

# 灰色动态预测方法及其在变形预测中的应用\*

尹 晖 丁睿轲 张 琰 邓康伟

(武汉测绘科技大学地球科学与测量工程学院, 武汉市珞喻路 39 号, 430070)

**摘 要** 在分析比较了  $GM(1,1)$  预测模型的不足之后, 提出一种实时引入新信息的等维新息和等维灰数递补组合动态预测方法。首先同常规预测法作了比较, 然后进行了三峡链子崖危岩体变形发展趋势预测及有效性验证。

**关键词**  $GM(1,1)$  模型; 等维新息; 等维灰数递补; 动态预测; 链子崖

**分类号** P258

## 1 $GM(1,1)$ 预测模型

按照灰色理论<sup>[1]</sup>, 设非负离散数据序列为:

$$x^{(0)} = \{x_{(1)}^{(0)}, x_{(2)}^{(0)}, \dots, x_{(n)}^{(0)}\}$$

$n$  为序列长度。对  $x^{(0)}$  进行一次累加生成处理(记为 AGO), 即可得到一个生成序列  $x^{(1)} = \{x_{(1)}^{(1)}, x_{(2)}^{(1)}, \dots, x_{(n)}^{(1)}\}$ 。对此生成序列建立一阶微分方程:

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} + \otimes a x^{(1)} = \otimes u \quad (1)$$

记为  $GM(1,1)$ 。式中  $\otimes a$  和  $\otimes u$  是灰参数, 其白化值(灰区间中的一个可能值)为  $\hat{a} = [a, u]^T$ 。用最小二乘法求解<sup>[2]</sup>, 得:

$$\hat{a} = [a \ u]^T = (A^T A)^{-1} A^T B \quad (2)$$

式中,  $A = \begin{bmatrix} -(x_{(2)}^{(1)} + x_{(1)}^{(1)})/2 & -(x_{(3)}^{(1)} + x_{(2)}^{(1)})/2 & \dots & -(x_{(n)}^{(1)} + x_{(n-1)}^{(1)})/2 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}^T$

$$B = (x_{(2)}^{(0)}, x_{(3)}^{(0)}, \dots, x_{(n)}^{(0)})^T$$

求出  $\hat{a}$  后代入(1)式, 解出微分方程得:

$$x_{(t+1)}^{(1)} = (x_{(1)}^{(0)} - u/a)e^{-at} + u/a \quad (3)$$

对  $x_{(t+1)}^{(1)}$  作累减生成(IAGO), 可得还原数据:

$$\hat{x}_{(t+1)}^{(0)} = \hat{x}_{(t+1)}^{(1)} - \hat{x}_{(t)}^{(1)} \text{ 或 } \hat{x}_{(t+1)}^{(0)} = (1 - e^a)(x_{(1)}^{(0)} - u/a)e^{-at} \quad (4)$$

(3)、(4)两式即为灰色预测的两个基本模型。当  $t < n$  时, 称  $\hat{x}_{(t)}^{(0)}$  为模型模拟值; 当  $t = n$  时, 称  $\hat{x}_{(t)}^{(0)}$  为模型滤波值; 当  $t > n$  时, 称  $\hat{x}_{(t)}^{(0)}$  为模型预测值。

建模的主要目的是预测。为了提高预测精度和效果, 首先要保证有充分高的滤波精度。因此, 建模数据一般应取包括  $x_{(n)}^{(0)}$  在内的等时距序列。

设原始数列为  $x^{(0)}$ , 有拓扑空间  $(x^{(0)}, J)$ ,  $J$  为  $x^{(0)}$  上的拓扑。令  $x_{(n)}^{(0)}$  为现实数据, 构造现实数据的邻域族为:

$$\begin{aligned}
 x_1^{(0)} &= \{x_{(1)}^{(0)}, x_{(2)}^{(0)}, \dots, x_{(n)}^{(0)}\} \\
 x_2^{(0)} &= \{x_{(2)}^{(0)}, x_{(3)}^{(0)}, \dots, x_{(n)}^{(0)}\}, \\
 &\dots\dots\dots \\
 x_{(i)}^{(0)} &= \{x_{(i)}^{(0)}, x_{(i+1)}^{(0)}, \dots, x_{(n)}^{(0)}\}
 \end{aligned}$$

