

分形地学图形处理中几个理论问题的研究*

王 桥

(武汉测绘科技大学土地科学学院,武汉市珞喻路 39 号, 430070)

摘 要 针对分形地学图形处理中几个实际理论问题进行了探讨,并分别提出了分维引入、分维扩展、分维比较、分维估值等的新思路和方法。

关键词 分形;分维;自相似性;无标度区

分类号 p283.7

不少研究表明,分形理论正在成为处理复杂现象的有力工具,在地学领域内得到越来越多的应用。但随着应用范围的扩大,所遇到的理论问题也不断增多。本文将对地学图形处理中分形理论应用过程出现的一些值得探讨的理论问题进行研究

1 关于新种类分维的引入

我们知道,分形理论的优势之一在于可以根据研究的需要,引用不同种类的分维。但是,目前还不存在严格的规则来定义分维。在处理实际应用问题中,可以一般地考虑基于尺度测量的方法:用尺度 s 对物体(集合) F 进行测量,忽略尺寸小于 s 的不规则性,来考察 $s \rightarrow 0$ 时测量值 $M_s(F)$ 的情形。如果存在常数 C 和 D ,使

$$M_s(F) \propto Cs^{-D} \quad (1)$$

则可以将 D 定义为 F 的“分维”。

一般地,当 $M_s(F)$ 是 D 次齐次的,即

$$M_s(sF) = s^D M_s(F) \quad (2)$$

由满足(1)式的幂定律可以定义分维。但是,并不是任何具有幂函数形式的事物都是分形,也不是任何幂指数都是分维。首先,这种幂函数的“自变量”应当是标度,如果它不具有标度意义,那么它的指数就不能认为是分维。其次,这种幂关系应当在每一点上都成立,而不是仅仅在某个特定的点上成立。

从理论上说,我们认为所引入的新种类分维 $D = \dim F$ 应有以下性质:

(1)单调性:如果 $E \subset F$,则 $\dim E \leq \dim F$;

(2)稳定性: $\dim(E \cup F) = \max(\dim E, \dim F)$;

(3)可数稳定性: $\dim\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) = \sup_i \dim F_i$;

(4)几何不变性:如果 f 是 R^n 中如平移、旋转、相似或仿射之类的变换,则 $\dim f(F) = \dim F$;

(5) Lipschitz 不变性:如果 L 是双 Lipschitz 变换,则 $\dim L(F) = \dim F$;

收稿日期: 1996-06-10。王桥,男,38岁,博士后,副教授,现从事数学制图与计算机制图研究。

* 国家教委高校博士点基金和测绘遥感信息工程国家重点实验室开放研究基金资助项目,编号 9449801 和 WKL(95)

(6)开集性:如果 F 是 R^n 的开子集,则 $\dim F = n$;

(7)光滑流形:如果 F 是 m 维的光滑流形,则 $\dim F = m$

上述性质主要是从 Hausdorff 维数性质中总结出的,在目前分形理论的公理化结构体系尚没有建立的情况下,此方面的问题值得进一步研究。

2 关于分维的扩展

尽管分维可作为物体形状结构特征的描述提供量化指标,但它还不一定能反映出物体的所有分形特征,加之它存在受无标度区限制过大等问题,考虑扩展分维的概念无疑是有益的。

从 (1) 式出发,我们可试验性地得到分维^[3,7]:

$$D = - \log M_s(F) / \log s \quad (3)$$

显然, $M_s(F)$ 是 s 的函数,不妨记为 $N(s) = M_s(F)$, 则据 (3) 式, D 可视为 $\lg s - \lg N(s)$ 坐标系内,函数 $\lg N(s) = f(\lg s)$ 在点 $(\lg s, \lg N(s))$ 处的斜率。为此,我们重新定义分维为:

$$D(s) = - d \lg N(s) / d \lg s \quad (4)$$

(4) 式从几个方面扩展了分维的概念: 1) 分维 D 不仅是常量,而且可以是尺度 s 的函数; 2) 只要 $N(s)$ 是平滑的(或 $\lg N(s)$ 可导), 对任何 s 都有相应的分维存在,不必受无标度区的限制; 3) $N(s)$ 不必仅限于幂型。求解 (4) 式,我们还可以得到:

$$N(s_2) = N(s_1) \exp \left[- \int_{s_1}^{s_2} (D(s) / s) ds \right] \quad (5)$$

