

关于卫星重力梯度边值问题的 准解的若干注记*

罗志才 宁津生 晁定波

(武汉测绘科技大学现代地球动力学实验室, 武汉市珞喻路 39 号, 430070)

摘要 研究了卫星重力梯度边值问题的准解的具体计算方法, 利用地球重力场模型 WDM94 模拟的卫星重力梯度数据进行试算, 验证了准解模型的有效性, 并获得一些重要结论。

关键词 卫星重力梯度边值问题; 地球重力场模型; 准解模型

分类号 P 227; P 312.1; P 223

卫星重力梯度测量能够提供地球外域卫星轨道面上的全球重力梯度数据, 即重力梯度张量的所有分量 (如全张量重力梯度测量) 或部分分量 (如 Aristoteles 计划)。联合这些分量确定地球重力场在解析法的框架中归结为求解卫星重力梯度边值问题, 该问题本质上是超定边值问题。文献 [1] 依据超定边值问题的准解的一般理论^[2], 推导出了卫星重力梯度边值问题的准解的具体解算格式, 并将准解的求解归结为解一个系数阵为带状阵的线性方程组, 便于实际计算。本文的目的在于讨论准解模型的具体实现方法, 并利用地球重力场模型 WDM94 模拟的卫星重力梯度数据验证其有效性。

1 准解模型及其计算方法

物理大地测量的传统作法是将重力场的研究归结为对抗动场的研究。解球坐标系下的 Laplace 方程可得扰动位 T 的球谐表达式为^[3]:

$$T(r, \theta, \lambda) = (GM/r) \sum_{n=2}^{\infty} (R/r)^n \sum_{m=0}^n [\bar{a}_{nm} \cos m\lambda + \bar{b}_{nm} \sin m\lambda] P_{nm}(\cos\theta) \quad (1)$$

其中 GM 是地心引力常数, R 为地球平均半径, r , θ 和 λ 分别为地心向径、地心余纬和地心经度, \bar{a}_{nm} 和 \bar{b}_{nm} 为扰动位 T 的完全规格化球谐系数, $P_{nm}(\cos\theta)$ 是完全规格化第一类 Legendre 函数。这里因假定参考椭球与地球的质量相等, 两者质心相同, 所以 (1) 式无零阶和一阶项。

设边值 $f_j(\theta, \lambda)$ 的球函数展开式为^[4]:

$$f_j(\theta, \lambda) = \frac{GM}{r^3} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n [\bar{a}_{nm}^{(j)} \cos m\lambda + \bar{b}_{nm}^{(j)} \sin m\lambda] P_{nm}(\cos\theta) \quad (2)$$

$j = 1, 2, \dots, 6$

这里 f_j 是与扰动重力梯度分量有关的量, 即分别代表 $\sin^2\theta T_{xx}$, $\sin^2\theta T_{yy}$, T_{zz} , $\sin^2\theta \cos\theta T_{xy}$, $\sin\theta \cos\theta T_{xz}$ 和 $\sin\theta T_{yz}$; $\bar{a}_{nm}^{(j)}$ 和 $\bar{b}_{nm}^{(j)}$ 是相应量的球函数展开系数, 可通过相应边值按球谐分析方法获得, 其具体计算方法见文献 [4]。

收稿日期: 1996-06-05。罗志才, 男, 29 岁, 博士, 现从事物理大地测量研究。

* 国家自然科学基金资助项目, 编号 49374193

根据文献 [1],卫星重力梯度边值问题的准解归结为求解下列线性方程组,以确定 (1) 式中扰动位 T 的球谐系数 \bar{a}_{nm} 和 \bar{b}_{nm} 以求解 \bar{a}_{nm} 为例有:

