

# 时序分析在危岩体监测数据处理中的应用

陈德豪 丁窘轲

(华南建设学院,管理系,广州市广园中路,510405)

**摘要** 引入时间序列分析进行危岩体监测数据的处理,建立了危岩体变形的动态模型,取得了较好的拟合与预报精度。

**关键词** 时序分析;变形监测;数据处理;ARMA;预报

**分类号** P221;P642.2

## 1 应用时序分析处理危岩体观测数据

对危岩体的监测,主要是监测其变形和各种相关因素值,如温度、降雨量、应力等。危岩体每一时刻的变形值可以认为是危岩体内部状态的过去变化与外部所有影响因素共同作用的结果,其各期变形值互相依赖、带有惯性,是记载了各种因素综合影响的信息载体。引入时序分析模型,能很好地从中刻划出危岩体的变形规律<sup>[1-3]</sup>,克服静态回归模型的不足。

虽然多数情况下只需进行一维建模,但在有一些外部影响因子,并试图进一步提高拟合及预报精度,给出一定的外因影响物理解释时,可引入多维时序分析模型。另外,如果测得的变形值明显呈非线性,可考虑引入非线性模型<sup>[4]</sup>。

自回归滑动平均模型 ARMA 是代表性最强、适用性最广的一维时序分析模型。设  $x_t$  ( $t=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) 是零均值的序列值,则

$$x_t = \varphi_1 x_{t-1} + \varphi_2 x_{t-2} + \dots + \varphi_p x_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q} \quad (1)$$

称为序列  $x_t$  的自回归滑动平均模型,简记为 ARMA( $p, q$ )。其中  $p, q$  为正整数,分别称为模型的自回归、滑动平均阶次,  $\varphi_{(1 \sim p)}, \theta_{(1 \sim q)}$  分别称为模型的自回归系数和滑动平均系数,  $a_t$  为白噪声序列,也称残差序列,  $a_t$  满足下式:

$$E(a_t) = 0, \quad E(a_t, a_{t-k}) = \begin{cases} \sigma_a^2, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} \quad (2)$$

其中  $t$  时刻  $a_t$  与前时刻的  $x_{t-\tau}$  ( $\tau > 0$ ) 不相关,即

$$E(a_t \cdot x_{t-\tau}) = E(x_{t-\tau} \cdot a_t) = 0 \quad (\tau > 0) \quad (3)$$

令(1)式中  $q=0$ ,有:

$$x_t = \varphi_1 x_{t-1} + \varphi_2 x_{t-2} + \dots + \varphi_p x_{t-p} + a_t \quad (4)$$

得  $p$  阶自回归模型 AR( $p$ )。令式(1)中  $p=0$ ,有:

$$x_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q} \quad (5)$$

得  $q$  阶滑动平均模型 MA( $q$ )。由此可以看出,AR、MA 只是 ARMA 的特例。

由式(1)可以看出,  $x_t$  的当前状态一方面与其历史状态成线性关系,另一方面还与不相关

序列  $a_t$  有关。 $a_t$  是当前时刻的新动态,但它对系统的干扰或冲击将被记住,在随后时刻继续影响系统。式(1)正是  $x_t$  不同时刻动态关系的描述,是  $x_t$  的线性动态模型,它与静态回归模型有本质的区别。定义后移算子  $B$ :

$$Bx_t = x_{t-1}, \quad B^i x_t = x_{t-i}$$

则(1)式可写成:

$$(1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2 - \dots - \varphi_p B^p)x_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q)a_t \quad (6)$$

