

# GPS 相对定位的精度指标估计\*

黄声享 张 琰

(武汉测绘科技大学地学测量工程学院, 武汉市珞喻路 39 号, 430070)

摘 要 基于 GPS 相对定位数据处理的一般模型, 导出了相对定位的几何精度指标, 介绍了估计 RDOP 的算法及其正确性验证, 给出了 RDOP 影响因素的研究结果。

关键词 GPS 相对定位; 精度指标; RDOP 影响因素

分类号 P228 P207

现行的 GPS 数据处理随机商用软件均具有 GPS 测量计划预报功能, 其中一个极为重要的信息是 PDOP (或 GDOP), 表征的是某一瞬间 GPS 单点定位精度估计, 可服务于单点 GPS 接收机定位。然而, 就多台 GPS 接收机同步作业的相对定位来说, 仍借助于 PDOP 作为 GPS 基线测量的计划预报就不甚合适。为克服这一缺陷, 本文基于 GPS 卫星的概略星历, 顾及 GPS 相对定位的一般模型, 研制了一个能反映客观实际的相对定位几何精度因子 RDOP 的估算软件。估计 RDOP 不仅可为 GPS 相对定位提供合理的计划预报, 而且可为 GPS 网的精度估算提供切合实际的基线测量精度指标。

## 1 算 法

### 1.1 基本理论

GPS 基线测量大多采用载波相位观测的二次差分观测值作为虚拟观测值, 按最小二乘原理进行平差计算。设有  $R$  台接收机, 连续同步跟踪观测  $S$  颗卫星,  $T$  个历元, 则相位观测总数为  $R \cdot S \cdot T$ , 可构成  $(R-1) \cdot (S-1) \cdot T$  个相位二次差分观测值。其中, 对于  $t$  时刻, 测站  $T$  和  $U$  及同步观测卫星  $i$  和  $j$  构成的相位二次差分观测值的误差方程式可写为:

$$\begin{aligned} v_{\dot{t}}(t) = & f[\dot{d}_i(t) - \dot{d}_j(t)]^T \delta R_U / c - \\ & f[\dot{d}_i(t) - \dot{d}_j(t)] \delta R_T / c + f[\dot{d}_i(t) - \\ & \dot{d}_j(t)] \delta R_U / c + f[\dot{d}_i(t) - \dot{d}_j(t)] \delta R_T / c + \\ & N_{\dot{t}}^U(1) - \dot{t}_{\dot{t}} \end{aligned} \quad (1)$$

式中,  $\delta R_T = [\delta X_T, \delta Y_T, \delta Z_T]^T$  和  $\delta R_U = [\delta X_U, \delta Y_U,$

$\delta Z_U]^T$  分别为测站  $T$  和  $U$  近似坐标的改正数向量;  $\delta t$  和  $\delta u$  分别为接收机  $T$  和  $U$  的时钟误差;  $N_{\dot{t}}^U(1)$  为模糊度参数;  $\dot{e}_i^T(t) = [(x^i - x^T) / \dot{d}_i, (y^i - y^T) / \dot{d}_i, (z^i - z^T) / \dot{d}_i]$  为测站  $T$  到卫星  $i$  的单位向量, 其中,  $x^i, y^i, z^i$  为卫星  $i$  在  $t$  时刻的坐标,  $x^T, y^T, z^T$  为测站  $T$  的近似坐标,  $\dot{d}_i$  为  $t$  时刻  $T$  到  $i$  的距离,  $\dot{d}_i(t)$  为  $\dot{d}_i$  在  $t$  时刻的变化率, 其它类似符号含义相同;  $\dot{t}_{\dot{t}}$  为进行了大气延迟误差影响改正后的二次差分与用近似坐标计算的相位二次差分之差;  $v_{\dot{t}}$  为相应的二次差分观测值的改正数。