$$\begin{cases} K^n F_{nm}^{(3)} \bar{a}_{nm} + K^{n+2} F_{nm}^{(4)} \bar{a}_{n+2,m} + K^{n+4} F_{nm}^{(5)} \bar{a}_{n+4,m} = Q_{nm} \\ K^n F_{n+2,m}^{(2)} \bar{a}_{nm} + K^{n+2} F_{n+2,m}^{(3)} \bar{a}_{n+2,m} + K^{n+4} F_{n+2,m}^{(4)} \bar{a}_{n+4,m} + K^{n+6} F_{n+2,m}^{(5)} \bar{a}_{n+6,m} = Q_{n+2,m} \\ K^n F_{n+4,m}^{(1)} \bar{a}_{nm} + K^{n+2} F_{n+4,m}^{(2)} \bar{a}_{n+2,m} + K^{n+4} F_{n+4,m}^{(3)} \bar{a}_{n+4,m} + K^{n+6} F_{n+4,m}^{(4)} \bar{a}_{n+6,m} \\ + K^{n+8} F_{n+4,m}^{(5)} \bar{a}_{n+8,m} = Q_{n+4,m} \\ \dots\dots\dots \\ K^{N-8} F_{N-4,m}^{(1)} \bar{a}_{N-8,m} + K^{N-6} F_{N-4,m}^{(2)} \bar{a}_{N-6,m} + K^{N-4} F_{N-4,m}^{(3)} \bar{a}_{N-4,m} + K^{N-2} F_{N-4,m}^{(4)} \bar{a}_{N-2,m} \\ + K^N F_{N-4,m}^{(5)} \bar{a}_{N,m} = Q_{N-4,m} \\ K^{N-6} F_{N-2,m}^{(1)} \bar{a}_{N-6,m} + K^{N-4} F_{N-2,m}^{(2)} \bar{a}_{N-4,m} + K^{N-2} F_{N-2,m}^{(3)} \bar{a}_{N-2,m} + K^N F_{N-2,m}^{(4)} \bar{a}_{N,m} = Q_{N-2,m} \\ K^{N-4} F_{N,m}^{(1)} \bar{a}_{N-4,m} + K^{N-2} F_{N,m}^{(2)} \bar{a}_{N-2,m} + K^N F_{N,m}^{(3)} \bar{a}_{N,m} = Q_{N,m} \end{cases} \quad (3)$$

其中 K , $F_{nm}^{(j)}$, Q_{nm} 和 G_m 的具体表达式见文献 [4]

(3) 式中 N 为计算的最大阶数。(3) 式是以 $N-n$ 为偶数的情况,若 $N-n$ 为奇数,则需将该式的 N 换成 $N-1$ 从 (3) 式可以看出,奇数阶和偶数阶球谐系数可分别求解,因此该线性方程组的系数阵是阶数为 $[(N-n)/2]+1$ 带宽为 5 的带状阵。至于 \bar{b}_{nm} 的求解,只需将 (3) 式右端的 Q_{nm} 换成相应的 G_m 即可,这里不再详细写出其线性方程组。最后需要说明的是,(3) 式与文献 [1] 的形式稍有不同,其原因是这里采用了完全规格化的球谐系数。一般说来,当 N 较大时,求解 (3) 式需要较大的存储量和计算工作量,为此,作者在实际计算时采用等带宽存储法^[5]。例如:

$$A_7 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & 0 & 0 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & 0 \\ 0 & 0 & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & a_{57} \\ 0 & 0 & 0 & a_{64} & a_{65} & a_{66} & a_{67} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{75} & a_{76} & a_{77} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{存储格式}} B_5 = \begin{bmatrix} \times & \times & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \times & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & a_{57} \\ a_{64} & a_{65} & a_{66} & a_{67} & \times \\ a_{75} & a_{76} & a_{77} & \times & \times \end{bmatrix} \quad (4)$$

其中符号“ \times ”表示该元素不存在。从 (4) 式可以看出,若系数阵 A 的阶数为 n ,半带宽为 m ,用数组 B 存放 A 的元素,则其对应关系为 $a_j \rightarrow b(i, j-i+m+1)$,存储单元由 n^2 个减少到 $(2m+1)n$ 个。特别是当 $m \ll n$ 时,等带宽存储法是非常方便的,可节约大量的存储空间和计算工作量。同时,为了控制数值计算误差,实际计算时采用选主元法,以改善数值解的稳定性。

几点说明如下:

- 1) 在准解模型中,利用扰动重力梯度分量 T_{xy} 和 T_{yz} 不能确定零次项 ($m=0$) 位系数 \bar{a}_{n0} 换言之,在准解中 T_{xy} 和 T_{yz} 对 \bar{a}_{n0} 没有贡献
- 2) 不同的重力梯度分量确定重力场模型的最大阶数 (N_j) 各不相同,因此,当 $N > N_j$ 时,只需在线性方程组 (3) 式中令其相应的系数为零即可。
- 3) (3) 式是基于全张量重力梯度测量结果导出的,对于非全张量重力梯度测量,仍然可得到类似的解算格式,其形式有可能更加简单。如对 Aristoteles 计划而言,只能获取分量 T_{zz} , T_{yz} 和 T_{yy} 的数据,此时线性方程组系数阵的带宽降为 3