或 
$$\varphi(B)x_t = \theta(B)a_t \quad (7)$$

式中,  $\varphi(B) = 1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2 - \dots - \varphi_p B^p$ , 称为自回归算子;  $\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q$ , 称为滑动平均算子。若  $\varphi(B)$  存在逆算子  $\varphi^{-1}(B)$ , 则由(7)式可得:

$$x_t = \varphi^{-1}(B)\theta(B)a_t \quad (8)$$

在讨论 ARMA 模型之前,先了解 ARMA 的一些性质。

### (1) 格林函数与平稳条件

将 ARMA 模型  $\varphi(B)x_t = \theta(B)a_t$  (讨论中均认为  $\varphi(B)$  与  $\theta(B)$  无公共因子,否则应约去)通过线性变换表示成:

$$x_t = \varphi^{-1}(B)\theta(B)a_t = \sum_{i=0}^{\infty} G_i \cdot a_{t-i} = G(B)a_t \quad (9)$$

$$G(B) = \sum_{i=0}^{\infty} G_i B^i, \quad G(0) = 1$$

$G_i$  被称为格林函数,一般呈负指数下降。(9)式一般称为 ARMA 模型关于白噪声的传递形式,实质上它是一个无限阶的滑动平均模型  $MA(\infty)$ 。

将(9)式代入(7)式得:

$$\varphi(B)G(B) = \theta(B) \quad (10)$$

将(10)展开比较  $B$  的同次幂系数便可由递推算式解出格林函数  $G_i (i=0, 1, 2, \dots)$ 。

有了格林函数,我们就易讨论 ARMA 模型的平稳条件。因为  $x_t = \sum_{i=0}^{\infty} G_i a_{t-i}$ , 所以,要使  $x_t$  平稳,必须  $\sum_{i=0}^{\infty} |G_i| < \infty$ 。欲使上式成立,必须特征根  $|\lambda_i| < 1, i=1, 2, \dots, p$ 。所以,我们也可以说, ARMA 模型具有平稳解的条件是模型的所有特征根均在复平面单位圆内。AR( $p$ )模型的平稳条件与 ARMA( $p, q$ )是一致的, MA( $q$ )模型是无条件平稳的。

### (2) 逆函数与可逆条件

用格林函数可以把  $x_t$  表示成  $a_t$  的线性组合。与此类似,可以用逆函数把白噪声  $a_t$  表示成过去  $x_t$  的线性组合:

$$a_t = x_t - I_1 x_{t-1} - I_2 x_{t-2} - \dots = (1 - I_1 B - I_2 B^2 - \dots)x_t = I(B)x_t \quad (11)$$

此式称为 ARMA 模型的逆转形式,  $I_1, I_2, \dots$  称为可逆函数。(11)式实质上是一无穷阶自回归模型 AR( $\infty$ )。

如果一个 ARMA( $p, q$ )模型的逆函数存在,则称它为可逆的。其实际意义是该模型可以用一个有限阶自回归模型以任意给定的精度逼近。

类似于推导 ARMA 模型特征根及平稳性条件,可以得到 ARMA 模型的可逆性条件:

$$|V_k| < 1, \quad k = 1, 2, \dots, q \quad (12)$$

式中,  $V_k$  是方程  $V^q - \theta_1 V^{q-1} - \dots - \theta_q = 0$  的根。

关于 ARMA 模型的建立,本文主要是采用潘迪特-吴宪铭方法。该法具有较高的程序化水平,能减少人工试凑因素<sup>[1]</sup>。其具体建立过程参见图 1。

ARMA 模型建立后,即可根据模型形式得到预报公式(这里直接给出)。记  $t$  时刻以后的  $L$  步预报值为  $\hat{x}_t(L)$ ,并令  $\hat{x}_t(i) = x_{t+i}, i \leq 0$ ,则一般的 ARMA( $p, q$ ) 模型预报公式为:

$$\hat{x}_t(L) = \begin{cases} \sum_{i=1}^p \varphi_i \hat{x}_t(L-i) \\ - \sum_{j=0}^{q-L} \theta_{L+j} a_{t-j}, & L \leq q \\ \sum_{i=1}^p \varphi_i \hat{x}_t(L-i), & L > q \end{cases} \quad (13)$$