在 (1) 式中, 接收机时钟误差参数  $\delta t$  和  $\delta u$  在不同的历元取值不同, 因此随着观测时间的延长, 未知数的数目将逐渐增多, 这对基线解算是不利的。若测量时能同时观测相位和伪距, 则通过伪距求解便可计算时钟误差, 在式 (1) 中作为常数项考虑。另一种处理钟差  $\delta t$  和  $\delta u$  的方法是用多项式模拟。设

$$a_0 = (\delta t + \delta u) / 2 \quad (2)$$

$$b_0 + b_1(t - t_0) + b_2(t - t_0)^2 = (\delta t - \delta u) / 2 \quad (3)$$

其中,  $a_0, b_0$  为初始钟偏差参数,  $b_1$  为两接收机时钟的相对漂移参数,  $b_2$  为非线性变化参数,  $t_0$  为观测系列初始时刻。这 4 个参数在整个基线观测过程中保持不变, 与历元数无关。将 (2) 和 (3) 式代入 (1) 式, 得到与时钟误差有关的项为:

$$\begin{aligned} & f(\Delta \dot{d}_i - \Delta \dot{d}_j) a_0 / c + \\ & f(\Delta \dot{d}_i + \Delta \dot{d}_j) b_0 / c + \\ & f(\Delta \dot{d}_i + \Delta \dot{d}_j) (t - t_0) b_1 / c + \\ & f(\Delta \dot{d}_i + \Delta \dot{d}_j) (t - t_0)^2 b_2 / c \end{aligned}$$

式中  $\Delta \dot{d}_i = \dot{d}_i - \dot{d}_j, \Delta \dot{d}_j = \dot{d}_j - \dot{d}_i$

收稿日期: 1996-07-16 黄声享, 男, 32 岁, 讲师, 博士生, 现从事 GPS 应用研究。

\* 国家教委博士点基金资助项目, 编号 9249801

GPS基线数据处理通常要提供一个起算点的坐标,于是基线平差的未知数包括  $3(R-1)$  个坐标基线向量,  $4(R-1)$  个接收机时钟误差参数和  $(R-1)(S-1)$  个模糊度参数。我们分别用未知数向量  $X$ 、 $T$  和  $N$  来表示,则基线平差的函数模型可写为<sup>[4]</sup>:

$$V = AX + BT + CN + l \quad (4)$$

随机模型为:

$$Dl = \sigma_0^2 Q = \sigma_0^2 P^{-1} \quad (5)$$

式中,  $\sigma_0^2$  为单个相位观测值的方差;  $Q$  为双差观测值的协因数阵。

按最小二乘原理,未知参数的方差-协方差阵估计为:

$$\hat{D}_{XTN} = \sigma_0^2 \begin{bmatrix} A^T P A & A^T P B & A^T P C \\ & B^T P B & B^T P C \\ & & C^T P C \end{bmatrix}^{-1} = \sigma_0^2 \begin{bmatrix} \hat{Q}_{XX} & \hat{Q}_{XT} & \hat{Q}_{XN} \\ & \hat{Q}_{TT} & \hat{Q}_{TN} \\ & & \hat{Q}_{NN} \end{bmatrix} \quad (6)$$

式中  $\hat{Q}_{XX}$ 、 $\hat{Q}_{TT}$  和  $\hat{Q}_{NN}$  分别为基线向量未知数、时钟误差参数和模糊度参数的协因数阵,它们取决于基线测量时所跟踪的卫星与测站之间构成的几何图形结构。

RDOP (Relative Dilution of Precision) 称为相对定位几何精度因子,与单点定位的情况相类似,对于单条基线而言定义为:

$$RDOP = \frac{1}{\sqrt{\text{tr}(\hat{Q}_{XX}) + \text{tr}(\hat{Q}_{TT}) + \text{tr}(\hat{Q}_{NN})}} \quad (7)$$

相应地可以分别定义基线测量中 3 类参数的几何精度因子:

$$RDOP_X = \frac{1}{\sqrt{\text{tr}(\hat{Q}_{XX})}}, \quad RDOP_T = \frac{1}{\sqrt{\text{tr}(\hat{Q}_{TT})}}, \quad RDOP_N = \frac{1}{\sqrt{\text{tr}(\hat{Q}_{NN})}} \quad (8)$$