4) 由于各类边值的球函数展开系数 $\bar{a}_{nm}^{(j)}$ 和 $\bar{b}_{nm}^{(j)}$ 是通过梯度仪观测值按球谐分析方法获得的, 其中可能含有某些误差, 如重力梯度数据的观测误差, 实际计算时用求和代替积分的影响等, $\bar{a}_{nm}^{(j)}$ 和 $\bar{b}_{nm}^{(j)}$ 的误差必然会影响到准解 T (或 \bar{a}_{nm} 和 \bar{b}_{nm}) 的计算结果。目前在准解模型中尚难以从理论上准确估计该项误差的影响, 但在实际计算中仍然可得到较满意的结果。

2 模拟试算结果与分析

因目前尚无实测卫星重力梯度数据, 因此本文以 Aristoteles 计划的观测量为例, 根据文献 [6] 卫星重力梯度分量的球谐综合算法, 采用了由地球重力场模型 WDM94 模拟的扰动重力

表 1 由准解模型计算位系数的相对误差统计结果

(上为数据 A, 下为数据 B, 计算阶数为 51~ 260)

相对误差范围	位系数个数		百分比	
	\bar{a}_{nm}	\bar{b}_{nm}	\bar{a}_{nm}	\bar{b}_{nm}
~ 10 ⁻⁶	25 861	27 056	0. 786 9	0. 828 5
	6 459	6 637	0. 196 5	0. 203 2
10 ⁻⁶ ~ 10 ⁻⁵	4 307	4 472	0. 131 0	0. 136 9
	9 642	9 735	0. 293 4	0. 298 1
10 ⁻⁵ ~ 10 ⁻⁴	1 179	824	0. 035 9	0. 025 2
	14 964	14 703	0. 455 3	0. 450 3
10 ⁻⁴ ~ 10 ⁻³	816	241	0. 024 8	0. 007 4
	782	766	0. 023 8	0. 023 5
10 ⁻³ ~ 10 ⁻²	645	47	0. 019 6	0. 001 4
	824	742	0. 025 1	0. 022 7
10 ⁻² ~ 10 ⁻¹	55	15	0. 001 7	0. 000 6
	182	69	0. 005 5	0. 002 1
10 ⁻¹ ~ 10 ⁰	2	0	0. 000 1	0. 000 0
	12	3	0. 000 4	0. 000 1
Σ	32 865	32 655	1. 000 0	1. 000 0

表 2 由 T_{zz} 分量计算位系数的相对误差统计

结果 (计算阶数为 51~ 260)

相对误差范围	位系数个数		百分比	
	\bar{a}_{nm}	\bar{b}_{nm}	\bar{a}_{nm}	\bar{b}_{nm}
~ 10 ⁻⁶	25 716	26 107	0. 782 5	0. 799 5
10 ⁻⁶ ~ 10 ⁻⁵	4 204	4 207	0. 127 9	0. 128 8
10 ⁻⁵ ~ 10 ⁻⁴	1 249	1 856	0. 038 0	0. 056 8
10 ⁻⁴ ~ 10 ⁻³	785	312	0. 023 9	0. 009 6
10 ⁻³ ~ 10 ⁻²	692	160	0. 021 0	0. 004 9
10 ⁻² ~ 10 ⁻¹	216	13	0. 006 6	0. 000 4
10 ⁻¹ ~ 10 ⁰	3	0	0. 000 1	0. 000 0
Σ	32 865	32 655	1. 000 0	1. 000 0

梯度分量 T_{zz} 和 T_{yy} (z 沿径向朝外, y 指向西) 的全球 30× 30 格网点值, 卫星轨高为 200 km, 共产生两套数据, 即数据 A 和数据 B, 这两套数据均没有考虑重力场的低频成份 (前 50 阶) 以及卫星的轨道误差和姿态误差, 并且数据 B 是在数据 A 的基础上加入了标准差为 10⁻² E 的零均值白噪声而产生的, 最大计算阶数为 360

利用模拟的重力梯度数据和准解模型可计算出扰动位球谐系数 \bar{a}_{nm} 和 \bar{b}_{nm} 的估值 $\hat{\bar{a}}_{nm}$ 和 $\hat{\bar{b}}_{nm}$ 将它们与 WDM94 模型的位系数 \bar{a}_{nm} 和 \bar{b}_{nm} 分别按下式进行比较:

$$da = |(\hat{\bar{a}}_{nm} - \bar{a}_{nm}) / \bar{a}_{nm}| \quad (5a)$$

$$db = |(\hat{\bar{b}}_{nm} - \bar{b}_{nm}) / \bar{b}_{nm}| \quad (5b)$$

其相对误差统计结果列于表 1

为了便于比较, 将文献 [4] 利用单一重力梯度分量 T_{zz} 和 T_{yy} , 按球谐分析方法计算位系数的相对误差统计结果分别列于表 2 和表 3 (由数据 A 的计算结果)。

