DOI:10.13203/j.whugis1996.03.015
第21卷第3期 武汉测绘科技大学学报 Vol.21 No.3
1996年9月 Journal of Wuhan Technical University of Surveying and Mapping Sept. 1996

简便实用的 GPS网平差模型

王解先
(同济大学测量系,上海市四平路 1239号,200092)

摘 要 采用数值微商求偏导数的方法,从而使 GPS网平差的计算模型非常简洁。选用平面坐标和大地高作为平差参数,可以方便地简化为平面网或高程网,加入地面归心数据和常规观测数据也变得十分容易。对旋转角大的地方独立坐标系,提出了处理办法。经对实测数据的处理,证明了模型的正确性。

关键词 GPS;网平差;数值微商;地面数据;旋转角
分类号 P207.2

本文提出一种简便实用的 GPS网平差模型,它以 GPS基线向量作为观测值,而平差参数直接选为我们感兴趣的高斯平面坐标和大地高。这样将给其它附加计算带来明显的方便,如地面归心测量和其它地面上的常规观测数据。另外,如在法方程中消去大地高参数,就可变成平面平差模型;如在法方程中消去高斯坐标参数,就可变成高程平差模型。这样的模型用到空间坐标对高斯坐标和大地高的偏导数,其数学表达方式十分复杂,这可能正是以往不被采用的原因。本文将引入数值方法来解决该偏导数的计算。考虑到空间坐标与高斯坐标之间存在着一一对应关系,故理论上是正确的。

1 平差计算模型与分析

1.1 平差模型

以下标 i 表示点号,$R=(X \quad Y \quad Z)^{\mathrm{T}}$ 表示 GPS观测点的空间直角坐标,ΔR 表示由 GPS接收机随机软件求出的基线向量(空间坐标差),则第 j 条基线的误差方程可表示为:

$$V_j + \Delta R_j = R_{i_2} - R_{i_1} \tag{1}$$

式中的 V 为改正数,i_1 和 i_2 为该基线的端点点号。(1)式的权阵为 P_j,它是随机软件求得的基线协因数阵的逆阵。

以 R^0 表示 GPS点的空间直角坐标近似值,将(1)式中 R 化为:

$$R = R^0 + \mathrm{W}R \tag{2}$$

将(2)式中的空间直角坐标改正数 $\mathrm{W}R$ 化为高斯坐标和大地高 $r' = (x'_g \quad y'_g \quad H')^{\mathrm{T}}$ 的改正数 $\mathrm{W}r'$ 的形式:

$$\mathrm{W}R = \frac{\partial R}{\partial r'}\mathrm{W}r' \tag{3}$$

(3)式中,空间坐标对高斯坐标的偏导数的数学公式是很复杂的,容易在推导和编程中出错,方便实用的计算方法将在本文§1.2中叙述。

收稿日期:1996-04-08.王解先,男,33岁,副教授,现从事大地测量研究。

测得的控制网成果必须附合到已有的当地坐标系中(国家 54 80或当地独立坐标)。一般而言,直接由 GPS观测结果根据选定的中央子午线投影出来的高斯坐标(姑且称之为标准高斯坐标)与当地已有坐标之间存在平移、旋转和缩放,各点与旋转参考点间坐标差的关系可由下式表示:

$$\begin{pmatrix} x'_g - x^0 \\ y'_g - y^0 \end{pmatrix} = (1+k)\theta(T)\begin{pmatrix} x_g - x^0 \\ y_g - y^0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

上式中的 k 和 T 为缩放系数和旋转角,x_g 和 y_g 为当地坐标系中的坐标,x^0、y^0 为旋转参考点的高斯坐标,它在旋转前后坐标不变,它可以是 GPS网中的任意一个已知点。

$$\theta(T) = \begin{pmatrix} \cos(T) & -\sin(T) \\ \sin(T) & \cos(T) \end{pmatrix} \tag{5}$$