对于固定双差,其未知参数的方差-协方差阵估计为:

$$\hat{D}_{XT} = \sigma_0^2 \begin{bmatrix} \hat{Q}_{XX} & \hat{Q}_{XT} \\ & \hat{Q}_{TT} \end{bmatrix} \quad (9)$$

相应的 RDOP 定义为:

$$RDOP_f = \frac{1}{\sqrt{\text{tr}(\hat{Q}_{XX}) + \text{tr}(\hat{Q}_{TT})}} \quad (10)$$

### 1.2 双差观测值权阵的构成

为便于说明,设  $R=2, S=m, T=1$ ,则可构成  $(m-1)$  个相关的双差向量(假定第一颗星为参考星):

$$H = (h_2, h_3, \dots, h_m)$$

双差向量系数矩阵  $D$  (即双差算子) 的形式如表

1 所示。

表 1 双差算子  $D$  ( $R=2, S=m, T=1$ )

Tab. 1 Double Differential Operator

测站	T					U				
	1	2	3	...	m	1	2	3	...	m
卫星	1	-1				-1	1			
D	1		-1			-1		1		
	⋮			⋱		⋮			⋱	
	1				-1	-1				1

相应的权矩阵为:

$$P_l = Q^{-1} = (DD^T)^{-1} =$$

$$\frac{1}{2m} \begin{bmatrix} m-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & m-1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & m-1 \end{bmatrix}_{(m-1) \times (m-1)} \quad (11)$$

对于  $n$  个历元,即  $T=n$ ,由于不同历元之间双差观测值的非相关性,则

$$P = \begin{bmatrix} P_{l_1} & & & \\ & P_{l_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & P_{l_n} \end{bmatrix}_{n(m-1) \times n(m-1)} \quad (12)$$

### 1.3 设计矩阵的构成

在组成设计矩阵  $A$ 、 $B$ 、 $C$  之前,应首先确定参考星。选择参考星的一般原则为:参考星在整个观测时段内存在,且其在时段内平均高度角为最大。根据目前静态基线测量的时段长度均为 1~2 h 的情况,这种考虑是较为合理的。

由卫星的概略星历、测站的概略坐标、计划观测日期的时段、数据采样间隔及卫星高度角限值等必要信息,我们便可由 (1) 式组成观测时段的设计矩阵。对于  $R=2, S=m, T=1$ ,有

$$\begin{aligned} {}_{(m-1) \times 3} A &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{m-1,1} & A_{m-1,2} & A_{m-1,3} \end{bmatrix} \\ {}_{(m-1) \times 4} B &= \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{m-1,1} & B_{m-1,2} & B_{m-1,3} & B_{m-1,4} \end{bmatrix} \\ {}_{(m-1) \times (m-1)} C &= \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad (13) \end{aligned}$$

设计矩阵  $B$  中,测站 TU 上各卫星的卫地距变化率可由观测历元前后的两个卫地距计算得

到:

$$\dot{d}_r = [d_r(t) - d_r(t_{i-1})] \Delta t \quad (14)$$

其中  $\Delta t = t - t_{i-1}$  为历元时间的间隔

### 1.4 未知参数协因素阵的估计

根据双差观测值权阵的特性及各历元之间双差观测值的非相关性,便可利用累加原理来构造时段内各历元的法方程式系数阵。这样不仅可以节省计算内存,而且也便于程序设计。即

$$\hat{Q}_{XTN} = \begin{bmatrix} \Sigma A^T P A & \Sigma A^T P B & \Sigma A^T P C \\ & \Sigma B^T P B & \Sigma B^T P C \\ & & \Sigma C^T P C \end{bmatrix} \quad (15)$$

对于  $R=2, S=m, T=n$  的情况,  $\hat{Q}_{XTN}$  为  $(6+m) \times (6+m)$  阶方阵。

### 1.5 算法流程图

应用上述基本思想,可以实现程序设计,其算法的基本流程图可用图 1 来描述。其中,计划观测文件主要包括基线两端点的概略位置  $(B_i, L_i, H_i)$ ,计划观测日期和时间段,数据采样率,地方时与 GPS 时的时差,卫星高度角限值等必要信息。GPS 接收机短时间的观测便可获取在轨中全部的 GPS 卫星概略星历,并可服务于长时间(如 1 个月),这对 GPS 测量的精度估计是极为方便的。