本文在建立 ARMA 模型的同时,也建立了多组自回归及门限自回归模型。限于篇幅,这里不作介绍,只在后面给出实际应用。

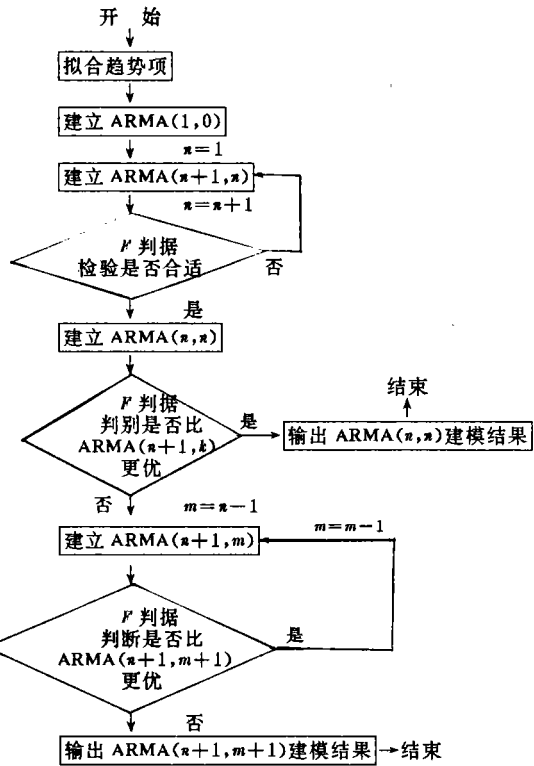


图 1 ARMA 建模流程图

## 2 实例

链子崖危岩体位于三峡工程坝址上游 27km 处,一旦失稳崩滑会引起长江断航,危及三峡工程,被列为中国地质灾害防治的重点。我们收集的较完整的数据资料是链子崖某显著位移监测点 1978~1985 年间按月观测的变形位移值和同期该地区月均气温( $T$ )、降雨量( $R$ )、蒸发量( $D$ )等。下面就对这些数据进行分析处理。

图 2 是危岩体某位移点 7 年又 8 个月(1978 年 1 月~1985 年 8 月)共 92 期水平位移( $X$ )、温度( $T$ )、蒸发量( $D$ )、降雨量( $R$ )过程变化图。首先对直接反映危岩体向江面方向变形的位移值  $x_t$  进行一维建模。从图 2 可以看出,  $x_t$  有近于对数渐增的趋势和以年为周期的变化趋势。令

$$x_t = a + b \ln(t+c) + d \cdot \sin(2\pi t/12 + e) + e_t, t = 1, 2, \dots, 84 \quad (14)$$

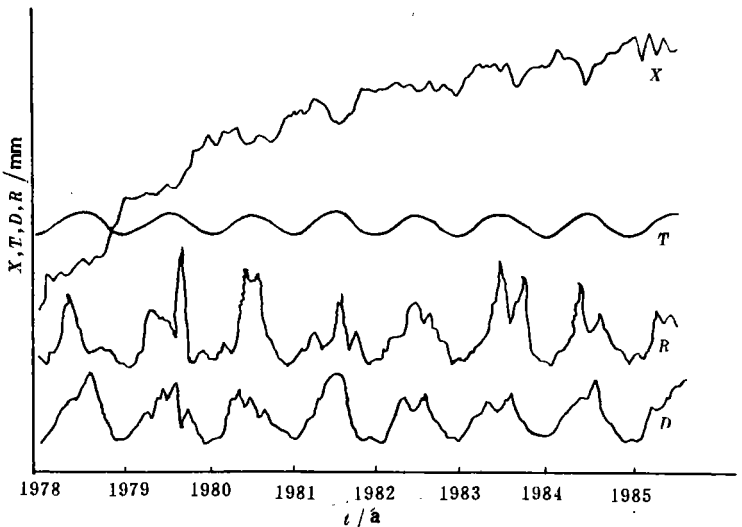


图 2 水平位移  $X$ 、温度  $T$ 、蒸发量  $D$ 、降雨量  $R$  随时间变化曲线

上式中  $x_t, \varepsilon_t$  分别为各期位移值和残差值,  $a, b, c, d, e$  为待求参数,  $t$  是期数, 实际代表时间的延续。用最小二乘拟合得各参数分别为:

$$a = -21.913 \pm 4.20, b = 12,552 \pm 0.96, c = 4.850 \pm 1.69$$

$$d = 1.266 \pm 0.34, e = 0.168 \pm 0.27$$

“±”号后数值为所求参数 95% 的置信区间。残差平方和  $s = \sum_{t=1}^{84} \varepsilon_t^2 = 98.94$ 。拟合曲线如图 3a。

