DOI: 10.13203/j.whugis1997.01.020

第 22卷 第 1期 1997年 3月 | 武汉测绘科技大学学报 Journal of Wuhan Technical University of Surveying and Mappng | Vol. 22 No. 1 March 1997

Banach 空间中二阶微分包含的解

刘丁酉 胡新启

(武汉测绘科技大学基础课部,武汉市珞喻路 39号, 430070)

摘 要 本文给出了弱序列完备 Banach空间中二阶微分包含的解的存在性定理,推广了文献 [1]中结果到集值情形。同时,由于利用已有的定理[2],简化了类似文献 [1]中的证明。

关键词 弱序列完备 Banach空间;二阶微分包含

分类号 O 177

文献 [1]利用半序方法研究了 Banach空间二阶常微分方程两点边值问题

$$\begin{cases} -u''=f(t,u(t),u(t)) & t\in I=[0,1] \\ u(0)=u(1)=\theta \end{cases}$$

的解的存在唯一性问题,文献 [2]利用全序极小锥[3]及部分序线性系统中的有关概念和性质讨论了弱序列完备 Banach空间一阶微分包含初值问题与周期边值问题的解的存在性条件,本文利用 [2]中结论讨论了 Banach空间中二阶微分包含

$$\begin{cases} -u''\in F(t,u(t),u(t)) & t\in I \\ u(0)=u(1)=\theta \end{cases} \tag{1}$$

的解的存在性。首先给出一些预备知识,有关微分包含和锥的知识见 [4]、[5]。

设 E 是 Banach空间, $I=[0,1]$, $\|\circ\|$ 是 E 中范数, $C(I,E)=\{u(t): I\to E \mid u(t)$ 连续$\}$, $C^2(I,E)=\{u(t): I\to E\mid u(t)$ 二阶连续可微$\}$,对 $u=u(t)\in C(I,E)$,令

$$\|u\|_c=\max_{t\in I}\|u(t)\|$$

易知 $C(I,E)$ 在 $\|\circ\|_c$ 下构成一 Banach空间。

设 P 是 E 中锥,对 $u=u(t), v=v(t)\in C(I,E)$,若对任意 $t\in I$, $u(t)\leqslant v(t)$,记 $u\leqslant v$,因此可导出 $C(I,E)$ 中半序。为简洁起见,在不引起混淆的情况下,把 $C(I,E)$ 中元 $u(t)$、$v(t)$ 等略去自变量不写,简记为 u、v 等。

记 E^* 为 E 的共轭空间, P^* 为 P 的共轭锥,即

$$p^*=\{h\in E^*\mid h(x)\geqslant 0, \forall x\in P\}$$

引理 1[2] 如 Banach空间 E 是弱序列完备的, P 是 E 中正规锥, $u_0, v_0\in E$, $u_0\leqslant v_0$, $T: [u_0,v_0]\times[u_0,v_0]\to 2^{[u_0,v_0]}$ 是集值混合单调算子,则算子 T 在 $[u_0,v_0]$ 中存在耦合不动点。

引理 2[3] 如 Banach空间 E 是弱序列完备的, P 是 E 中锥,则 P 正规等价于 P 是全序极小锥,也等价于 P 正则。

定理 设 E 是弱序列完备的 Banach空间, P 是 E 中正规锥, $F: I\times E\times E\to 2^E$, $\forall u_t\in F(t,u,v)$ $(\forall t\in I)$ 可积,考查 Banach空间 E 中二阶微分包含 (1),若存在 $v_0, w_0\in C^2[I,E]$, $v_0\leqslant w_0$,记 $[v_0,w_0]=\{u\in C[I,E]\mid v_0\leqslant u\leqslant w_0\}$,设下面假设成立:

(H1) $\exists M>0$,使得对 $\forall x_1,x_2,y\in[v_0,w_0]$, $x_1\leqslant x_2$, $\forall u_1\in F(t,x_1,y)$, $\forall u_2\in F(t,x_2,y)$,有:

$$u_2-u_1\geqslant -M(x_2-x_1)$$

(H2) 存在常数 $L, M>L\geqslant 0$,使得对任意 x, $\forall y_1,y_2\in[v_0,w_0]$, $y_1\leqslant y_2$, $\forall v_1\in F(t,x,y_1)$, $\forall v_2\in F(t,x,y_2)$,有:

$$v_1-v_2\geqslant -L(y_2-y_1)$$

(H3) 存在常数 $K, M>K>L$,使得对任意 $x,y\in[v_0,w_0]$, $x\leqslant y$, $\forall u\in F(t,x,y)$, $\forall v\in F(t,y,x)$,有:

$$u-v\geqslant (K+L)(y-x)$$

(H4) 对 $\forall u_F\in F(t,v_0,w_0)$, $\forall v_F\in F(t,w_0,v_0)$,有:

$$-v_0''+L(w_0-v_0)\leqslant u_F, v_0(0)\geqslant v_0(1)=\theta$$

$$-w_0''-L(w_0-v_0)\geqslant v_F, w_0(0)\leqslant w_0(1)=\theta$$

则微分包含 (1)式在 $[v_0,w_0]$ 中存在解。

证明 对任意 $h_1, h_2\in[v_0,w_0]$,直接验证知:

$$h(t)=t\int_0^1 dr\int_0^r u_F(s)ds-Mt\int_0^1 dr\int_0^r(h(s)-h_1(s))ds+Lt\int_0^1 dr\int_0^r(h(s)-h_2(s))ds-$$

收稿日期: 1996-06-03.刘丁酉,男, 39岁,副教授,现从事非线性分析与鞅论的研究。

$$\int_0^t \mathrm{d}r\int_0^r u_F(s)\,\mathrm{d}s + M\int_0^t \mathrm{d}r\int_0^r (h(s) - h_1(s))\,\mathrm{d}s - L\int_0^t \mathrm{d}r\int_0^r (h(s) - h_2(s))\,\mathrm{d}s$$

是二阶线性常微分方程两点边值问题

$$\begin{cases} -h'' = u_F - M(h - h_1) + L(h - h_2) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

的解。故对任意 $h_1, h_2\in [v_0, w_0]$,可以定义 $A: [v_0, w_0]\times [v_0, w_0]\to 2^{C(I,E)}$ 如下:

$$h(t)\in A(h_1(t), h_2(t))\Longleftrightarrow \exists\, u_F(t)\in F(t, h_1(t), h_2(t)),\text{使得 } h(t) \text{ 满足:}$$

$$h(t) = t\int_0^1 \mathrm{d}r\int_0^r u_F(s)\mathrm{d}s - Mt\int_0^1 \mathrm{d}r\int_0^r (h(s) - h_1(s))\mathrm{d}s + Lt\int_0^1 \mathrm{d}r\int_0^r (h(s) - h_2(s))\mathrm{d}s - \int_0^t \mathrm{d}r\int_0^r u_F(s)\mathrm{d}s + M\int_0^t \mathrm{d}r\int_0^r (h(s) - h_1(s))\mathrm{d}s - L\int_0^t \mathrm{d}r\int_0^r (h(s) - h_2(s))\mathrm{d}s \quad (2)$$

则易知 $A: [v_0, w_0]\times [v_0, w_0]\to 2^{C(I,E)}$,且 $y(t)$ 是微分包含 (1) 的解当且仅当 $y(t)\in A(y(t), y(t))$。事实上,由 (2) 式知 $\exists\, u_F(t)\in F(t, y(t), y(t))$,使得

$$y''(t) = -u_F(t) + M(y(t) - y(t)) - L(y(t) - y(t))$$

从而有 $-y''(t) = u_F(t)\in F(t, y(t), y(t))$,且显然有 $y(0) = y(1) = \theta$。于是 $y(t)$ 是微分包含 (1) 的解。另一方面,若 $y(t)$ 是微分包含 (1) 的解,由 $-y''(t)\in F(t, y(t), y(t))$ 知,$\exists\, u_F(t)\in F(t, y(t), y(t))$,使得 $-y''(t) = u_F(t)$。则代入 (2) 知,$y(t)$ 满足 (2),故 $y(t)\in A(y(t), y(t))$。

下面证明 $A: [v_0, w_0]\times [v_0, w_0]\to 2^{C(I,E)}$ 实质上是 $A: [v_0, w_0]\times [v_0, w_0]\to 2^{[v_0, w_0]}$ 的集值混合单调算子,从而由引理 1 知 A 在 $[v_0, w_0]\times [v_0, w_0]$ 上存在耦合不动点。

a. 证明 $\forall\, v\in A(v_0, w_0)$,有 $v\geqslant v_0$,$\forall\, w\in A(w_0, v_0)$,有:

$$w\leqslant w_0 \quad (3)$$

由 (2) 式知 v 满足 $\exists\, u_F(t)\in F(t, v_0(t), w_0(t))$,使得

$$-v''(t) = u_F(t) - M(v - v_0) + L(v - w_0) \quad (4)$$

由条件 (H4) 知 $v_0''\geqslant -u_F(t) + L(w_0 - v_0)$,故对任意 $\varphi\in P^*$,取 $\Phi(t) = \varphi(v_0(t) - v(t))$,有:

$$\Phi''(t)\geqslant \varphi(-u_F(t) + L(w_0 - v_0) - v'') = \varphi(-u_F(t) + L(w_0 - v_0) + u_F(t) - M(v - v_0) + L(v - w_0)) = \varphi(M(v_0 - v) - L(v_0 - v)) = (M - L)\varphi(v_0 - v)$$