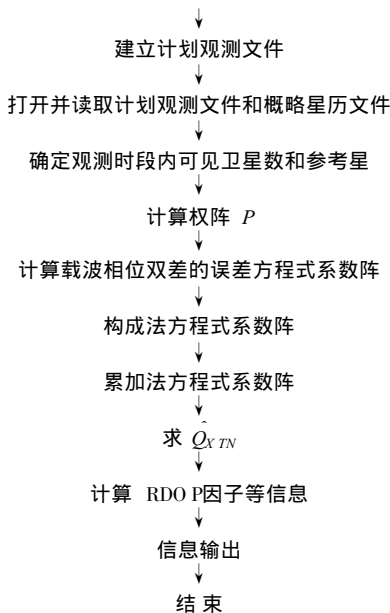


图 1 估计 RDOP 的算法流程图

Fig. 1 Estimating RDOP Factors Flow Diagram

## 2 算法的正确性验证

为了验证算法的正确性和可靠性,除了必须对程序设计的逐项内容严格测试外,我们还进行了两方面的验证工作。首先,将其与商用软件所提

供的观测设计 (Planning) 功能进行比对,预报同一时段内各历元时刻的可见卫星高度角和方位角,这样可检验程序设计中卫星坐标计算的正确性。其次,虽然现今市场的商用软件均缺乏

RDOP 估算功能,无法直接进行比对,但其基线解算结果文件中提供有平差后的基线向量方差协方差阵。顾及后验的相位测量中误差  $\hat{\sigma}_\Phi$ ,可以获得平差系统中未知参数的后验协因数阵,将其与估算值进行比较,更能验证算法的正确性。由于后验值经过了数据的反复迭代计算和精化处理,载波相位观测值的粗差剔除也会使得参与平差的最终观测值数少于实际观测值数。因此,这一比对会有微小的差异,但对 RDOP 值的估计影响甚微。例如,我们利用 SOKKIA 的 GSP1A 软件处理某地一条实测基线,其观测时间为 1994 年 4 月 13 日 8h 07 min 45 s ~ 9h 12 min 15 s,基线解算时确定 15 号星为参考星,27 31 19 2 号星为组星,实测双差相位观测值为 1 040 个,平差处理实际采用了 1 001 个观测值,后验单位权中误差 (rms) 为 0.004 2 m,化米制单位的 rms 为整周制单位,由  $D_{XX} = \hat{\sigma}_\Phi^2 \hat{Q}_{XX}$  很容易得到固定模糊度参数的  $\hat{Q}_{XX}$  为:

$$\hat{Q}_{XX} = \begin{bmatrix} 0.238\ 5D-03 & -0.266\ 1D-03 & -0.347\ 6D-03 \\ & -0.732\ 5D-03 & 0.867\ 2D-03 \\ & & 0.138\ 1D-03 \end{bmatrix}$$

由 RDOP 估算软件计算的  $Q_{XX}$  为:

$$Q_{XX} = \begin{bmatrix} 0.224\ 8D-03 & -0.252\ 4D-03 & -0.336\ 5D-03 \\ & -0.710\ 7D-03 & 0.848\ 5D-03 \\ & & 0.136\ 2D-03 \end{bmatrix}$$

验后与验前的固定模糊度未知参数协因数阵之比为:

$$\begin{bmatrix} 1.060\ 9 & 1.054\ 3 & 1.033\ 0 \\ & 1.030\ 7 & 1.022\ 0 \\ & & 1.014\ 0 \end{bmatrix}$$