将(2)、(3)、(4)、(5)代入(1)式,得:

$$\begin{aligned} V_j = {} & \frac{\partial R_{i_2}}{\partial r_{i_2}}\begin{pmatrix} \cos(T) & -\sin(T) & 0 \\ \sin(T) & \cos(T) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Wx_g \\ Wy_g \\ WH \end{pmatrix}_{i_2} - \frac{\partial R_{i_1}}{\partial r_{i_1}}\begin{pmatrix} \cos(T) & -\sin(T) & 0 \\ \sin(T) & \cos(T) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Wx_g \\ Wy_g \\ WH \end{pmatrix}_{i_1} \\ & + \frac{\partial R_{i_2}}{\partial r_{i_2}}\begin{pmatrix} \theta(T)\begin{bmatrix} x_g - x^0 \\ y_g - y^0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -\sin(T) & -\cos(T) \\ \cos T & -\sin(T) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_g - x^0 \\ y_g - y^0 \end{bmatrix} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{i_2}\begin{pmatrix} Wk \\ WT \end{pmatrix} \\ & - \frac{\partial R_{i_1}}{\partial r_{i_1}}\begin{pmatrix} \theta(T)\begin{bmatrix} x_g - x^0 \\ y_g - y^0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -\sin(T) & -\cos(T) \\ \cos T & -\sin(T) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_g - x^0 \\ y_g - y^0 \end{bmatrix} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{i_1}\begin{pmatrix} Wk \\ WT \end{pmatrix} - l_j \end{aligned} \tag{6}$$

(6)式简写为:

$$V_j = D_2 Wr_2 - D_1 Wr_1 + E\begin{pmatrix} Wk \\ WT \end{pmatrix} - l_j \tag{7}$$

(7)式的权阵仍为 P_j,常数项为:

$$l_j = \Delta R_j - R^0_{i_2} + R^0_{i_1} - E\begin{pmatrix} k^0 \\ T^0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

式中的 k^0 和 T^0 为缩放和旋转角的近似值。

由(7)式组成法方程,在所有的基线处理完后,得到最后的法方程:

$$N Wx = C \tag{9}$$

其维数为 $3n+2$(n 为 GPS网的总点数),N 和 C 为最后法方程的系数和常数项,未知数 Wx 包括 n 个未知点的平面坐标和高程改正数、1个尺度因子和 1个旋转角参数。

将与已知点高斯坐标对应的行列从(9)式中消去,并选择一个大地高固定的点(一般可选(4)式中的旋转参考点),将其对应的行列也从(9)式中消去。解(9)式便得最后结果。

1.2 空间坐标对高斯坐标偏导数的数值求取

如前所述,(3)式中的偏导数 $\frac{\partial R}{\partial r}$ 的数学公式是很难推导的,但在计算机上求其数值解是非常方便的。将(3)式写为:

$$\begin{pmatrix} WX \\ WY \\ WZ \end{pmatrix}_i = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}_i \begin{pmatrix} Wx'_g \\ Wy'_g \\ WH \end{pmatrix}_i \tag{10}$$

式中的下标 i表示 GPS网中的 i点。

由 i点的标准高斯坐标和大地高近似值 $r_i'^0 = (x_{gi}'^0 \quad y_{gi}'^0 \quad H_i^0)^T$,算出相应的空间直角坐标值 $R_i^0 = (X_i^0 \quad Y_i^0 \quad Z_i^0)^T$,然后将 $x_{gi}'^0$变化一个微小量 d,算出变化后的空间直角坐标值,并求出其变化量($\Delta X \quad \Delta Y \quad \Delta Z$),从而求得:

$$a_{11} = \frac{\Delta X}{d}, a_{21} = \frac{\Delta Y}{d}, a_{31} = \frac{\Delta Z}{d} \tag{11}$$

同理,通过对 $y_{gi}'^0$和 H_i^0的微小变化,可求出偏导数的其它值。

按导数的定义,当 d趋近于 0时,以上方法求得的导数是严密的。但这在数值计算上是不可能的,也是没有必要的,因为平差计算总是要迭代的,偏导数准确到前两位就已足够。通过一些实例计算,d取 0.1m是比较适当的,它既不使计算机计算时出现数值问题,也使求出的偏导数具有足够的精度。

