DOI: 10.13203/j.whugis1996.04.003

第 21卷第 4期 武汉测绘科技大学学报 Vol. 21 No. 4
1996年 12月 Journal of Wuhan Technical University of Surveying and Mapping Dec. 1996

用切贝谢夫配点法消除地球自振常微分方程组在地心处的奇异性*

郭俊义 张飞鹏
(武汉测绘科技大学现代地球动力学实验室,武汉市珞喻路 39号, 430070)

摘 要 用切贝谢夫配点法求解地球自振常微分方程组,无需进一步改化即可消除这组方程在地心处的奇异性,并能获得高精度的结果。

关键词 切贝谢夫配点法;地球自振常微分方程;奇异性
分类号 P312.2

1 原 理

地球球型自振的常微分方程组是众所周知的,现将它们具体写出如下:

$$\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}r} = -\frac{2\lambda}{\lambda+2\_}\frac{y_1}{r} + \frac{1}{\lambda+2\_}y_2 + \frac{\lambda l(l+1)}{\lambda+2\_}\frac{y_3}{r} \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}r} = \left[-\mathrm{d}k^2r^2 - 4g_0\mathrm{d}_0r + \frac{4\_(3\lambda+2\_)}{\lambda+2\_}\right]\frac{y_1}{r^2} - \frac{4\_}{\lambda+2\_}\frac{y_2}{r} + \left[l(l+1)g\mathrm{d}r - \frac{2l(l+1)\_(3\lambda+2\_)}{\lambda+2\_}\right]\frac{y_3}{r^2} \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}y_3}{\mathrm{d}r} = -\frac{y_1}{r} + \frac{y_3}{r} + \frac{y_4}{\_} \tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{d}y_4}{\mathrm{d}r} = \left[g\mathrm{d}r - \frac{2\_(3\lambda+2\_)}{\lambda+2\_}\right]\frac{y_1}{r^2} - \frac{\lambda}{\lambda+2\_}\frac{y_2}{r} + \left\{-\mathrm{d}k^2r + \frac{2\_}{\lambda+2\_}[\lambda(2l^2 + 2l-1) + 2\_(l^2+l-1)]\right\}\frac{y_3}{r^2} - 3\frac{y_4}{r} - \mathrm{d}\frac{y_5}{r} \tag{4}$$

$$\frac{\mathrm{d}y_5}{\mathrm{d}r} = 4\pi G\mathrm{d}y_1 + y_6 \tag{5}$$

$$\frac{\mathrm{d}y_6}{\mathrm{d}r} = -4\pi G\mathrm{d}l(l+1)\frac{y_3}{r} + l(l+1)\frac{y_5}{r^2} - 2\frac{y_6}{r} \tag{6}$$

其中各符号的意义见 [1]。定解的边界条件为:

在地球表面, $y_2 = 0, y_4 = 0, y_6 = -(l+1)y_5/a \quad (r = a)$ (7)

在地心, $y_1 = 0, y_3 = 0, y_5 = 0 \quad (l \neq 1, r = 0)$ (8)

$$y_1 = y_3, \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}r} = 0, y_5 = 0 \quad (l = 1, r = 0) \tag{9}$$

在不同层之间 y_1到 y_6连续,固液界面除外。此处 $y_4 = 0$,液体一侧的 y_3由 (4)式计算,而固体一侧的 y_3不受约束。

收稿日期: 1996-09-29. 郭俊义,男, 33岁,副教授,现从事地球物理学研究
* 国家自然科学基金资助项目,编号 49204050

显然方程组(1)~(6)在地心处即 $r=0$时有奇异性,在求解时必须对这点作特别处理,处理方法见[1~3]。本文利用切贝谢夫配点法自动将其消除。

切贝谢夫配点法在[4]中有介绍,详见[5]。在这里给出要点,以说明消除奇异性的方法。地球模型通常是以数个连续层给出的,我们用 $r_m \leqslant r \leqslant r_{m+1}$表示第 m层。利用切贝谢夫配点法时,需要将方程组(1)~(6)在每一层中都投影到 $-1\leqslant x\leqslant 1$中。第 m层中的投影公式为[4]:

$$r=\frac{r_m+r_{m+1}}{2}+\frac{r_m-r_{m+1}}{2}x,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}=\frac{2}{r_m-r_{m+1}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tag{10}$$

