

# 水准监测网的分段速率整体平差

江在森 巩守文

(国家地震局,第二地形变监测中心;西安市西影路42号,710054)

**摘要** 本文介绍了一种整体处理水准监测网多期复测资料的分段速率整体平差法。该法可在统一基准上整体解算各分时段形变速率,反映出垂直形变场的整体动态变化过程。其平差模型是一种通用的水准网间接平差模型,可包含原有的静态平差和速率动态平差模型。本文还分析了该模型的有关特点,介绍了在平差计算中解巨型法方程式的算法和编程,并给出了算例。

**关键词** 水准监测网;分段速率;整体平差;平均速率

**分类号** P207;P224

为了研究地壳运动及其与地震的关系,水准监测网复测资料的平差,除削弱观测误差影响、消除不符值外,我们更希望从平差结果中获得地壳变形的过程信息。由于后一目的,水准监测网的平差方法已从最初的静态平差发展到(一次)速率模型动态平差,以及后来的含高次速率未知参数(多项式)的动态平差法。文献[1]首次提出了形变监测网分段线性动态平差的完整模型,开拓了动态平差的新思路。但由于该文平差模型中未引入速率未知参数,而垂直形变场分析通常又以速率为基本量,以及用该模型作区域网平差时巨型法方程的解算等实际问题尚未讨论,因此,本文以文献[1]相同的思路,提出一种与原有速率动态平差法相衔接、便于实际应用的水准监测网分段(一次)速率整体平差方法,并对有关问题作初步讨论。

## 1 分段速率模型整体平差法

### 1.1 分段速率动态模型

水准网中各水准点的高程可看作时间  $t$  的函数  $H(t)$ 。由于地壳运动的复杂性,由有限次观测无法求取函数  $H(t)$  的表达式。假设其为分段线性的,则  $H(t) = H_0 + \lambda t$ 。求其速率,即  $\frac{dH}{dt} = \lambda$ 。若有  $m$  期观测值,我们可划分出  $m-1$  个时段,求取  $m-1$  个速率(见图1)。

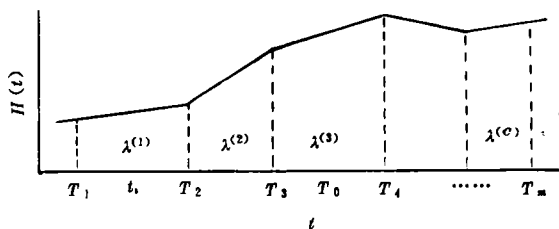


图1

### 1.2 整体平差的误差方程

设水准点在  $T_1-T_2$  时段速率为  $\lambda^{(1)}$ ,  $T_2-T_3$  时段速率为  $\lambda^{(2)}$ , ...,  $T_{m-1}-T_m$  时段速率为  $\lambda^{(c)}$  ( $c=m-1$ ), 以及平差中心时刻  $T_0$  时的高程改正  $\delta H$  为未知参数(其近似高程为  $H^0(T_0)$ )。按间接平差法,我们可由任一时刻  $t_i$  任两点  $(j, k)$  的高差观测值  $h(jk)$ , 组成动态整体平差的误差方程:

$$v(jk)_i = -\delta H_j(T_0) - \underset{i \times c \ c \times 1}{b_i^T} \hat{\lambda}_j + \delta H_k(T_0) + \underset{1 \times c \ c \times 1}{b_i^T} \hat{\lambda}_k - l(jk), \tag{1}$$

式中,  $\hat{\lambda}_j = [\hat{\lambda}_j^{(1)} \hat{\lambda}_j^{(2)} \dots \hat{\lambda}_j^{(c)}]^T$ ,  $b_j = [b_1 \ b_2 \dots b_c]^T$ ,  $l(jk)_i = H_j^0(T_0) - H_k^0(T_0) + h(jk)_i$ ,  $\hat{\lambda}_j$  为第  $j$  号点的  $c$  个速率,  $b_i$  的各元素为  $t_i$  时刻至  $T_0$  时刻所经各时段的时间长度(未经过的时段元素为0), 其取值与  $T_0$  的选择及  $t_i$  有关, 如图1. 当  $T_1 < t_1 < T_2, T_3 < T_0 < T_4$ ,

$$b_i = [T_2 - t_1 \ T_3 - T_2 \ T_0 - T_3 \ 0 \dots]^T$$

若有  $m$  期资料共  $n$  个高差观测值, 水准网中有  $m_1$  个点, 则未知参数量  $u = m_1 \cdot m$ . 用矩阵表达误差方程式为:

$$V = B \hat{X} - L \tag{2}$$

其中,  $\hat{X} = [\delta H_1 \ \hat{\lambda}_1^T \ \delta H_2 \ \hat{\lambda}_2^T \dots \hat{\lambda}_{m_1}^T]^T$ ,  $[B]_i = [0 \dots 0 \ -1 \ -\underset{1 \times c}{b_i^T} 0 \dots 1 \ \underset{1 \times c}{b_i^T} 0 \dots]$ ,  $L = [l_1 \ l_2 \dots l_n]^T$ .