(5) 式给出了 $N(s_1)$ 、 $N(s_2)$ 与分维的关系。

当 F 为分形曲线时, $M_s(F)$ 即为尺度为 s 的曲线长度,记为 $L(s)$ 。此时, (4) 式的绝对值可写成:

$$f(\lg s) = | - d \lg L(s) / d \lg s | \approx | (\lg L(s_2) - \lg L(s_1)) / (\lg s_2 - \lg s_1) | \quad (6)$$

进一步的研究表明, $\lg s - \lg L(s)$ 曲线一般呈反“S”型,而 $f(\lg s)$ 常呈单峰钟型(见图 1)。该曲线的许多参数都可用来定量描述分形结构的特征,例如:

(1) 该曲线的最大值 D_{\max} 反映了最大分维数;

(2) 该曲线的均值 D_m 反映了平均分维;

(3) 该曲线的方差 D_{var} 反映了 $\lg s - \lg L(s)$ 曲线与其拟合直线接近的程度;

(4) 该曲线较平坦段的段长 $\Delta d = d_2 - d_1$ 反映了无标度区的宽窄 (d_1, d_2 是 $0.8D_{\max}$ 与该曲线交点的横坐标)。

显然,上述研究结果有助于扩大分形分析方法的应用

范围,有助于充分提取分形信息,确定分维的物理意义,也有助于更客观地进行分维估值

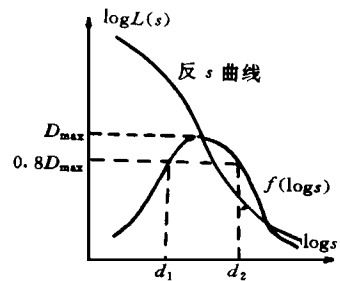


图 1 分维的扩展

3 关于分维的比较

在分形地学图形处理研究中,经常遇到将不同图形的分维进行比较的情况。在分维比较时,应当特别注意两点:

(1) 分维估值的方法必须是统一的,即必须是对同一种分维进行比较;

(2)无标度区的确定方法必须是统一的,即应当对同一个无标度区的分维进行比较。

这里问题(1)所提出的要求是自然的,因为分维的种类不同,它们所表现的机制亦不同,所反映的图形形状结构特征的角度亦不同。例如,对河网的分维有:

$$D_1 = 1 - \frac{M \sum_{i=1}^M [\lg X \lg L(X)] - \left[\sum_{i=1}^M \lg X \right] \left[\sum_{i=1}^M \lg L(X) \right]}{M \sum_{i=1}^M (\lg X)^2 - \left(\sum_{i=1}^M \lg X \right)^2} \quad (7)$$

$$D_2 = - \frac{M \sum_{i=1}^M [\lg s_i \lg N(s_i)] - \left[\sum_{i=1}^M \lg s_i \right] \left[\sum_{i=1}^M \lg N(s_i) \right]}{M \sum_{i=1}^M (\lg s_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^M \lg s_i \right)^2} \quad (8)$$

$$D_3 = \frac{M \sum_{i=1}^M [\lg(L_M(X)/X) \lg(A(X)^{1/2}/X)] - \left[\sum_{i=1}^M \lg(L_M(X)/X) \right] \left[\sum_{i=1}^M \lg(A(X)^{1/2}/X) \right]}{M \sum_{i=1}^M [\lg(A(X)^{1/2}/X)]^2 - \left[\sum_{i=1}^M \lg(A(X)^{1/2}/X) \right]^2} \quad (9)$$

$$D_4 = \lg R_B / \lg R_L \quad (10)$$

其中, $L(X)$ 表示尺度 X 所对应的河网总长度; $N(X)$ 表示用格宽为 X 的方形网格覆盖河网时,含非空格子的数目; $L_M(X)$ 及 $A(X)$ 分别表示尺度 X 所对应的河网主河道的长度及流域面积; R_B 表示河网中相邻两级水道的分叉比; R_L 表示相邻两级水道的平均长度比; M 表示样本数

由文献[7]可知, D_1 描述了河网河道形状总体上的复杂性; D_2 描述了河网对表面的填充能力,或者说河网所含“细节”的多寡程度; D_3 描述了河网主河道长度-流域面积关系方面的复杂程度;而 D_4 则主要描述了河网的拓扑结构的复杂程度。这些不同的分维描述了河网形状结构特征的不同方面,将它们进行横向比较一般是没有实际意义的。

对于上述问题(2),我们通过下面的实例来对其进行进一步讨论

所考虑的试验曲线如图

2所示,它们的形状结构特征相近而复杂程度不同。现根据分形分析方法,分别作出它们的 $\lg s - \lg L(s)$ 图的拟合直线。当我们采用比较严格的线性拟合时,拟合结果为分段直线(见图3);对于曲线