即
$$\Phi''(t)\geqslant (M - L)\Phi(t) \quad (5)$$

由 $v(0) = v(1) = \theta$ 及条件 (H4) 有 $v_0(0)\geqslant v_0(1) = \theta$,从而有:

$$\Phi(0) = \varphi(v_0(0) - v(0))\geqslant \varphi(v_0(1) - v(1)) = \Phi(1) = 0 \quad (6)$$

下面证明 $\Phi(t)\leqslant 0, \forall\, t\in I$。

如若不然,则存在 $t_0\in I$,使 $\Phi(t_0) = \max_{t\in I}\Phi(t) > 0$。由 (6) 式知,$t_0\neq 1$,故 $t_0\in [0, 1)$。因为 $\Phi(t)$ 是 $[0, 1)$ 上连续线性泛函,且在 t_0 取得极大值,$\Phi''(t)$ 存在,故 $\Phi'(t_0) = 0, \Phi''(t_0)\leqslant 0$。从而由 (5) 式及 $M - L > 0$ 得

$$0\geqslant \Phi''(t_0)\geqslant (M - L)\Phi(t_0) > 0$$

矛盾,故 $\Phi(t)\leqslant 0$。于是由 (5) 式知,对任意 $\varphi\in P^*$,都有 $\varphi(v_0(t) - v(t))\leqslant 0$,故 $v_0\leqslant v\in A(v_0, w_0)$。同理可证对任意 $w\in A(w_0, v_0)$ 有 $w\leqslant w_0$.

b. 证明对任意 $\forall\, h_1, h_2, k_1, k_2\in [v_0, w_0]$,$h_1\leqslant h_2$,$k_1\geqslant k_2$,$\forall\, v(t)\in A(h_1, k_1)$,$\forall\, w(t)\in A(h_2, k_2)$,都有 $v(t)\leqslant w(t)$。

任取 $\varphi\in P^*$,令

$$\Phi(t) = \varphi(w(t) - v(t))$$

由条件 (H1) 和 (H2),对任意 $u(t)\in F(t, h_2(t), k_1(t))$,有:

$$\begin{aligned} v(t) + Mh_1 - Lk_1 &\leqslant u(t) + Mh_2 - Lk_1 \\ u(t) + Mh_2 - Lk_1 &\leqslant w(t) + Mh_2 - Lk_2 \end{aligned} \quad (7)$$

故 $\Phi''(t) = \varphi(w'' - v'') = (M - L)\varphi(w - v) - \varphi((w + Mh_2 - Lk_2) - (v + Mh_1 - Lk_1))$,于是由 (7) 式可得:

$$\Phi''(t)\leqslant (M - L)\varphi(w(t) - v(t)) - (M - L)\Phi(t) \quad (8)$$

易证 $\Phi(t)\geqslant 0, t\in I$。

事实上,若存在 $t_0\in I$,使 $\Phi(t_0) = \min_{t\in I}\Phi(t) < 0$,由 (6) 式知,$\Phi(0) = \Phi(1) = 0$,因而 $t_0\neq 0, 1$,即 $t_0\in (0, 1)$,于是 $\Phi''(t_0)\geqslant 0$。从而由 (8) 式和 $M - L > 0$,有

$$0\leqslant \Phi''(t_0)\leqslant (M - L)\Phi(t_0) < 0$$

矛盾。故 $\Phi(t)\geqslant 0, t\in I$,即有 $\varphi(w(t) - v(t))\geqslant 0$。由 $\varphi\in P^*$ 的任意性可知 $v(t)\leqslant w(t), t\in I$。

由 **a**、**b** 的证明知 $A: [v_0, w_0]\times [v_0, w_0]\to 2^{[v_0, w_0]}$ 为集值混合单调算子。由引理 1 知 A 在 $[v_0, w_0]\times [v_0, w_0]$ 上存在耦合不动点,设为 (p, q),即有 $p\in A(p, q)$,$q\in A(p, q)$。