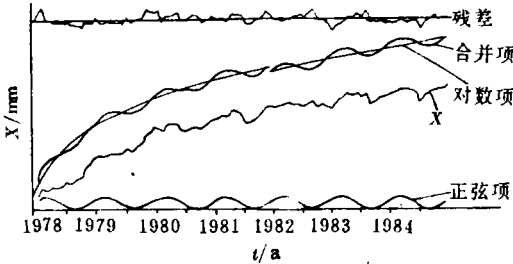


图 3a X 的趋势拟合及残差曲线

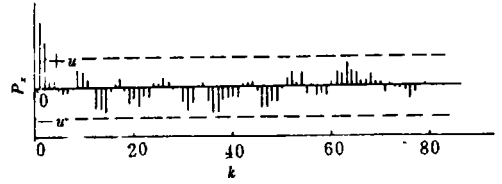


图 3b 趋势拟合后的残差自相关检验图

图 3b 是拟合后的残差自相关检验图。横轴代表各期间隔数, 纵轴为自相关值, 虚线表示自相关值的 95% 上下限。由图可见, 大部分自相关值已落入 95% 置信区间, 但仍有超出的情况。用 ARMA 模型对上面的残差作进一步的拟合建模, 得 ARMA(2,1) 模型。具体形式为:

$$dx_t = -0.152dx_{t-1} + 0.438dx_{t-2} + a_t + 0.596a_{t-1} \tag{15}$$

$dx_t$  是  $x_t$  经过消除趋势项后的残差序列。ARMA(2,1) 建成后残差平方和从  $s = 98.94$  下降到  $s = 65.65$ , 下降比较显著。进一步与趋势项合并拟合, 写成:

$$x_t = a + b \ln(t + c) + d \cdot \sin(2\pi t/12 + e) + \varphi_1 dx_{t-1} + \varphi_2 dx_{t-2} - \theta a_{t-1} + a_t \tag{16}$$

$(dx_t = x_t - [a + b \ln(t + c) + d \cdot \sin(2\pi t/12 + e)])$

得最终参数值如下:

$$a = -21.884 \pm 14.81, b = 12.552 \pm 0.38, c = 4.850 \pm 0.64, d = 1.266 \pm 0.01,$$

$$e = 0.168 \pm 0.45, \varphi_1 = -0.161 \pm 0.67, \varphi_2 = 0.441 \pm 0.30, \theta_1 = -0.586 \pm 0.71,$$

$$s = 65.06$$

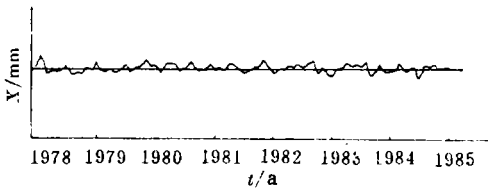


图 4a ARMA 模型拟合后的残差曲线

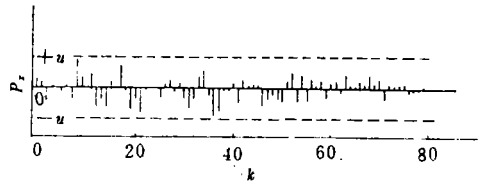


图 4b ARMA 模型拟合后的残差自相关检验图

图 4 是经过 ARMA(2,1) 拟合后的残差图和残差自相关检验图。可以看出, 这时残差更小, 同时自相关值全部落入 95% 的置信区间, 说明这时的残差完全近于白噪声, 从而说明 ARMA 良好的拟合效果。用 SETAR 建模程序对趋势拟合也有同样的效果。