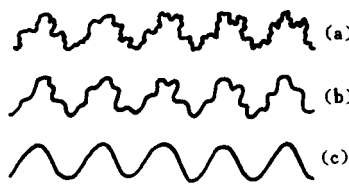


图2 试验曲线样图

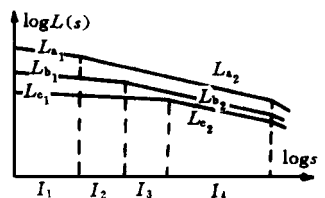


图3 分维比较

(a),有 L_{a_1} 和 L_{a_2} ;对于曲线(b),有 L_{b_1} 和 L_{b_2} ;对于曲线(c),有 L_{c_1} 和 L_{c_2} 。事实上, L_{a_1} 、 L_{b_1} 和 L_{c_1} 的斜率与 1 之差可称为结构分维 (Textural Fractal),它刻划了图形的精细结构或纹理特征;而 L_{a_2} 、 L_{b_2} 和 L_{c_2} 的斜率与 1 之差可称为结构分维 (Structural Fractal),它刻划了图形的一般结构及形状结构特征。

分析上述试验结果我们可以看到,只有在尺度范围 I_4 内,3条试验曲线的分维才相等(这意味着在统计自相似的意义上它们的复杂程度是一样的,其前提是忽略了小于 I_4 所对应尺度所能观察到的曲线细节),而一旦离开这一尺度范围,三者的维数都是互不相同的(即复杂层次各不相同)。因此离开无标度去比较分维,很容易得出错误的结论。

4 关于分维估值的方法

目前分形地学图形处理中,分形理论的应用主要是围绕分维的计算和应用进行的,分维估值方法的研究一直是一个比较核心的问题。一方面,地学中的自然分形是随机的,其自相似性的层次是有限的,不像数学中的分形那样纯粹,因而并不能严格地满足数学上分形的性质;另一方面,分维的数学定义是比较抽象、严格的,在处理自然分形中往往难以操作(如“覆盖” W_s 的实现等等)。因此,我们需要根据分形理论的基本原理和所处理图形的实际需要,找出具有实验性、可操作性的分维估值方法。在分形地学图形处理中,我们可以考虑采用以下分维估值方法:

1) 根据粗视化程度的变化进行分维估值

从试验的观点,自然分形图形的分形性质可由下面的模型给出^[1,7]:

$$M(s) \propto s^{-D} \tag{11}$$

这里 s 是测量尺度,实际操作中可以是线段、小正方形、圆或小立方体等具有特征长度的图形; $M(s)$ 是图形的测量结果; D 是图形的分维。

当 s 进行一系列变化时(即改变图形的粗视化程度),由(11)式可得到一系列样本点。再用线性回归模型处理这些样本,根据(11)式即可求出 D 值。

这种改变粗视化程度的方法是一种比较典型的分维估值方法。我们说,积分方法之所以成为变量数学的有力工具,在很大程度上归于它的思想方法,正因为采用了不断的分割(改变分割的程度)近似等过程为代表的积分方法,才获得初等数学无法获得的各种几何量(见图 4);分形分析方法之所以成为处理复杂现象的有力工具,在很大程度上也要归于它的思想方法。正是因为有了以改变粗视化程度、拟合等为代表的分维估值方法,才获得了经典数学无法获得的非规则图形的形态参数(见图 5)

2) 根据测度关系进行分维估值

分形理论的基本观点认为,分形图形具有非整数维的测度。设长度为 L 、面积为 S 、体积为 V ,则可得如下关系式:

$$L \propto S^{1/2} \propto V^{1/3} \tag{12}$$

(12)式的意义是,若把 L 扩大 K 倍,那么 $S^{1/2}$ 和 $V^{1/3}$ 也都扩大 K 倍。现设具有 D 维测度的量为 X ,则(12)式可写成一般化的形式:

$$L^{1/D} \propto S^{1/2} \propto V^{1/3} \propto X^{1/D} \tag{13}$$

对于实际地学图形, L 、 S 、 V 及 X 一般是可求的(例如,在把所考虑空间量子化的情况下,可认为 L 、 S 、 V 及 X 是常量),从而可由(13)式,来确定分维 D (作为未知量)。

这种方法还适于求分布于空间的点集合的分维。

3) 根据相关函数进行分维估值

设在空间随机分布的某量的密度函数为 $d(x)$,则其相关函数 $c(s)$ 为:

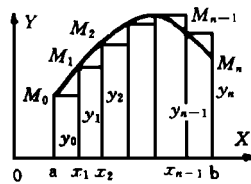


图 4 积分方法原理

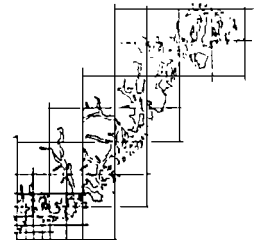


图 5 改变粗视化程度方法原理

$$c(s) = E(d(x)d(x+s)) \quad (14)$$

当 $c(s)$ 为幂型时,不存在特征长度,相关总是以同样比例衰减:

$$c(s) \propto s^{-T} \quad (15)$$

根据分形理论的基本原理,幂指数 T 与分维 D 满足以下关系:

$$T = d - D \quad (16)$$

这里 d 为空间的维数

对相关函数进行付立叶变换,在 $0 < d - D < 1$ 时,波谱函数为:

$$F(k) = \int_0^{\infty} \cos(2\pi ks) ds, \quad c(s) \propto k^{d-D-1} \quad (17)$$

显然利用 (17) 式,可求得分维 D

4) 根据分布函数进行分维估值

设“直径”大于 s 的图形存在的概率为 $P(s)$,相应的密度函数为 $f(s)$,则有:

$$P(s) = \int_s^{\infty} f(t) dt \quad (18)$$

若图形比例尺发生变化时,分布类型不变,则对任何 $\lambda > 0$,有:

$$P(s) \propto P(\lambda s) \quad (19)$$

显然,满足 (19) 式的 s 的函数类型一般为幂型:

$$P(s) \propto s^{-D} \quad (20)$$

根据 (19)、(20) 式及改变粗视化程度进行分维估值的思想, D 即给出了分布的分维

5) 根据波谱进行分维估值

从波谱观点看,所谓改变粗视化程度,就是改变截止频率 f_c (所舍去细小振动成份的界限频率) 当图形的截止频率 f_c 改变时,即进行观测尺变换 $f \rightarrow \lambda$,其波谱形状不变,则此图形具有分形特征,即存在分维。具有这种性质图形的波谱 $s(f)$ 只限于下述幂型:

$$s(f) \propto f^{-U} \quad (21)$$

根据分形理论的基本原理及所研究具体问题的性质,我们可建立指数 U 与图形分维 D 的关系。例如,对于平面曲线,有 $U = 5 - 2D$; 对于地形表面,有 $U = 7 - 2D$

参 考 文 献

- 1 Mandelbrot B B. The Fractal Geometry of Nature. San Francisco: Freeman W H, 1983.
- 2 Feder J. Fractals. New York: John Wiley & Sons, 1988.
- 3 Falconer K J. Fractal Geometry. New York: John Wiley & Sons, 1990.
- 4 Falconer K J. The Geometry of Fractal Sets. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.
- 5 Stoyan D. Fractals, Random Shapes and Point Fields. New York: John Wiley & Sons, 1994.
- 6 Sammis C G. Fractals and Chaos in the Earth Sciences. Berlin: Birkhauser Verlag, 1993.
- 7 王 桥. 分形理论在地图图形数据自动处理中的若干扩展与应用研究: [学位论文]. 武汉: 武汉测绘科技大学, 1996.

(下转第 402 页)

参 考 文 献

- 1 汤定元,糜正瑜.光电器件概论.上海:科学技术文献出版社,1989 462
- 2 中国测试技术研究院.线阵固体图像传感器特性参数测试方法技术规范.光电工程,1992(5): 57~ 64
- 3 刘明华,何平安,余模智,等.用 CCD器件测试光学系统光学传递函数的研究.光子学报,1994,23(Z1): 8 ~ 12

The Research of Measuring Nonlinear Scale of Linear CCD Sampling and Collecting System

Liu Minghua Yu Mozhi He Ping'an Huang Qiaolin

(School of Photoelectric Engineering, W TU SM, 39 Luoyu Road, Wuhan, China, 430070)

Abstract Based on measuring response voltage of light radiance, this paper presents an experimental method, devices and measuring results of measuring nonlinear scale of linear CCD sampling and collecting system. The method is approved to have features of high accuracy and reliability, simplicity and automatic measure by experiments.

Key words CCD sampling and collecting system; nonlinear scale

(上接第 386页)

Research on Some Theory Problems of Fractal Geographical Map Handling

Wang Qiao

(School of Land Science, W TU SM, 39 Luoyu Road, Wuhan, China, 43070)

Abstract Some theory problems of fractal geographical map handling are discussed and some new methods of introduction, expanding, comparison and estimation of fractal dimension are proposed in this paper.

Key words fractals; fractal dimension; self-similarity; scale interval