由  $x_1^{(0)} (i=1, 2, \dots, n-3)$  建立的模型集合称为  $x^{(0)}$  的  $GM(1,1)$  模型群。倘若在  $x_{(n)}^{(0)}$  的邻域族中, 由模型  $i: GM_i = GM(\{x_{(i)}^{(0)}, x_{(i+1)}^{(0)}, \dots, x_{(n)}^{(0)}\})$  所得到的曲线构成邻域族  $GM(1,1)$  的上界, 由模型  $j: GM_j = GM(\{x_{(j)}^{(0)}, x_{(j+1)}^{(0)}, \dots, x_{(n)}^{(0)}\})$  所得到的曲线构成邻域族  $GM(1,1)$  的下界, 则  $GM_i$  与  $GM_j$  之间的区域构成了  $GM(1,1)$  模型群预测值的上下界平面(灰平面), 如图 1。各个未来时刻的预测值均包含在此平面内。

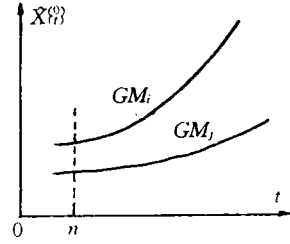


图 1

对模型精度即模型拟合程度评定的方法

表 1

有 3 种, 即残差大小检验、关联度检验和后验差检验。残差大小检验是对模型值和实际值的误差进行逐点检验; 关联度检验是考察模型值曲线与建模序列曲线的相似程度; 后验差检验是对残差分布的统计特性进行检验,

模型精度等级	P	C
1 级 (好)	$0.95 \leq P$	$C \leq 0.35$
2 级 (合格)	$0.80 \leq P < 0.95$	$0.35 < C \leq 0.5$
3 级 (勉强)	$0.70 \leq P < 0.80$	$0.5 < C \leq 0.65$
4 级 (不合格)	$P < 0.70$	$0.65 < C$

它由后验差比值  $C$  和小误差概率  $P$  共同描述<sup>[1,2]</sup>。文献[1]给出了根据  $C, P$  取值的模型精度等级表(见表 1)及模型精度等级判式: 模型精度等级 =  $\max\{P$  所在的级别,  $C$  所在的级别}。

## 2 灰色动态预测模型

### 2.1 灰色动态预测机理

对于一个系统而言, 随着时间的推移, 系统受干扰的因素不断变化, 系统状态也不断变化。若直接套用  $GM(1,1)$  模型进行长期预测, 一方面预测精度不断降低, 另一方面模型未能反映出系统的变化, 其预测可信度很小。因此, 必须充分引入已知信息来反映系统的变化和状态, 或在无已知信息的情况下, 用灰色信息来淡化灰平面的灰度。前者称为新息模型, 后者称为灰数模型, 两者的有机结合称为组合模型。

$GM(1,1)$  模型长期预测的有效性明显受系统时间序列长短及数据变化影响。如果系统建模选用的数据列太短, 则难以建立长期的预测模型; 数据列过长, 系统受干扰的成份多, 不稳定因素大, 易使模型精度降低。为此, 在进行动态预测的同时, 我们加入等维的约束条件, 采用等维动态预测模型来弥补两者的不足。

### 2.2 建模思想

设原始数列为  $x^{(0)} = \{x_{(1)}^{(0)}, x_{(2)}^{(0)}, \dots, x_{(n)}^{(0)}\}$ , 进行一次 AGO 生成  $x^{(1)}$  后建立  $GM(1,1)$  模型(3)、(4), 由(4)式得到  $n+1$  时刻预测值  $\hat{x}_{(n+1)}^{(0)}$ 。然后去掉  $x_{(1)}^{(0)}$ , 加入灰数  $x_{(n+1)}^{(0)}$ , 重新构成等维动态序列:

$$x_1^{(0)} = \{x_{(2)}^{(0)}, x_{(3)}^{(0)}, \dots, x_{(n)}^{(0)}, \hat{x}_{(n+1)}^{(0)}\}$$