1.3　模型分析

§1.1中讲述的模型对于大部分的控制网是可以的,但如果已知点处于旋转角很大的地方独立坐标系中,则旋转角将反映在尺度因子 k上。经实算,当旋转角达到 1°左右时,实际上很小的尺度因子 k将达到 150ppm。

解决的途径是先将已知点旋转到 GPS方向上,平差完成后再转回去。即先不考虑已知信息,对 GPS基线向量进行内部平差。将其中一个 GPS点固定为 GPS单点定位的结果上,投影到平面上,从而得出已知点间在 GPS坐标系下的方向。比较该方向与已知点地方独立坐标系中的方向便可得出旋转角。将已知点在地方独立坐标系中的坐标旋转平移到 GPS坐标系中,采用§1.1讲述的模型平差,最后将平差求得的平面成果旋转平移到地方独立坐标系中。

从§1.1的模型可以看出,因为平差参数是平面坐标和大地高,因此很容易引进平面观测数据,如归心观测数据和扩充 GPS网的平面网观测数据,这里不详述。若在 GPS观测区域内,大地水准面差距的模型较准,则可以将平差参数改为平面坐标和水准高程。设大地水准面差距表示为 $Y(x_g, y_g, P)$,则对任意 GPS点 i有:

$$H_i = h_i + Y(x_{gi}, y_{gi}, P) \tag{12}$$

式中的 h_i是该点的水准高,P为大地水准面差距模型中的待定参数向量。由(12)式有:

$$W H_i = W h_i + \left(\frac{\partial Y}{\partial P}\right)_i W P \tag{13}$$

将(13)式代入(6)式,便得到以平面坐标和水准高程为参数的模型,它在已知一些点的水准高的条件下求解。但在实用时,由于大地水准面差距模型的误差太大,它将影响平面坐标的精度,故很少采用。

2　算例分析

某 GPS网共有 119个点,由 Ashtech、Leica、Trimble、Sokkia等多种仪器观测,共观测了 191条独立边。采用 TGPPS[1]软件计算可以看出它与标准高斯投影之间的旋转角达到了将近 1°,尺度因子达到了 164ppm,如表 1所示。显然,该尺度因子是被旋转角扭曲的结果,而不是真实的旋转角。我们根据以上模型编制了软

表 1　TGPPS软件与本文模型的比较

	TGPPS软件	本文模型
旋转角	0°58 36.73"	0°58 37.37"
尺度因子 /ppm	-164.29	-18.92

件,也对该网进行了计算。从结果看,平面坐标、大地高及其中误差均完全相同,原来失真的缩放系数(尺度因子)从 164ppm变成了真实量,而旋转角也有一微小的变化,从而证明了该软件的正确性。

从以上推导过程可以看出,本文提出的 GPS后处理网平差模型是一个简便实用的模型。它以当地平面坐标和大地高作为平差计算的参数,另外它采用数值微商方法回避了繁琐的空间坐标对高斯坐标偏导的计算。该方法也可在其它复杂的偏导计算中应用。计算实例证明,该模型是正确的。

参 考 文 献

1 金国雄等. GPS网平差软件包 TGPPS.见: GPS卫星定位的应用与数据处理.上海: 同济大学出版社, 1994.

A Simple and Practical GPS Network Adjustment Method

Wang Jiexian
(Dept. of Surveying, Tongji University, 1239 Siping Road, Shanghai, China, 200092)

Abstract The numerical partial derivative is introduced to simplify the GPS network adjustment model. And the plane coordinates and geodetic heights are selected as adjustment parameters to make the GPS post network adjustment model easily changed to plane or height network. Additional observables can alse be readily introduced. The solution to networks with big rotation angle is also given. The model is verified with real observation data.

Key words GPS; network adjustment; numerical partial derivation; tradition observable; rotation angle

(上接第 272页)

JX-4A Digital Photogrammetric System

Liu Fengde Jia Weiping Qiu Feng Liu Xianlin
(Chinese Academy of Surveying and Mapping, 16 North Taiping Road, Beijing, China, 100039)

Abstract This paper introduces the structures and principles of JX-4A digital photogrammetric system, and gives the details of important techiques and technical specifications. It also proposes the development direction of JX-4A.

Key words digital photogrammetric system; design; structure; technical specification