比较表 1~ 3 可以看出, 在没有考虑观测误差的情况下, 准解的计算结果与 T_{zz} 和 T_{yy} 的单一解非常一致, 并稍有改善, 绝大部分的相对误差优于 10⁻⁵。表 1 的结果还说明, 即使顾及重力梯度数据的观测误差的影响, 准解模型仍然能获得较满意的估计结果, 即大部分的相对误差优于 10⁻⁴。这表明, 线性方程组 (3) 式对误差扰动并不敏感。从计算结果看, 接近截断阶数和低阶部分位系数估值的误差稍大。

比较表 1~ 3 可以看出, 在没有考虑观测误差的情况下, 准解的计算结果与 T_{zz} 和 T_{yy} 的单一解非常一致, 并稍有改善, 绝大部分的相对误差优于 10⁻⁵。表 1 的结果还说明, 即使顾及重力梯度数据的观测误差的影响, 准解模型仍然能获得较满意的估计结果, 即大部分的相对误差优于 10⁻⁴。这表明, 线性方程组 (3) 式对误差扰动并不敏感。从计算结果看, 接近截断阶数和低阶部分位系数估值的误差稍大。

按下式计算扰动位阶方差的均方根比值:

$$K_n = \frac{\sum_{m=0}^n (\hat{a}_{nm}^2 + \hat{b}_{nm}^2)}{\sum_{m=0}^n (\bar{a}_{nm}^2 + \bar{b}_{nm}^2)} \quad (6)$$

其变化曲线如图 1 所示 从该图可以看出, K_n 的变化非常小, 这从另一个角度说明准解模型的有效性

此外, 利用模拟的重力梯度观测误差可计算它对位系数估值的影响即 W_{Anm} 和 W_{Bnm} 。首先由下式计算信噪比 V_n :

$$V_n = \frac{\sum_{m=0}^n (\hat{a}_{nm}^2 + \hat{b}_{nm}^2)}{\sum_{m=0}^n (W_{Anm}^2 + W_{Bnm}^2)} \quad (7)$$

其变化曲线见图 2 其次, 按以下经验公式计算由重力梯度观测误差计算大地水准面差距而引起的累积传播误差 $\hat{\sigma}_c(N)$:

$$\hat{\sigma}_c(N) = \frac{1}{\sqrt{V_0}} \sqrt{\sum_{n=2}^{N_{max}} \sum_{m=0}^n (W_{Anm}^2 + W_{Bnm}^2)} \quad (8)$$

这里 V_0 为平均正常重力值, N_{max} 为最大计算阶数。

$\hat{\sigma}_c(N)$ 随 n 的变化曲线如图 3 所示

从图 2 可以看出, 当 $V_n = 1$ 时, $n \approx 260$, 这就是前面准解模型中计算位系数的最大截断阶数。从图 3 又可得到, 当 $n = 260$ 和 $n = 170$ 时, 大地水准面差距的累积传播误差分别约为 12.0 cm 和 2.5 cm; 而对于 T_{zz} 和 T_{yy} 的单一解, 其相应值分别为 12.2 cm 和 20 cm^[4]。这说明准解模型对 T_{zz} 分量的估计结果改善很小, 但对 T_{yy} 分量的估计结果有较大改善, 同时表明二阶径向扰动重力梯度分量 (T_{zz}) 在地球重力场精化中起着主要作用

表 3 由 T_{yy} 分量计算位系数的相对误差统计结果 (计算阶数为 51~ 170)

相对误差范围	位系数个数		百分比	
	\bar{a}_{nm}	\bar{b}_{nm}	\bar{a}_{nm}	\bar{b}_{nm}
$\sim 10^{-6}$	9 634	9 945	0.7200	0.750 0
$10^{-6} \sim 10^{-5}$	1 437	1 275	0.1074	0.096 1
$10^{-5} \sim 10^{-4}$	1 006	1 069	0.0752	0.080 6
$10^{-4} \sim 10^{-3}$	978	807	0.073 1	0.060 9
$10^{-3} \sim 10^{-2}$	276	145	0.0206	0.010 9
$10^{-2} \sim 10^{-1}$	43	17	0.0032	0.001 3
$10^{-1} \sim 10^0$	6	2	0.0005	0.000 2
Σ	13 380	13 260	1.0000	1.000 0