下面建立水平位移  $X$ 、温度  $T$ 、蒸发量  $D$ 、降雨量  $R$  的多维自回归 MAR 模型。这时不能从原始序列中消除周期项 ( $T, D, R$  均是周期性影响因子), 即先只拟合渐增的趋势  $x_t = a + b \ln(t + c) + \varepsilon_t$ , 得:

$$a = -22.950, b = 12.754, c = 5.555, s = 164.33$$

这时的  $\varepsilon_t$  呈周期变化, 显然与气象因素有关。为了研究这种影响, 依次增加维数。下面给出计算机输出的随维数增加的建模结果。

|       |             |             |             |             |             |            |
|-------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|------------|
| dim=1 | 0.064+0.20  | 0.211+0.23  | -0.342+0.19 | p=3         | s=75.06     | Aic=-1.45  |
| dim=2 | 0.574+0.20  | 0.188+0.23  | -0.165+0.21 | 0.045+0.13  | -0.173+0.07 | 0.126+0.00 |
|       | p=3         | s=63.60     | Aic=-9.37   |             |             |            |
| dim=3 | 0.445+0.23  | 0.243+0.26  | -0.157+0.25 | 0.054+0.24  | 0.049+0.21  |            |
|       | 0.041+0.22  | 0.003+0.23  | -0.088+0.22 | -0.112+0.12 | 0.135+0.01  |            |
|       | -0.007+0.01 | -0.006+0.01 | 0.015+0.01  | 0.005+0.00  | -0.003+0.00 |            |
|       | p=5         | s=48.71     | Aic=-13.77  |             |             |            |
| dim=4 | 0.604+0.20  | 0.214+0.23  | -0.179+0.22 | 0.067+0.20  | -0.148+0.11 | 0.051+0.01 |
|       | -0.004+0.01 | -0.003+0.00 | 0.012+0.00  | 0.001+0.00  | -0.001+0.00 | 0.001+0.00 |
|       | p=3         | s=57.71     | Aic=-5.53   |             |             |            |

由结果可以看出:位移  $X$  自身的系数较大,说明位移自回归部分比重较大。温度滞后 2 个月的系数较大,且为负值,说明温度的影响较蒸发量、降雨量明显。蒸发、降雨因子系数很小,说明这两种因素定向影响很微弱,或完全可以由位移自回归部分表达。温度影响滞后 2 个月且系数为负,正好解释了每年 3 月位移下降幅度最大的岩体变形规律,因为每年元月气温最低。随着因子的增多,同阶( $p=3$ )模型的残差平方和依次为 75.06,63.60,58.18,57.71(程序给出)。可见,增加温度因素, $s$  下降较多;考虑蒸发量, $s$  也有一定下降,而增加降雨因子, $s$  几乎没什么下降。所以,如果为了简化模型,可以依次不考虑降雨及蒸发因素。图 5 是  $\text{dim}=3$ ( $s$  最小)时的残差及其自相关检验图。

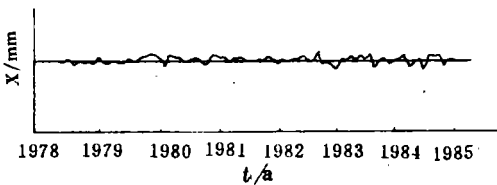


图 5a 多维建模后的残差曲线

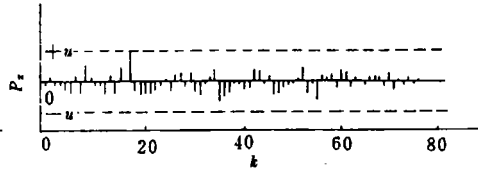


图 5b 多维建模后的残差自相关检验图

上面的各种建模程序在建模的同时也给出了各自的预报,将这些预报值集中于表 1。

表 1 水平位移  $X$  实测与预报值对比表(1985年)

