

自聚焦光纤中传导模的场分布

翁兴涛 余模智 何平安

(武汉测绘科技大学电子信息工程与精密机械学院, 武汉市珞喻路39号, 430070)

摘要 从亥姆霍兹方程出发, 导出了自聚焦光纤中传导模在圆柱坐标系中的场分布形式, 并给出了几个低阶模的分布图。

关键词 亥姆霍兹方程; 圆柱坐标; 自聚焦光纤传导模

分类号 TN249

自聚焦光纤中的传导模及求解过程已在很多专著中作了说明^[1~6], 它们可看作沿着轴向传播的平面波, 而垂轴面内的振幅分布可表示为两个厄米—高斯函数的乘积。显然, 这些结果是在直角坐标系中的解。然而, 自聚焦光纤一般具有旋转对称的构形, 因而在圆柱坐标系中的解就具有更显明的物理意义。

自聚焦光纤内介质的折射率分布可表示为:

$$n = n_0 - \frac{1}{2}n_2r^2 = n_0(1 - \frac{1}{2}\alpha r^2) \quad (1)$$

式中, r 是离开中心轴的距离, n_0 、 n_2 是两个量纲不同的常数, 其中 n_0 为中心轴上的折射率。 $\alpha = n_2/n_0$, 为折射率分布常数, 一般 α 值很小。

在自聚焦光纤内, 传导模的标量解仍满足亥姆霍兹方程:

$$\nabla^2 U + k^2 U = 0 \quad (2)$$

但波矢 k 的大小则有:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} n^2 = \frac{\omega^2}{c^2} n_0^2 (1 - \frac{1}{2}\alpha r^2)^2 \approx k_0^2 (1 - \alpha r^2) \quad (3)$$

式中, $k_0 = \omega n_0/c$, 而 ω 为传导模的角频率, c 为真空光速。因 α 很小, 上式作了一级近似。于是亥姆霍兹方程(2)可写成:

$$\nabla^2 U + k_0^2 (1 - \alpha r^2) U = 0 \quad (4)$$

设上式的解具有如下形式:

$$U(r, z) = \exp(-\frac{r^2}{W_0^2}) \exp(i\beta_0 z) \quad (5)$$

在圆柱坐标系中, 拉普拉斯算子为:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (6)$$

将(5)、(6)式代入(4)式可得:

$$(\frac{4r^2}{W_0^4} - \frac{4}{W_0^2} - \beta_0^2) + k_0^2 (1 - \alpha r^2) = 0 \quad (7)$$

为使上式有解, 应让 r 的同次幂的系数为 0, 由此解出:

$$W_0 = \left(\frac{4}{k_0^2 \alpha}\right)^{1/4} = \left(\frac{4c^2}{\omega^2 n_0^2 \alpha}\right)^{1/4} \quad (8)$$

$$\beta_0 = \left(k_0^2 - \frac{4}{W_0^2}\right)^{1/2} = k_0 \left(1 - \frac{2\sqrt{\alpha}}{k_0}\right)^{1/2} \quad (9)$$

即当 W_0, β_0 取上述值时, (5) 式代表的场分布是亥姆霍兹方程(4) 的一个特解。

更一般地, $U = U(r, \theta, z)$, 为使场分布在垂轴面内保持单值性, 应有如下形式:

$$U(r, \theta, z) = \psi(r) \exp(im\theta) \exp(i\beta z) \quad (10)$$

式中, $m = 0, 1, 2, \dots$ 。即场分布可由径向、角向及轴向函数之积构成。角向、轴向函数已很明确, 重要的问题是要求解径向函数 $\psi(r)$ 。为此, 将(10)、(6) 式代入(4) 式, 整理后得到关于径向函数 $\psi(r)$ 的方程:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + [k_0^2(1 - \alpha r^2) - \frac{m^2}{r^2} - \beta^2] \psi(r) = 0 \quad (11)$$

将(8) 式代入上式, 则有:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + [k_0^2 - \frac{4r^2}{W_0^4} - \frac{m^2}{r^2} - \beta^2] \psi(r) = 0 \quad (12)$$