建立新的  $GM(1,1)$  模型, 预测  $n+2$  时刻  $\hat{x}_{(n+2)}^{(0)}, \dots$ 。如此递补, 逐个预测, 称为等维灰数递补动态预测。

等维灰数递补动态预测由于加入的信息不是实测值, 而是预测值, 它可以淡化灰平面的灰

度,但仍然是灰色的。科学的建模过程应该是,一旦获得  $n+1$  时刻的实际观测数据(称新息),便对原  $GM(1,1)$  模型进行一次改进。其方法是在序列  $x^{(0)} = \{x_{(1)}^{(0)}, x_{(2)}^{(0)}, \dots, x_{(n)}^{(0)}\}$  中,去掉  $x_{(1)}^{(0)}$ ,加入  $x_{(n+1)}^{(0)}$ ,构成新的动态序列:

$$x_1^{(0)} = \{x_{(2)}^{(0)}, x_{(3)}^{(0)}, \dots, x_{(n)}^{(0)}, x_{(n+1)}^{(0)}\}$$

由于等维新息模型实时引入的是新的观测值,因此真实反映了系统状态的变化。把等维新息和等维灰数动态预测相结合,便构成了一个时变的组合动态预测过程。

### 3 应 用

#### 3.1 与常规回归预测方法比较

为比较  $GM(1,1)$  模型与常规回归预测两种方法,我们任选了图 2 的一组线性模拟数据。前 6 个数据用于建模,后 6 个数据用于结果比较。表 2 为线性回归、 $GM(1,1)$  模型和动态预测结果。

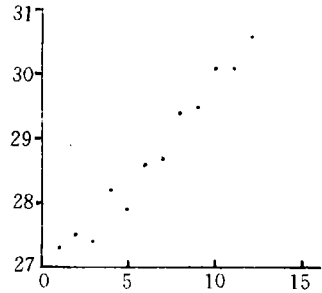


图 2

表 2

实际值 $y$	$y=a+bx$		$GM(1,1)$		等维灰数递补		等维新息预测	
	$\hat{y}$	$e= y-\hat{y} $	$\hat{y}$	$e= y-\hat{y} $	$\hat{y}$	$e= y-\hat{y} $	$\hat{y}$	$e= y-\hat{y} $
28.7	28.67	0.03	28.74	0.04	28.74	0.04	28.74	0.04
29.4	28.91	0.49	29.02	0.38	29.10	0.30	29.07	0.33
29.5	29.15	0.35	29.30	0.20	29.31	0.19	29.54	0.04
30.1	29.40	0.70	29.59	0.51	29.74	0.36	30.04	0.06
30.1	29.64	0.46	29.87	0.23	29.96	0.14	30.42	0.32
30.6	29.28	0.72	30.17	0.43	30.30	0.30	30.62	0.02
$(\sum e)/m$		0.46		0.30		0.22		0.14
$\Delta = \sum(e/y)/m$		9.16%		5.97%		4.44%		2.71%

从表 2 可见,对呈线性变化的模拟数据用  $GM(1,1)$  模型和动态预测模型均可获得理想的预测结果,且占明显优势。

#### 3.2 应用实例

位于湖北省秭归县境内的链子崖是长江中的重大危岩体之一。对其进行的变形监测,常规大地测量方法被认为是目前最有效的手段。本文以链子崖危岩体某监测点 1978~1993 年 5 月的监测资料(表 3)为例,以 1978~1989 年的实测值为原始序列,运用灰色理论进行建模分析,预测 1990~1993、1995 及 2000 年的变形发展趋势,并用 1990~1993 年实测值与预测结果进行比较。下面给出具体步骤:

表 3

年 份	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993
变形值/mm	0.2	4.2	5.0	6.2	9.8	9.8	12.6	10.3	15.9	15.4	18.1	21.3	20.1	22.0	22.6	21.4

(1) 构造  $GM(1,1)$  模型群并评定模型精度。对原始序列  $x^{(0)} = \{x_{(1)}^{(0)}, x_{(2)}^{(0)}, \dots, x_{(12)}^{(0)}\}$ , 以 1989 年原始值  $x_{(12)}^{(0)}$  为现实数据,构造  $x_{(12)}^{(0)}$  的邻域族:

$$12 \text{ 维 } x^{(0)} = \{0.2, 4.2, 5.0, \dots, 21.3\}$$

$$11 \text{ 维 } x^{(0)} = \{4.2, 5.0, 6.2, \dots, 21.3\}$$

.....

$$4 \text{ 维 } x^{(0)} = \{15.9, 15.4, 18.1, 21.3\}$$

模型精度评定结果列于表 4。表 4 表明,系统行为轨迹未受到大的干扰,各维模型精度接近,为合格模型。

表 4

(2)GM(1,1)模型预测。按照 GM(1,1)预测原理,给出各维模型预测结果及灰区间。从表 5(单位 mm)可见,GM(1,1)模型短期预测效果较好。但随着预测时间的延长,数据结果差距较大,预测结果不可靠。

维数	$a$	$u$	后验差 $C$	小误差概率 $P$	模型精度等级
12	-0.137	4.910	0.217	1.00	1
11	-0.130	5.527	0.246	1.00	1
10	-0.123	6.573	0.260	1.00	1
9	-0.118	7.584	0.279	1.00	1
8	-0.118	8.343	0.330	0.88	2
7	-0.122	9.209	0.367	0.86	2
6	-0.124	10.260	0.393	0.83	2
5	-0.118	12.155	0.268	1.00	1
4	-0.118	13.394	0.304	1.00	1

(3)GM(1,1)模型与动态预测模型比较。我们以 12 维、11 维和 5 维数据为例,分别采用 GM(1,1)模型、等维灰数递补和组合动态预测 3 种方式建模,组合动态预测以加入 1 个新息为例。各种模型预测结果如表 6~表 8 所示。

表 5

预测年	12 维	11 维	10 维	9 维	8 维	7 维	6 维	5 维	4 维	灰区间
1990	23.96	23.74	23.19	22.67	22.94	22.98	23.43	22.76	23.05	22.67~23.96
1991	27.48	27.02	26.24	25.51	25.80	25.96	26.52	25.61	25.92	25.51~27.48
1992	31.53	30.77	29.68	28.70	29.02	29.33	30.03	28.81	29.15	28.70~31.53
1993	36.17	35.03	33.57	32.30	32.65	33.13	34.00	32.42	32.79	32.30~36.17
1995	47.59	45.41	42.96	40.89	41.30	42.27	43.59	41.06	41.48	40.89~47.59
2000	94.55	86.89	79.55	73.74	74.34	77.75	81.11	74.08	74.67	73.74~94.55

结果表明,组合动态预测由于实时地加入了新的信息,提高了灰区间的白色度,预测结果最好;灰色递补动态预测利用了序列建模的结果信息,淡化了灰平面的灰度,使预测结果有所改善;GM(1,1)模型由于是静态地反映系统的变化趋势,预测效果最差。从算例结果也看到,不同长度序列的建模及预测结果相差较大,它表明灰色预测明显受到建模序列长短和数据随机变化的影响。在实际建模中,必须进行不同长度模型的比选,且以给出预测区间为宜。

