

DEM 数据内插的分形方法及其试验研究*

王 桥 龙 毅 秦建荣

(武汉测绘科技大学土地科学学院, 武汉市珞喻路 39 号, 430070)

摘 要 在讨论了分数布朗场和利用 DEM 数据进行分维估值的基础上, 介绍了一种 DEM 数据的分形内插方法, 并给出了具体算法和应用实例。

关键词 数字高程模型; 分数布朗场; 自相似性; 分维

分类号 P283.7

数字高程模型(简称 DEM)是 DTM 的子集, 用于表示地形空间分布的一个有限 3 维向量序列 $\{X_i, Y_i, Z_i\}_{i=1}^n$, 其中 X_i, Y_i 一般表示地表点的平面位置, Z_i 表示相应点的高程。

为了对地表作必要的填充性描述, 需对 DEM 原始样点进行内插。DEM 数据内插一般采用高次多项式法、二元样条法、多层叠加拟合面法、最小二乘配置法、有限元法等。虽然它们可获得较好的几何精度, 但由于所采用的数学模型主要是基于平滑性约束条件的, 对数据处理的基本观点是图形应该平直、光滑, 这在很大程度上掩盖、削弱了 DEM 数据的复杂、不规则性。因此, 难以表达地形表面的实际形态特征, 特别是在数据点较少时, 失真现象更为严重。本文在论述分数布朗场和利用 DEM 数据进行分维估值的基础上, 讨论一种 DEM 数据分形内插方法, 并给出具体算法和应用实例。

1 DEM 数据的分形特征与分数布朗场

随机分形理论认为, 任何一个表面在局部作用下作随机形状修改, 经过多次反复后, 将形成一个满足 fBm 特征的分形表面。

分数布朗运动(简称 fBm)是定义在某概率空间上的一随机过程 $X: [0, \infty) \rightarrow R$, 满足:

- 1) 以概率 1, $X(t)$ 连续且 $X(0) = 0$;
- 2) 对任何 $t \geq 0, \Delta t > 0$,

$$X(t + \Delta t) - X(t) \sim N(0, \Delta t^{2H}), (0 < H < 1) \quad (1)$$

可以证明, $X(t)$ 具有两个重要的统计特性: 1) 满足统计自相似性; 2) 是一个非平稳过程。还可以证明, $X(t)$ 的指数为 H 的样本函数曲线——分数布朗曲线: $\{(t, X(t)); t \in [0, \infty)\}$ 的分维 D 以概率 1 为 $2-H$ 。

将 fBm 中的时间变量 t 用平面区域中的点的坐标 (x, y) 代替, 且将 X 改为 Z , 就得到分数布朗场(简称 fBf) $Z: R^2 \rightarrow R$ 为一随机场, 满足:

- 1) 以概率 1, $Z(x, y)$ 为 (x, y) 的连续函数, 且 $Z(0, 0) = 0$;
- 2) 对任意 $(x, y), (\Delta x, \Delta y) \in R^2$,

$$Z(x + \Delta x, y + \Delta y) - Z(x, y) \sim N(0, (\Delta x^2 + \Delta y^2)^H) \quad (2)$$

类似地,当 $H \neq 0.5$ 时, $Z(x, y)$ 的增量也不是相互独立的,此时在不同点的相关性相当复杂。视 $Z(x, y)$ 为 (x, y) 处的高程,我们称 $\{(x, y), Z(x, y) : (x, y) \in R^2\}$ 是指数为 H 的分数布朗曲面(简称 fBs)。可以证明, fBs 的分维 D 以概率 1 为 $3-H$ 。

2 由 DEM 数据估计三维地形分维值

根据文献[1], (2)式可以写成:

$$E\{|Z(x + \Delta x, y + \Delta y) - Z(x, y)|\} \cdot \|(\Delta x, \Delta y)\|^{-H} = C \quad (3)$$

其中 C 是常数。对(3)式两边取对数:

$$\ln E\{|Z(x + \Delta x, y + \Delta y) - Z(x, y)|\} - H \ln \|(\Delta x, \Delta y)\| = \ln C \quad (4)$$

不难知道, (4)式可视为以 $X = \ln \|(\Delta x, \Delta y)\|$ 与 $Y = \ln E\{|Z(x + \Delta x, y + \Delta y) - Z(x, y)|\}$ 为变量、以 H 为斜率的直线方程,而 $\ln C$ 是该直线在 Y 轴上的截距。因此,对给定的 DEM,可对不同的 X_i 计算出相应的 Y_i ($i=1, 2, \dots, m, m$ 视需要而定),再在 \ln - \ln 坐标系下,用线性回归模型拟合点对 (X_i, Y_i) 。若回归直线的斜率为 k_1 , 在 Y 轴上的截距为 k_2 , 根据(4)式则有 $H = k_1, \ln C = k_2$ 。再由上节讨论可知,相应的分维值 $D = 3 - H$ 。