设 $\psi(r)$ 具有如下形式:

$$\psi(r) = g(r) \exp\left(-\frac{r^2}{W_0^2}\right) \quad (13)$$

代入(12) 式, 整理后得到关于 $g(r)$ 的方程为:

$$g''(r) + \left(\frac{1}{r} - \frac{4r}{W_0^2}\right) g'(r) + [k_0^2 - \frac{4}{W_0^2} - \frac{m^2}{r^2} - \beta^2] g(r) = 0 \quad (14)$$

再设

$$g(r) = \xi^{m/2} f(\xi) \quad (15)$$

其中,

$$\xi = 2r^2/W_0^2 \quad (16)$$

将上述关系代入(14) 式, 整理后得到关于 $f(\xi)$ 的方程为:

$$\xi f'' + (1 + m - \xi) f' + \frac{W_0^2}{8} [k_0^2 - \frac{4}{W_0^2}(1 + m) - \beta^2] f(\xi) = 0 \quad (17)$$

由此可得以下两个方程:

$$\xi f'' + (1 + m - \xi) f' + p f(\xi) = 0 \quad (18)$$

$$k_0^2 - \frac{4}{W_0^2}(1 + m) - \beta^2 - \frac{8p}{W_0^2} = 0 \quad (19)$$

式中, $p = 0, 1, 2, \dots$ 。

方程(18) 是一般拉盖尔方程, 其解为拉盖尔多项式:

$$f(\xi) = L_p^m(\xi) = \sum_{l=0}^p \frac{(p+m)!}{(m+l)! l! (p-l)!} (-\xi)^l \quad (20)$$

前几个低阶的拉盖尔多项式为:

$$L_0^m(\xi) = 1$$

$$L_1^m(\xi) = 1 + m - \xi$$

$$L_2^m(\xi) = \frac{1}{2} [(1+m)(2+m) - 2(2+m)\xi + \xi^2]$$

...

由(19) 式可解得传播常数:

$$\beta_p^m = k_0 [1 - \frac{2\sqrt{\alpha}}{k_0} (2p + m + 1)]^{1/2} \tag{21}$$

至此, 我们可写出径向函数 $\psi(r)$ 的完整表达式为:

$$\psi(r) = (\sqrt{2} \frac{r}{W_0})^m L_p^m(2 \frac{r^2}{W_0^2}) \exp(-\frac{r^2}{W_0^2}) \tag{22}$$

由一般拉盖尔多项式的正交性:

$$\int_0^\infty \xi^m L_p^m(\xi) L_q^m(\xi) e^{-\xi} d\xi = \begin{cases} 0, & p \neq q \\ \frac{(p+m)!}{p!}, & p = q \end{cases}$$

可知, 若将径向函数 $\psi(r)$ 取规范化值:

$$\psi_p^m(r) = \frac{\sqrt{2 \cdot p!}}{\sqrt{\pi \cdot (p+m)!} W_0} (\sqrt{2} \frac{r}{W_0})^m L_p^m(2 \frac{r^2}{W_0^2}) \exp(-\frac{r^2}{W_0^2}) \tag{23}$$

则有:
$$\int_0^\infty \psi_p^m(r) \psi_q^m(r) 2\pi r dr = \delta_{pq} = \begin{cases} 0, & p \neq q \\ 1, & p = q \end{cases} \tag{24}$$

可见, m 为某一定值时, 不同 p 值的 $\psi_p^m(r)$ 以 $2\pi r$ 为权函数, 在 r 的 $[0, \infty)$ 区间上构成了完备的正交归一函数集. $\psi_p^m(r)$ 的前几个低阶函数的图形见图 1.