表 6 12 维情况

年份	实测值 $y$	GM(1,1)		等维灰数		组合动态	
		$\hat{y}$	$e$	$\hat{y}$	$e$	$\hat{y}$	$e$
1990	20.1	23.96	3.86	23.96	3.86	20.10	—
1991	22.0	27.48	5.48	27.05	5.05	24.90	2.90
1992	22.6	31.53	8.93	30.13	7.53	27.27	4.67
1993	21.4	36.17	14.77	33.35	11.95	29.75	8.35
$\Delta = \sum (e/y)/m \times 100$		38.15		32.83		24.29	

表 7 11 维情况

年份	实测值 $y$	GM(1,1)		等维灰数		组合动态	
		$\hat{y}$	$e$	$\hat{y}$	$e$	$\hat{y}$	$e$
1990	20.1	23.74	3.64	23.74	3.64	20.10	—
1991	22.0	27.02	5.02	26.38	4.38	24.29	2.29
1992	22.6	30.77	8.17	29.12	6.52	26.35	3.75
1993	21.4	35.03	13.63	32.83	11.43	29.16	7.76
$\Delta = \sum (e/y)/m \times 100$		35.19		30.07		21.09	

最后我们采用组合动态预测方法对三峡链子崖危岩体在该点 1994、1995 以及 2000 年 5 月的变形大小提出预测结果(见表 9)。

表 8 5 维情况

年份	实测值 $y$	GM(1,1)		等维灰数		组合动态	
		$\hat{y}$	$e$	$\hat{y}$	$e$	$\hat{y}$	$e$
1990	20.1	22.67	2.66	22.76	2.66	20.10	-
1991	22.0	25.61	3.61	25.28	3.28	22.61	0.61
1992	22.6	28.81	6.21	27.40	4.80	23.47	1.14
1993	21.4	32.42	11.02	29.32	7.92	24.33	2.93
$\Delta = \sum(e/y)/m \times 100$		27.15		21.60		7.17	

表 9

预测年份	预测值/mm	
	上 限	下 限
1994	26.04	21.87
1995	27.47	22.23
2000	35.44	22.54

由本文研究可见:

- (1)链子崖危岩体目前尚处于稳定阶段。但根据预测结果,1994 年的变形预测上限可达到 26.04mm,比 1993 年实测值 21.4mm 大 5.36mm,表明变形的年增长速度较大,需密切注意。
- (2)灰色动态预测方法用于危岩体变形趋势预测,能动态地反映出系统的时变特性,准确度高,效果好。
- (3)短期预测可以采用短序列模型,而中长期预测必须采用较长序列。
- (4)灰色建模中模型参数的非唯一性导致建模过程的多样性和多选择性,加大了建模工作量,这是灰色预测的局限性。

参 考 文 献

- 1 傅 立. 灰色系统理论及应用. 北京:科学技术文献出版社,1992.
- 2 邓聚龙. 灰色预测与决策. 武汉:华中理工大学出版社,1986.
- 3 况仁杰. 新滩滑坡后两岸边坡的位移监测及形变趋势. 地壳形变与地震,1992(2)
- 4 Chen Y, Tang C. Application of the Theory of Grey System in the Analysis of Deformaton Surveys. In: 7th FIG-Symposium on Deformation Measurement. FIG,1993.
- 5 王学荫. 等维灰数递补动态预测. 华中理工大学学报,1989,17(4)

**Integrated Dynamic Forecasting by Grey Numbers of Identical Dimensions and Its Application in Deformation Forecasting**

Yin Hui Ding Jiongwang Zhang Yan Tang Conrad

(School of Geo-science and Surveying Engineering, WTUSM, 39 Luoyu Road, Wuhan, China, 430070)

**Abstract** By analyzing the limits of GM(1,1)forecasting model, this paper gives a new method, which integrates dynamic forecasting method with recent information and recursive compensations by grey numbers of identical dimensions. This method has been applied to the Lianzi Cliff deformation dy monitoring and prediction with proved efficiency. The analysis showed that the Lianzi Cliff is currently in the stable developing mode.

**Key words** GM(1,1)model; recent information; recursive compensation grey numbers of identical dimensions; dynamic forecasting; Lianzi Cliff