。

由(31)式知,非中心参数 $\lambda_0 = b^{\mathrm{T}}(S_k^{\mathrm{T}} Q_{r_k}^{-1} S_k)b$ 在给定显著水平 T_0和检验功效 r_0情况下,能够从下列函数中计算出来:

$$\lambda_0 = \lambda(T = T_0, d = 1, r = r_0) \tag{33}$$

这里,d为自由度个数。(31)式可转化为:

$$b = \sqrt{\lambda_0 / (S_k^{\mathrm{T}} Q_{r_k}^{-1} S_k)} \tag{34}$$

这就是在某一确定的置信水平 T_0和检验功效 r_0下,通过统计量 T_g 能够探测到的最小模型偏差 MDB,即内部可靠性。(34)式中 S_k 是一个由定位矩阵得到的敏感矩阵,它只能确定模型偏差的位置而不影响其大小。MDB的大小由 Q_{r_k}决定,Q_{r_k}愈大,MDB愈大。而实际上 Q_{r_k}又主要与系统噪声方差 Q_k、量测噪声方差 R_k 及 H_k(对于 GPS定位来说,主要反映卫星几何图形强度)有关,因此,假设检验检测偏差的能力取决于观测精度、卫星几何强度因子和系统噪声的大小。

当统计检验参数置信度 $T_0 = 0.1\%$,检验功率 $r_0 = 80\%$时,$\lambda_0 = 4.13$,这时计算出的 MDB是在所选的 Q、R下近似于量测误差的 3倍中误差。内部可靠性分析是在动态定位的设计阶段进行的,根据 Q_k、R_k 与 MDB的关系,可以设计不同的定位和滤波方案,从而指导 GPS定位的数据采集和处理,这是可靠性分析的重要意义。

外部可靠性是指不可探测的模型偏差对平差结果的影响。很明显,在很多情况下,未知模型偏差不可能在某一确定的可能性下完全由统计量 T_g 所定位。不同的未被探明的模型偏差对平差结果有不同的影响。

从(17)式可以看出,未被探明的偏差 b对 $\hat{X}_k$ 的影响为:

$$\nabla_{\hat{X}_k} = G \cdot b \tag{35}$$

经常是研究分析 $\nabla_{\hat{X}_k}$ 的显著性而不是偏差向量 $\nabla_{\hat{X}_k}$ 本身,其显著性量度即是偏差对噪声比 (BNR),(Salzmann, 1993)。

$$\lambda_{\hat{X}} = \nabla_{\hat{X}_k}^{\mathrm{T}} P_k^{-1} \nabla_{\hat{X}_k} \tag{36}$$

通常,还要考虑未知模型偏差对特殊状态函数的影响,在这种情况下,用矩阵 F^{T} 来表示这些线性函数,BNR与这些函数有下列关系:

$$\lambda_{F^{\mathrm{T}}\hat{X}} = (F^{\mathrm{T}} \nabla_{\hat{X}_k})^{\mathrm{T}} (F^{\mathrm{T}} P_k F)^{-1} (F^{\mathrm{T}} \nabla_{\hat{X}_k}) \tag{37}$$

容易看出,式(36)实际上是式(37)在 F^{T} 为单位矩阵时的特例。

实际上,模型偏差也有可能被错误检测和估计,这对平差结果和未知函数也是影响外部可靠性的一个方面。

4 算例与结论

作者根据上述理论编制了一套包括两次假设检验、偏差分离估计及常规无偏估计的卡尔曼滤波器,并对 1996年武汉测绘科技大学会同国家测绘局有关单位进行的分布式广域差分 GPS实验后的用户站数据进行了处理。作者在观测数据中有意加入或大或小的偏差来检验偏差分离估计算法和可靠性理论,取得良好的效果,得到如下结论:

1)运用预报残差构建统计量对于探测卡尔曼滤波模型偏差是灵敏和有效的,它可以作为可靠性分析的切入点。

2)偏差分离估计算法在假设检验给定的概率下对超过 MDB的模型偏差的消除是良好的。但对小于 MDB的连续小偏差缺少消除方法,有可能被假设检验错误地检验。

3)通过内、外可靠性和预报残差稳定性的分析可以对系统噪声方差矩阵 Q_k 和量测噪声方差阵 R_k 进行设计,从而对 GPS动态定位方案和滤波方差进行设计。这正是可靠性分析意义之所在。

参 考 文 献

1 Jin X X. A Recursive Procedure for Computation and Quality Control of GPS Differential Corrections. Poblications of the Delft Geodetic Computing Centre, 1995(8)

2 Lu G, Lachapelle G. Statistical Quality Control for Kinematic GPS Positioning. Manuscripta Geodaetica, 1992(17): 270~ 281

(下转第 244页)

2 游素亚,徐光佑.立体视觉研究的发展与现状.中国图像图形学报, 1997, 2 (1): 17~ 25

Change Detection Based on Aerial Image of Urban Area

Fang Zhen　Zhang Jianqing　Zhang Zuxun

(National Laboratory for Information Engineering in Surveying, Mapping and Remote Sensing, WTUSM, 39 Luoyu Road, Wuhan, China, 430070)

Abstract　This paper presents a new approach to detecting man-made object changes in urban area. This approach is more automatic, precise and reliable than the conventional change detection approach, which were mainly used for the analysis of space-borne remote sensing image. The experiment results indicate the effectiveness and reliability of the approach.

Key words　change detection; image macthing; feature extraction

(上接第 236页)

3 袁 信,俞济祥,陈 哲.导航系统.北京:航空工业出版社, 1993.

4 柳响林.卡尔曼滤波质量控制及其在 GPS动态定位中的应用:[学位论文].武汉:武汉测绘科技大学, 1997

5 董绪荣. SINS/GPS组合系统数据处理的质量控制方法研究.郑州测绘学院学报, 1994(4)

Reliability Analysis for Kalman Filtering and Its Application in Kinematic GPS Positioning

Liu Xianglin　Liu Jingnan　Du Daosheng

(School of Geo-science and Surveying Engineering, WTUSM, 39 Luoyu Road, Wuhan, China, 430070)

Abstract　Based on the test of hypothesis, inner and outer reliability are given from the predicted residuals of Kalman filtering. In the meanwhile, the departing estimation algorithm of model biases is also presented. A software performing the algorithm is developed to test the moving vehicles data of WAPGPS. Some conclusions in processing the dynamic data of WADGPS are obtained.

Key words　Kalman filtering; predicted residual; reliability analysis; the departing estimation algorithm of model biases