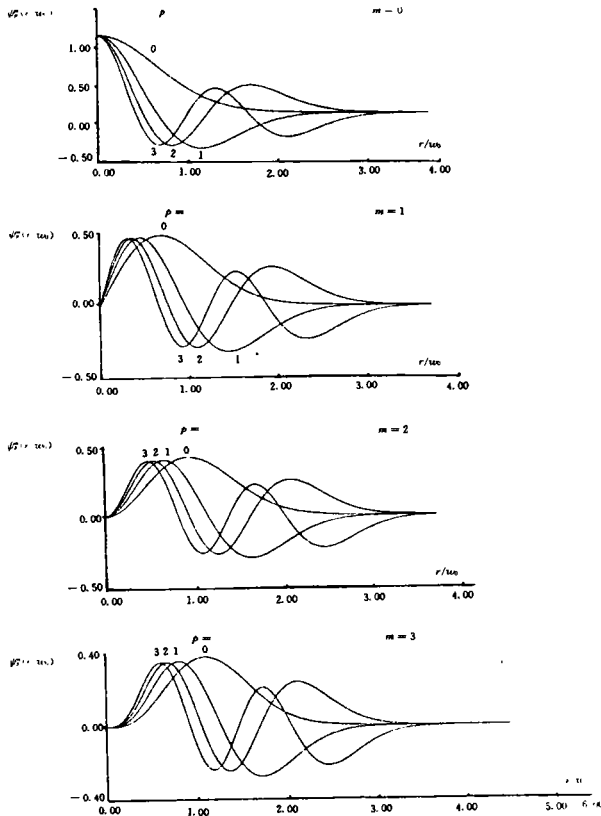
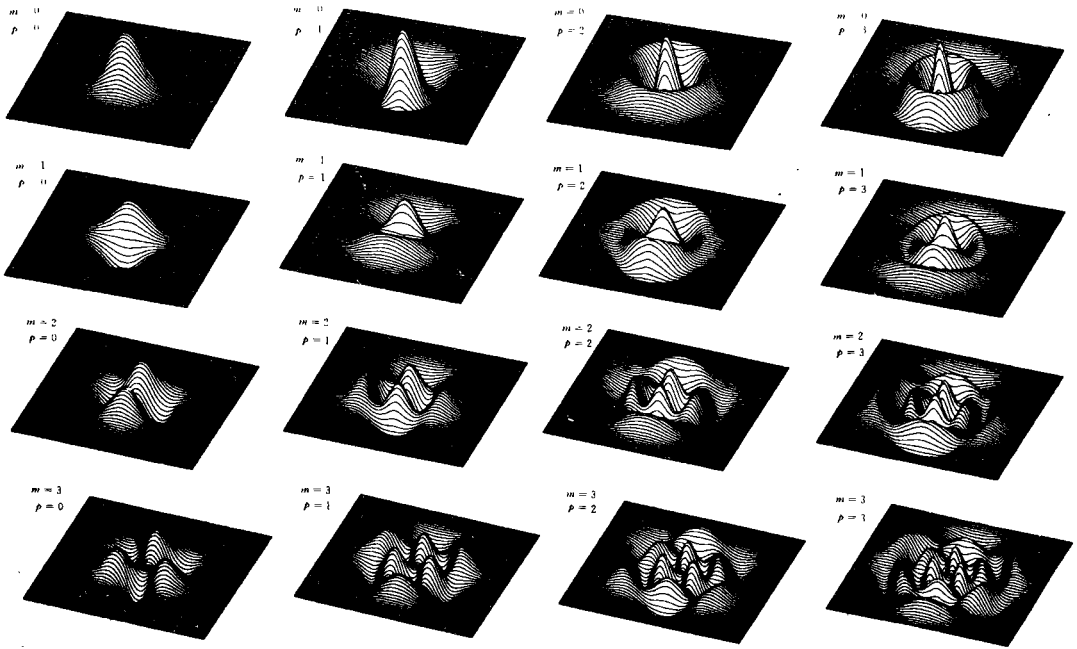
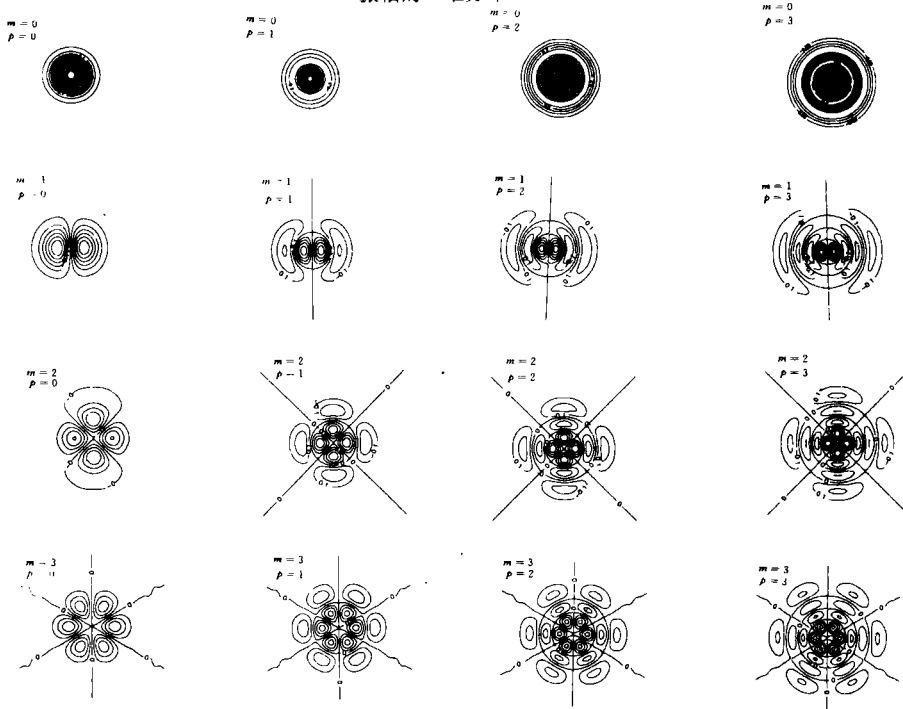