分维值 D 反映了三维地形的某种复杂程度, D 值越大 (H 越小), 则地形表面的起伏或粗糙程度越大。

事实上, (3)式是在假设 $(Z(x + \Delta x, y + \Delta y) - Z(x, y)) / \|(\Delta x, \Delta y)\|^H$ 的分布函数服从正态分布 $N(0, \sigma^2)$ 的情况下成立的(这符合大多数实际问题^[2])。因此,由(3)式有 $C = 2\sigma / \sqrt{2\pi}$, 从而 $\sigma = \sqrt{2\pi}C/2$ 。显然,与 H 一样, σ 对刻画 DEM 数据的分形特征亦具有重要意义。

3 基于分数布朗场的分形内插算法

实际 DEM 数据所表现的地形,其统计自相似性一般是在一定范围,即无标度区内保持的。设所给定的 DEM 数据的无标度区为 $[d_1, d_2]$ (这里可视 d_1 为描述原始 DEM 的分辨率所对应的尺度), 又设 $Z(x, y)$ 在规则的初始格网上的值已知,由上节所述方法可求出 H, σ , 从而确定初始 DEM 在 $[d_1, d_2]$ 内的分形特征。因为 H, σ 是根据线性回归模型确定的,所以,在 $[d_3, d_1]$ 内(其中 $d_3 < d_1$), 由它们所描述的分形特征仍然保持。分形插值的任务就是将线性模型(4)所确定的直线关系逐步向左延伸,直到满意的分辨率为止。为此,我们采取如下算法:

1) 对 i, j 均为奇数的点, 输入初始网格数据并作为 $Z(i, j)$;

2) 用上节方法求出 H, σ ;

3) 对 i, j 均为偶数的点,

$$Z(i, j) = \frac{1}{4} [Z(i-1, j-1) + Z(i+1, j-1) + Z(i-1, j+1) + Z(i+1, j+1)] \\ + \sqrt{1 - 2^{(2H-2)}} \cdot \|(\Delta x, \Delta y)\|^H \cdot \sigma \cdot G()$$

4) 对 i, j 中仅有一个是偶数的点,

$$Z(i, j) = \frac{1}{4} [Z(i, j-1) + Z(i+1, j) + Z(i-1, j) + Z(i, j+1)] \\ + \sqrt{1 - 2^{(2H-2)}} \cdot 2^{-H/2} \cdot \|(\Delta x, \Delta y)\|^H \cdot \sigma \cdot G()$$

- 5)若满足分辨率,则转7);
 6)将处理后数据行、列号分别转化为*i*、*j*均为奇数,重复执行3)~5);
 7)结束。

上述算法中, $G()$ 是服从正态分布的 Gauss 随机函数,可利用伪随机数发生器 $\text{rand}()$ 产生,它返回在某一区间 $[0, A]$ 上均匀分布的随机数。事实上,若设 T_i 为 $\text{rand}()$ 返回的第 i 个值 ($i=1, 2, \dots, n$),则有:

$$E(T_i) = \frac{1}{2}A, \quad \text{var}T_i = \frac{1}{12}A^2 \quad (5)$$

$$E\left(\sum_{i=1}^n T_i\right) = \frac{n}{2}A, \quad \text{var}\left(\sum_{i=1}^n T_i\right) = \frac{n}{12}A^2 \quad (6)$$

将 $\sum_{i=1}^n T_i$ 标准化:

$$T_n = \left(\sum_{i=1}^n T_i - \frac{n}{2}A\right) / \sqrt{\frac{n}{12}A^2} = \frac{1}{A} \sqrt{\frac{12}{n}} \sum_{i=1}^n T_i - \sqrt{3n} \quad (7)$$

根据中心极限定理,当 $n \rightarrow \infty$ 时, T_n 趋于正态分布,因此 T_n 即可作为近似的 Gauss 随机变量。在实际应用中, $n=4$ 或 5 就可满足需要。

4 实例与讨论

我们以某实际 DEM 数据(见图 1)为例,应用本文方法进行分形插值,所得结果如图 2~6 所示。这里,插值后的输出结果还可进一步通过参数 A 来调节,以方便可视化操作(图中所给 A 值已经过规格化)。