两者使用的双差观测值之比为  $1\ 040/1\ 001=1.039\ 0$

## 3 影响因素的研究结果

利用本文所介绍的 RDOP 估计软件,顾及通常情况下 GPS 载波相位双差观测值的数学相关性,避开外界条件等物理因素的影响,我们详细研究了诸因素对 RDOP 的影响。研究结果表明:

a. 在 GPS 基线平差模型 (4) 式中, 无论是消去未知参数  $T$  还是  $N$ , 基线精度指标均有一定程度的提高。其中, 接收机时钟误差参数  $T$  对基线精度的影响所占份量甚微, 且比较稳定, 而模糊度参数  $N$  所占份量较大。实数解的  $RDO P$  与整数解的  $RDO P$  相比较, 在数值上一般要差到一个数量级, 当观测时段内卫星数目较少时, 两者差异更大。这表明在 GPS 基线测量的实际数据处理结果中, 基线向量实数解的精度要低于整数解的精度。如果模糊度参数  $N$  确定正确, 则整数解的基线精度高且可靠; 如果  $N$  确定不正确, 则由整数解求得的基线精度表面上虽高, 但其成果并不可靠。可见, 正确确定  $N$  极为重要。

b.  $RDO P$  与卫星星座的分布和数目有关。随着卫星数目的增多,  $RDO P$  数值逐渐减小。在相同的观测条件下, 不同卫星的组合对  $RDO P$  的影响也不尽相同。观测时段长度的增长, 有利于精度指标的提高, 即  $RDO P$  和  $RDO P_i$  会减小。然而, 当时段长度达到一定值 (一般为 1 h) 后, 再延长观测时间对基线精度的改善无更大意义。

c. 对于非甚长基线, 由于基线长度相对于 GPS 卫星到地面的高度是个微小量, 其长度的较小变化不会影响到 GPS 卫星的几何分布状况的改变, 因此, 基线的长短对  $RDO P$  的影响甚微。就短基线而言, 基线方位的变化对  $RDO P$  影响较小, 而对  $RDO P_i$  几乎无影响; 而就较长基线而言, 基线方位的变化对  $RDO P$  在特定方向上有一定的影响, 而对  $RDO P_i$  的影响甚微。

d. 数据采样间隔的不同对精度指标估计有影响, 随着历元间隔的加大,  $RDO P$  和  $RDO P_i$  会逐渐变大。

e. 相对定位几何精度因子  $RDO P$  和单点定位几何精度因子  $PDOP$  随时间而变化的趋势存在非一致性,  $PDOP$  较小的时段,  $RDO P$  可能反为不利;  $RDO P$  与  $RDO P_i$  的数值变化趋势也不尽一致,  $RDO P$  的数值随时间而变化的幅度明显地大于  $RDO P_i$  的变化幅度。

f. 在相同的观测条件下, 卫星分布的几何图形变化对解算模糊度参数  $N$  十分有利, 例如用两次设站法。然而, 从数学相关性的角度来分析, 两次设站法的观测成果精度要低于静态相对定位模式的持续观测成果的精度。

### 参 考 文 献

- 1 Merminod B. Planning GPS Surveys—Using Appropriate Precision Indicators. CISM Journal ACSGC, 1990, 44 (3): 233~ 249
- 2 Goad C C. Investigation of an Alternative Method of Processing GPS Data Collected in Kinematic Mode. In: Proceedings of the International GPS Workshop, 1988.
- 3 Biacs Z F. Reliability Analysis of Phase Observations in GPS Baseline. Journal of Surveying Engineering, 1990, 116 (4): 204~ 224
- 4 黄声享, 张 琰. GPS 相对定位几何精度指标的研究. 地壳形变与地震, 1996, 16 (增刊): 60~ 67

## Estimation of Accuracy Indicators for GPS Relative Positioning

Huang Shengxiang Zhang Yan

(School of Geo-science and Surveying Engineering, WUTUSM, 39 Luoyu Road, Wuhan, China, 430070)

**Abstract** Based on a common model of data processing for GPS relative positioning, this paper deduces accuracy indicators which have notions of relative positioning geometry. These indicators are easily available and extremely useful in planning GPS surveys. Then some concrete algorithms of estimating  $RDO P$  factors as well as process of verifying algorithms are introduced. At last some research results of influencing  $RDO P$  factors are given.

**Key words** GPS relative positioning; accuracy indicator;  $RDO P$  factors