图 1 前几个低阶的径向函数 $\psi_p^m(\frac{r}{W_0})$ 的曲线图



(a) 振幅的二维分布



(b) 等振幅线的分布

图 2 前几个低阶传导模在垂轴面内的振幅分布 $\psi_p^m\left(\frac{r}{W_0}\right) \begin{cases} \sin m\theta \\ \cos m\theta \end{cases}$

自聚焦光纤内的传导模可表示为:

$$U(r, \theta, z) = \frac{\sqrt{2 \cdot p!}}{\sqrt{\pi \cdot (p + m)!} W_0} (\sqrt{2} \frac{r}{W_0})^m L_p^m(2 \frac{r^2}{W_0^2}) \exp(-\frac{r^2}{W_0^2}) \exp(im\theta) \exp(i\beta_p z)$$

(25)

上式描述了一个以传播常数 β_p 沿 z 轴方向传播的平面波, 垂轴面内的振幅分布由函数 $\psi_p^m(r)$ $\begin{cases} \sin m\theta \\ \cos m\theta \end{cases}$ 描述。几个较低阶模在垂轴面内的振幅分布如图 2 所示。

(25) 式所对应的场分布以及它们的线性组合所给出的场分布均是自聚焦光纤内允许的传导模。

参 考 文 献

- 1 程 路. 光学——原理及发展. 北京: 科学出版社, 1990. 496~499
- 2 赫尔曼 A 豪斯. 光电子学中的波和场. 陈东培译. 上海: 上海翻译出版公司, 1990. 170~171
- 3 秦秉坤, 孙雨南. 介质光波导及其应用. 北京: 北京理工大学出版社, 1991. 72~74
- 4 刘德森. 纤维光学. 北京: 科学出版社, 1987. 347~353
- 5 魏光辉, 朱宝亮. 激光束光学. 北京: 北京工业学院出版社, 1988. 167~168
- 6 亚里夫 A. 量子电子学. 刘颂豪等译. 上海: 上海科学技术出版社, 1983. 125~126

Field Distribution Patterns of Propagation Modes in Selfoc Fiber

Weng Xingtao Yu Mozhi He Ping'an

(School of Electronic Information Engineering & precision Mechanics, WTUSM, 39 Luoyu Road, Wuhan, China, 430070)

Abstract The propagation modes in selfoc fiber, which features the laguerre — Gauss distributions, are derived by solving the helmholtz wave equation in cylindrical coordinates. Some low — order modes distribution patterns are presented.

Key words Helmholtz equation; cylindrical coordinate; selfoc fiber propagation mode

.....

本 刊 启 事

本刊正在进行 1996 年的征订工作。凡没有收到本刊订单的新老订户请尽快来函索取。

本刊编辑部