这样方程组(1)~(6)在每一层中都化为 x的方程,而且每一层中 x的取值范围都是 $-1\leqslant x\leqslant 1$。切贝谢夫配点法的要点是取

$$x_i=\cos\frac{i\pi}{N},\quad i=0,\cdots,N\tag{11}$$

处 $y_l(l=0,\cdots,6)$的值 $y_l(x_i)$作为待定未知数,而且令方程组(1)~(6)在每一个 x_i处严格成立。求导的运算可变成:

$$\left(\frac{\mathrm{d}y_l}{\mathrm{d}x}\right)_{x=x_i}=\sum_{k=0}^{N}D_{ik}y_l(x_k)\tag{12}$$

其中 D_{ik}是已知的[5]。通过这样的化算后,原方程(1)~(6)在每个 x_i都变成了一个代数方程,将 $x_0=1$处的代数方程用边界条件代替后即可联合解得 $y_l(x_i)$。奇异性发生在第一层中的 $x_0=1$处,在该点处方程(1)~(6)中的某些系数为无穷大,因此该点处的代数方程没有意义。但我们用边界条件代替了该点处的代数方程,所以我们事实上是避开了这个奇异点的方程,这样最后求解的代数方程就不存在奇异性了。

在具体的计算中,可以由里向外逐层积分,也可由外向里逐层积分。我们选择由里向外的过程。显然,在中心处一点,这组方程给出的代数方程或者没有意义,或者与边界条件(8)或(9)中的某一个等价,因而 $r=0$时,微分方程给出的代数方程都应由边界条件代替。我们需要6个边界条件以确定一个解,而(8)或(9)中的 3个条件是必须满足的,所以还剩 y_3、y_4、y_6的初值可以任意设定。这样,方程组显然有互相独立的 3个起始解。但是,实际计算表明,如果设定 y_3、y_4、y_6在 $r=0$时的初值开始积分,则最里面一层的解很不稳定。当配置点的数目比较大时,求得的根本不是我们寻求的解,原因是代数方程组系数矩阵结构不太好,这是数值计算的经验结果。为什么会是这样,还有待作进一步的研究。为了避免求解的不稳定性,我们设定最里面一层的外表面上 y_3、y_4、y_6的值。今取 3个互相独立的解分别为:

$$\left.\begin{aligned}y_2&=1,y_4=0,y_6=0\\y_2&=0,y_4=1,y_6=0\\y_2&=0,y_4=0,y_6=1\end{aligned}\right\}\quad r=a_1\tag{13}$$

其中 a_1为最里一层的半径。在后面各层中,里面一层外表面上 y_1到 y_6的值就是相邻外面一层内表面的初值。当碰到固体区域向液体区域过渡的界面时,由于液体中 $y_4=\mathrm{d}y_4/\mathrm{d}r=0$,微分方程变成 4个,互相独立的解变成 2个。这 2个解可由前 3个解两两线性组合使 $y_4=0$解得,而 y_3的初值应由(4)式考虑到 $\mathrm{d}y_4/\mathrm{d}r=0$,由 y_1、y_2、y_5的初值算出来。当由液体区域向固体区域过渡时,由于 y_3不连续,可将原来两个解的 y_3设成 0,而再加一个线性独立的解的初值:

$$y_1=0,y_2=0,y_3=1,y_4=0,y_5=0,y_6=0\tag{14}$$

这样又获得 3个互相独立的解。积分到地球表面时,若最外一层是固体,则可由 3个互相独立的解线性组合,使(7)式中的后 2个条件得到满足,而求出一个 y_2的值;若是液体,则(7)式的

第二个条件自动满足,可由 2个互相独立的解线性组合,使最后一个条件得到满足而求出一个 y_2的值。而我们寻求的是使地球表面 $y_2=0$的 k。我们的做法是寻求使 y_2改变正负号时的 k,这样,我们可给周期设定精度要求,逐渐缩小搜寻步长,使步长小于设定的精度。