| 月   |             | 1            | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     |       |
|-----|-------------|--------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 观测值 | $X$         | 35.6         | 36.1  | 33.1  | 36.4  | 33.7  | 35.8  | 34.2  | 34.4  |       |
|     | ARMA        | 36.06        | 36.08 | 36.04 | 35.54 | 35.08 | 34.56 | 34.35 | 34.39 |       |
| 预   | SETAR       | 35.92        | 36.42 | 36.76 | 36.65 | 36.26 | 35.74 | 35.28 | 35.03 |       |
|     | $X$         | 34.87        | 35.17 | 35.00 | 35.06 | 35.02 | 35.12 | 35.24 | 35.40 |       |
| 报   | M<br>A<br>R | $X, T$       | 35.05 | 36.07 | 35.62 | 35.57 | 35.36 | 34.40 | 34.37 | 34.52 |
|     |             | $X, T, D$    | 35.05 | 35.49 | 35.92 | 36.57 | 35.57 | 35.17 | 35.01 | 33.79 |
|     |             | $X, T, D, R$ | 34.89 | 35.60 | 35.41 | 35.46 | 35.19 | 34.39 | 34.53 | 34.25 |
|     |             |              |       |       |       |       |       |       |       |       |

表 2 异点改正后的预报误差及中误差(1985年)

| 月           |              | 1     | 2     | 3     | 4     | 5    | 6     | 7    | 8     | $Ms$ |
|-------------|--------------|-------|-------|-------|-------|------|-------|------|-------|------|
| ARMA        |              | 0.46  | -0.02 | 0.54  | -0.86 | 1.38 | -1.24 | 0.15 | -0.01 | 0.77 |
|             | SETAR        | 0.32  | 0.32  | 1.26  | 0.25  | 2.56 | -0.06 | 1.08 | 0.63  | 1.12 |
| M<br>A<br>R | $X$          | -0.73 | -0.93 | -0.50 | -1.34 | 1.32 | -0.68 | 1.04 | 1.00  | 0.98 |
|             | $X, T$       | -0.55 | -0.03 | 0.12  | -0.83 | 1.66 | -1.40 | 0.17 | 0.12  | 0.85 |
|             | $X, T, D$    | -0.55 | -0.61 | 0.42  | 0.17  | 1.87 | -0.63 | 0.81 | -0.61 | 0.85 |
|             | $X, T, D, R$ | -0.71 | -0.50 | -0.09 | -0.94 | 1.49 | -1.41 | 0.33 | -0.15 | 0.86 |

表 2 列出了经异点(1985 年 3 月这一期值有明显的异常)改正后的预报误差及中误差。可

以看出,各种模型预报值与实测值吻合良好,预报偏差的符号基本一致,同步摆动且中误差大致相当,说明拟合的各种模型性向一致,较好地反映了变形的变化规律。

综合本文可以得出以下结论:

1)时序分析用于处理危岩体形变数据,各种模型的拟合效果好,预报准确,是一种值得推广的新方法;

2)一维动态分析特别是 ARMA 模型能充分刻划序列的依赖性,提取变形数据的动态信息,往往不用拟合多维模型就能达到足够好的拟合与预报精度(表 2 中  $M$ , 最小);

3)建立多维模型可以对变形的原因作一定的解释,但相对一维 ARMA,仅从拟合与预报的角度不一定有改进作用,同时建立多维模型时也不应盲目添加因子。

### 参 考 文 献

- 1 S. M. 潘迪特,吴宪铭著. 时间序列及系统分析与应用. 李昌琪译. 北京:机械工业出版社,1988.
- 2 Box G E P, Jenkins G M. Time Series Analysis—Forecast and Control. San Francisco: Holden-Day, 1976.
- 3 项静恬,杜金观,史久恩. 动态数据处理——时间序列分析. 北京:气象出版社,1986.
- 4 陈德豪. 序列性形变观测资料数据处理:[学位论文]. 武汉:武汉测绘科技大学工程测量系,1992
- 5 魏凤英,曹鸿兴. 长期预测数学模型及其应用. 北京:气象出版社,1990.

## The Application of Time Series Analysis in Risky Cliff Observation Data Processing

*Chen Dehao Ding Jiongwang*

(Dept. of Management, South China Construction University, Central Guangyuan Road, Guangzhou, China, 510405)

**Abstract** The paper applies time series analysis to risky cliff observation data processing. Thus the dynamic deformation model of risky cliff is built and the good precision in calculation and forecast is obtained. It is proved that time series analysis could be widely used in data processing of risky cliff observation.

**Key words** time series analysis; deformation measurement; data processing; ARMA; forecast