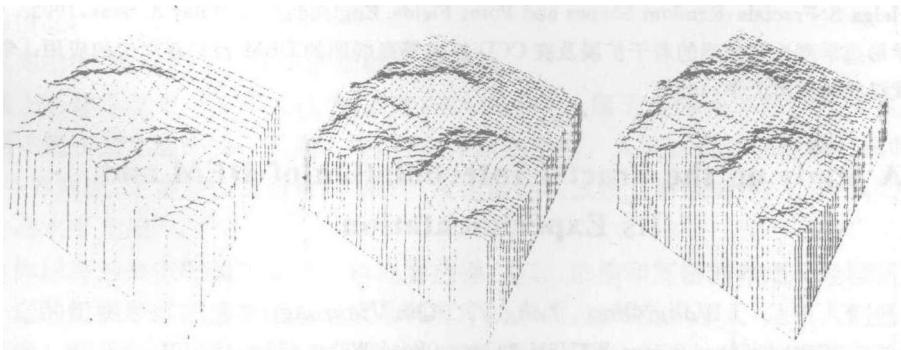
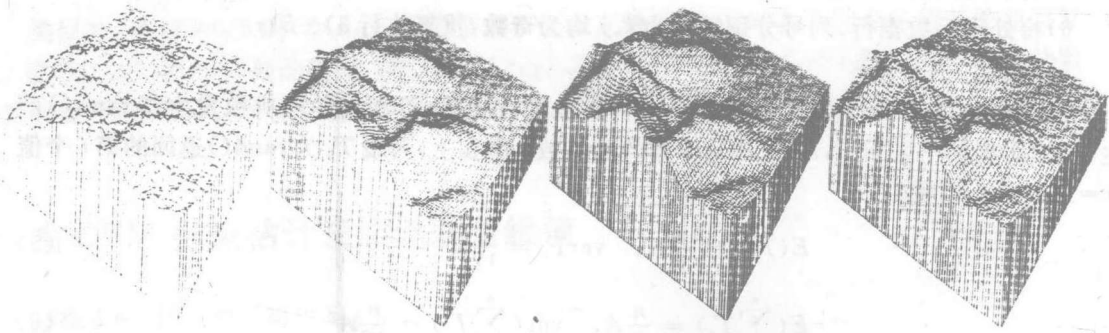


图1 21×21, A=1

图2 41×41, A=2

图3 41×41, A=3

从上述研究和实例可以看出,本文所介绍的分形插值方法具有一些新的特性,它除了利用插值点邻近的信息外,还顾及了整体的地形特征,特别是能够在数据点不多的情况下,获得具有粗糙质感的输出结果。另外,可实现 DEM 的多尺度表达、局部加密表达和时空动态表达,分辨率、可视化效果等只需较少几个参数进行方便的调节。值得指出的是,本文所介绍的分形插值方法是基于各向同性和增量平稳性的 fBf,而实际地形的分形特征在各个局部往往是不同的,因此有必要考虑局部的分形特征,采用具有方向性的逼近方法。此外,如何在具有较好可视化效果的基础上,提高 DEM 数据插值的精度也是需要进一步关注的。

图4 $41 \times 41, A=5$ 图5 $81 \times 81, A=2$ 图6 $81 \times 81, A=3$ 图7 $81 \times 81, A=5$

参 考 文 献

- 1 Pentland A P. Fractal-based Description of Natural Sciences. IEEE Trans. PAMI-6, 1984(6)
- 2 Mandelbrot B B. The Fractal Geometry of Nature. San Francisco: Freeman, 1982.
- 3 Falconer K J. Fractal Geometry. New York: John Wiley & Sons, 1990.
- 4 Mandelbrot B B. Stochastic Models for the Earth's Relief. Proc. of the National Academy of Science, 1975 (72): 3 825~3 828
- 5 Voss R F. Random Fractal Forgeries. In: Eamshaw R A, eds. Fundamental Algorithms in Computer Graphics. Berlin: Springer, 1985. 805~835
- 6 Yokoya N, Yamamoto K. Fractal-based Analysis and Interpolation of 3D Natural Surface Shapes and Their Application to Terrain Modeling. CVGIP, 1989, 46(3)
- 7 Dietrich S, Helga S. Fractals, Random Shapes and Point Fields. England: John Wiley & Sons, 1992.
- 8 陈晓勇. 数学形态学理论和模型的若干扩展及在 CCD 扫描等高线图的 DEM 自动建立中的应用: [学位论文]. 武汉: 武汉测绘科技大学, 1991

A Study on the Fractal Interpolation of DEM and Its Experimentation

Wang Qiao Long Yi Qin Jianrong

(School of Land Science, WTUSM, 39 Luoyu Road, Wuhan, China, 430070)

Abstract Based on the discussion of fractal Brownian field and fractal dimension estimation, a fractal interpolation method of DEM is introduced and some concret algorithms and actual examples are given in this paper.

Key words digital elevation model; fractal Brownian field; self-similarity; fractal dimension