2 数值结果

由于我们的目的在于说明数值方法,而非给出最新的结果(事实上结果已经在地球模型中给出),所以采用较简单的 PEM-A地球模型作了验算[6]。表 1是原文[6]和本文球型模式结果的比较,给出的是周期,单位为 s。

表 1

	0		1		2	
	本文	原文	本文	原文	本文	原文
10	579.45	579.44	466.26	466.22	416.01	415.95
11	537.17	537.16	426.86	无	388.67	388.61
12	502.68	502.66	392.28	无	365.26	365.20
13	473.58	473.54	362.37	无	344.85	344.80
14	448.47	448.43	336.78	336.75	326.60	326.54
15	426.52	426.48	315.71	315.68	309.18	309.15

表 2

	0		1	
	本文	原文	本文	原文
10	619.12	619.07	381.36	381.33
11	575.15	575.10	359.01	358.97
12	537.74	537.70	339.53	339.50
13	505.44	505.40	322.35	322.31
14	477.19	477.14	307.03	306.98
15	452.21	452.16	293.24	293.21

地球环形自振的常微分方程只需在地幔中积分,不存在奇异性的问题。这里我们不将这组方程写出来,而直接给出本文结果和原文结果的比较,见表 2。数值的意义与表 1相同。

不难发现,本文的结果与原文有系统偏差,我们不懂这是为什么。我们已经取了足够多的配置点,使得再增加点数已不可能改变结果的值,本文数值方法的精度也已在 [4]中证实。

计算中还发现,有时在某一周期处地球表面的 y_2值确实改变了正负号,但在两侧均趋于无穷大,这些周期值不是自振周期。

参 考 文 献

1 Lapwood E R, Usami T. Free Oscillation of the Earth. Cambridge University Press, 1981.

2 Crossley D J. The Free Oscillation Equation at the Centre of the Earth. Geophys. J. R. Astr. Soc., 1975(41): 153~163

3 Smylie D E, Szeto M K, Sato K. Elastic Boundary Conditions in Long-period Core Oscillalion. Geophys. J. Int., 1990(100): 308~319

4 郭俊义,黄金水,张飞鹏.地球内部扁率及其它物理参数的计算.武汉测绘科技大学学报,1996, 21(2): 109~114

5 Canuto C, Hussaini M Y, Quarteroni A, Zhang T A. Spectral Methods in Fluid Dynamics. Springer-Verlag, 1989.

6 Dziewonski A M, Hales A L, Lapwood E R. Parametrically Simple Earth Model Consistant with Geophysical Data. Phys. Earth Planet. Inter., 1975(10): 12~48

(下转第 337页)

A Study of Combined Data Processing with GPS-Leveling, Astrogravimetric Leveling and Gravimetric Geoid

Yang Zhanji　Yu Zongchou　Yu Zhenglin　Chen Yongqi

(Dept. of Land Surveying and Geo-informatics, The Hong Kong Polytechnic University, Hung Hom, Kowloon, Hong Kong)

Abstract　According to the situation of geoid stydies in China, this paper presents a theory and method for determination of high accuracy geoid of China by using the three types of data, i. e. GPS-leveling, astrogravimetric leveling and gravimetric geoid, after the completion of national B class GPS network. The error propagation rules of the data are analyzed, and the models for combined adjustment are given. Finaly, a computation demonstration is presented using a simulative network.

Key words　geoid; GPS-leveling; astrogravimetric leveling; gravimetric geoid combined data processing

(上接第 322页)

Removing the Singularity of the Earth's Free Oscillation Ordinary Differential Equations at the Earth Center by Chebyshev Collocation Method

Guo Junyi　Zhang Feipeng

(Laboratory for Modern Geodynamics, WTUSM, 39 Luoyu Road, Wuhan, China, 430070)

Abstract　The ordinary differential equations of the free oscillation of the Earth are solved by using the Chebyshev collocation method for removing their singularity at the Earth center and high-accuracy result is obtained.

Key words　Chebyshev collocation method; oridinary differential equations of the Earth's free oscillation; singularity