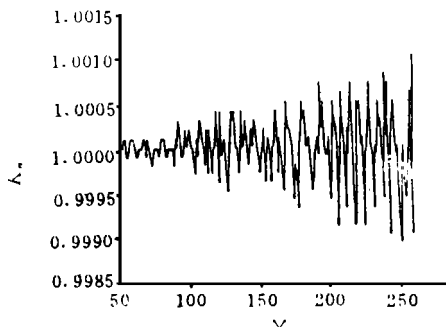


图 1 K_n 随阶数 N 的变化

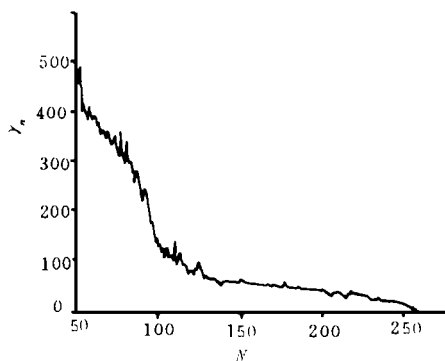


图 2 V_n 随阶数 N 的变化

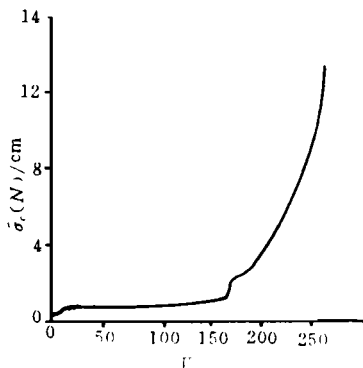


图 3 $\hat{\sigma}_c(N)$ 随阶数 N 的变化

综上所述, 通过试算结果分析可初步获得以下认识: 1) 准解的求解归结为解一个线性带状方程组 数值计算结果表明, 该方程组具有良好的性态, 即计算精度和数值稳定性较高, 并对

重力梯度数据的误差并不很敏感。2) 虽然准解模型存在积分公式离散化的微小误差, 以及不能准确估计重力梯度数据误差的影响, 但从实际应用角度看, 它是非常有效而实用的方法, 并且可以给出更趋完善的地球重力场模型。3) 从模拟试算结果看, 重力梯度观测误差对确定大地水准面差距的影响可达 10 cm 多的量级。地球重力场逼近的跨世纪目标是确定 cm 级大地水准面, 准解模型理论上仍是球近似 (线性近似) 模型, 估计非线性项的影响已超过 cm 级水平。因此, 要实现 cm 级大地水准面的新目标, 一方面要深入研究非线性和无序性边值问题的基础理论, 寻求适用的新数学工具; 另一方面要进一步发展重力探测技术, 提高重力场观测数据的精度和分辨率。卫星重力梯度测量可望在改进中波段重力场方面作出较大贡献, 但重力梯度测量的精度有待进一步提高。

参 考 文 献

- 1 罗志才, 晁定波, 宁津生. 卫星重力梯度边值问题的准解. 武汉测绘科技大学学报, 1996, 21 (1): 1~ 8
- 2 朱灼文, 于锦海. 超定边值问题的准解. 中国科学 B 辑, 1992 (1): 103~ 112
- 3 Heiskanen W A, Moritz H. Physical Geodesy. San Francisco: Freeman W H Company, 1967.
- 4 罗志才. 利用卫星重力梯度数据确定地球重力场的理论和方法: [学位论文]. 武汉: 武汉测绘科技大学, 1996
- 5 刘长学. 超大规模稀疏矩阵计算方法. 上海: 上海科学技术出版社, 1991.
- 6 罗志才, 宁津生, 晁定波. 卫星重力梯度分量的球谐综合. 武汉测绘科技大学学报, 1996, 21 (2): 103~ 108

Some Remarks on the Pseudo-solution to Satellite Gravity Gradiometry Boundary Value Problem

Luo Zhicai Ning Jinsheng Chao Dingbo

(Laboratory for Modern Geodynamics, W TUSM, 39 Luoyu Road, Wuhan, China, 430070)

Abstract The computing method of the pseudo-solution to satellite gravity gradiometry boundary value problem is studied in this paper, and simulation tests using satellite gravity gradiometry data computed with the earth's gravity field model WDM94 show that the pseudo-solution model is very effective.

Key words satellite gravity gradiometry boundary value problem; earth's gravity field model; pseudo-solution model