下面证明 $p(t) = q(t)$。

假定在 I 上 $p(t)\neq q(t)$,则存在 $t_0\in I$,使

$$\| p(t_0) - q(t_0)\| = \max_{t\in I}\| p(t) - q(t)\| > 0$$

显然 $t_0\neq 0,1$,即 $t_0\in(0,1)$,取 $h\in P^*$,使 $\|h\|=1$, $h(p(t_0)-q(t_0))=\|p(t_0)-q(t_0)\|$,令

$$V(t)=h(p(t)-q(t))$$

故 $V(t)\geqslant 0$,且由 $\|h\|=1$和 $\|p(t_0)-q(t_0)\|=\max_{t\in I}\|p(t)-q(t)\|$ 可得:

$$V(t)\leqslant\|h\|\|p(t)-q(t)\|\leqslant$$
$$\|p(t_0)-q(t_0)\|=V(t_0)$$

于是,

$$V(t_0)=\max_{t\in I}V(t)>0,t_0\in(0,1)\qquad(9)$$

由条件 (H3),有:

$$V''(t)=h(p''(t)-q''(t))=h(p_1(t)-q_1(t)-2L(p(t)-q(t)))\geqslant h(K+L)(p(t)-q(t))-2L(p(t)-q(t))=(K-L)h(p(t)-q(t))=(K-L)V(t)$$

又由 (9)式知 $V''(t_0)\leqslant 0$,于是由上式和 $K>L$,即有

$$0\geqslant V''(t_0)\geqslant(K-L)V(t_0)>0$$

矛盾。故 $p(t)=q(t)$,$t\in I$. 记为 $u^*=p(t)=q(t)$,易知 u^* 为微分包含 (1)的解。证毕。

注 由引理 2知,只要是空间 E弱序列完备,这里 P是正规、正则或全序极小等已没有区别。

参 考 文 献

1 张石生,王 凡. Banach空间中二阶常微分方程的两点边值问题的解的存在性定理. 应用数学和力学, 1996, 7(2): 95~103

2 胡新启,张从军. Banach空间中微分包含的解. 淮北煤师院学报, 1993, 14(3): 21~24

3 杜一宏. 全序极小锥. 系统科学与数学, 1988, 8(1): 19~24

4 Aubin J P, Cellina A. Differential Inclusions. Berlin: Springer-Verlag, 1984.

5 郭大钧. 非线性泛函分析. 济南: 山东科技出版社, 1985.

Solutions to Second Order Differential Inclusions in Banach Spaces

Liu Dingyou Hu Xinqi

(Dept. of Basic Courses, WTUSM, 39 Luoyu Road, Wuhan, China, 430070)

Abstract The purpose of this paper is to study the existence of solutions to second order differential inclusions in Banach spaces, the problems discussed are as follows

$$\begin{cases}-u''\in F(t,u(t),u(t)) & t\in I\\ u(0)=u(1)=\theta\end{cases}\qquad(1)$$

if multifunction F satisfies some condition as

(H1) $\exists M>0,\forall x_1,x_2,y\in[v_0,w_0],x_1\leqslant x_2,\forall u_1\in F(t,x_1,y),\forall u_2\in F(t,x_2,y)$, we have

$$u_2-u_1\geqslant -M(x_2-x_1)$$

(H2) there exists const $L,M>L\geqslant 0$, for any x, $\forall y_1,y_2\in[v_0,w_0],y_1\leqslant y_2,\forall v_1\in F(t,x,y_1),\forall v_2\in F(t,x,y_2)$, we have

$$v_1-v_2\geqslant -L(y_2-y_1)$$

(H3) there exists const $K,M>K>L$, for any $x,y\in[v_0,w_0],x\leqslant y,\forall u\in F(t,x,y),\forall v\in F(t,y,x)$, we have

$$u-v\geqslant(K+L)(y-x)$$

(H4) for $\forall u_F\in F(t,v_0,w_0),\forall v_F\in F(t,w_0,v_0)$, we have

$$-v_0''+L(w_0-v_0)\leqslant u_F,\quad v_0(0)\geqslant v_0(1)=\theta$$
$$-w_0''-L(w_0-v_0)\geqslant v_F,\quad w_0(0)\leqslant w_0(1)=\theta$$

we get the result that there is a solution in $[v_0,w_0]$ to inclusion (1). The resluts presented in this paper generalize results in [1] and simplify the proof to [1].

Key words weakly sequently complete Banach space; second order differential inclusion