### 1.3 用附加条件法求广义伪逆平差解

$B$  的秩  $R(B) < u, u - R(B) = d$ . 秩亏数  $d$  为时段数加1, 即等于资料期数  $m$  (网中水准点的高程改正和  $m-1$  个分时段速率共  $m$  个未知数均需要绝对量作为基准, 而水准监测网中通常无绝对观测量)。引入  $d$  个附加条件:

$$S_p^T \hat{X} = 0 \tag{3}$$

其中,  $S_p^T = \underset{d \times u}{S^T} \underset{u \times u}{P_X}$ ,  $S^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$ ,  $P_X = \text{diag}[P_1 \ P_2 \ \dots \ P_u]$

上式中  $P_i (i=1, 2, \dots, u)$  为各水准点未知数在确定平差基准中的权值。取  $\Phi = V^T P V + \underset{1 \times u \ u \times 1}{S^T P_X S}$

$2k^T (S_p^T \hat{X}) = \min, \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{X}} = 0$ , 得

$$\begin{cases} N \hat{X} + S_p k = W \\ S_p^T \hat{X} = 0 \end{cases} \tag{4}$$

记  $N_s = \begin{bmatrix} N & S_p \\ S_p^T & 0 \end{bmatrix}$ ,  $X_s = \begin{bmatrix} \hat{X} \\ k \end{bmatrix}$ ,  $W_s = \begin{bmatrix} W \\ 0 \end{bmatrix}$

(4) 式则写成:  $N_s X_s = W_s$ ,  $\tag{5}$

$X_s = N_s^{-1} W_s$ ,  $\tag{6}$

其中,  $N_s^{-1} = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xs} \\ Q_{sx} & Q_{ss} \end{bmatrix}$

式中,  $Q_{xx}$  即为未知参数的协因数阵, 单位权方差为:

$$\bar{\mu}^2 = \frac{V^T P V}{n - u + d} \tag{7}$$

### 1.4 平均速率

在作分段速率整体平差时, 我们可由各分段速率计算出各水准点任两时刻  $t_i$  至  $t_j$  间(更长

时段)高程变化的平均速率:

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{t_j - t_i} \left[ \sum_{k=0}^{f-1} (T_{k+1} - T_k) \lambda^{(k)} + (T_0 - t_i) \lambda^{(0)} + (t_j - T_f) \lambda^{(f)} \right] \quad (8)$$

$(T_{0-1} < t_i < T_0, T_f < t_j < T_{f+1})$

由上式可见平均速率是未知参数的线性函数,我们把它写成:

$$\bar{\lambda}_{n \times 1} = F^T X_{n \times m \times 1} \quad (9)$$

$$Q_{\bar{\lambda}\bar{\lambda}} = F^T Q_{XX} F \quad (10)$$

## 2 分段速率整体平差的几个特点

### 2.1 分段速率整体平差模型的合理性

虽然地壳形变的时空分布极不均匀,而且由于区域水准监测网的复测周期较长,我们无法获取资料所跨时段内的地壳微动态变化,但累计形变量是复测资料所能反映出来的(形变速率也就是累计形变量与时段长度之比)。因此,通过分段线性假设,把各时段的形变连接起来,既切合实际又较严密,可在很大程度上避免函数模型误差。这样整体解算,又可解决平差基准的统一,从而能反映垂直形变场的整体动态变化过程。

### 2.2 分段速率整体平差模型的通用性

分段速率整体平差模型是一种水准网间接平差通用模型。当模型中的  $m$  小于到等于2时便为原速率模型动态平差,当  $m$  再小至为1时即为静态平差。因而,它与原水准监测网速率动态平差模型相衔接,可包含各种平差模型,即静态平差、速率模型动态平差可视为分段速率整体平差的特例。这将有利于平差计算程序的通用性。

### 2.3 分段速率整体平差模型的实用性

前几年就有人提出含高次速率项的动态平差模型,并已用于实际资料处理。但在处理地壳形变速率变化较复杂地区的多期资料时,采用含高次速率的动态平差可能出现一些实际困难,如平差模型中速率项次若取少了,与资料期数不匹配,模型误差就大;速率项太多又很不实用(地壳形变分析通常主要考虑(一次)速率),且难以保证计算精度(因更高次速率项增多了,可能导致法方程病态)。而分段速率整体平差完全不存在以上问题,因而是一种实用的方法。

过去用分期(时段)平差解算多期资料时,因没有用数学模型把各时段的形变量及其速率连接起来,掌握不好,就可能出现基准不统一,各时段速率之间比较不够严密。而采用分段速率整体平差法,在统一基准上用分段线性模型把各时段的形变(速率)连接起来了,各时段的形变速率具有可比性,形变量具可加性。因而它不仅能较客观地反映形变场的整体动态变化,也为我们进一步用其它数学方法进行形变场分析打好了基础。

由于分段速率整体平差各时段的形变量具可加性,我们可根据需要求出更长时段的平均速率(趋势速率),这将有助于研究不同时间长度的形变及速率,以及不同地区形变场的比较等。若用于编制全国或大区域垂直形变速率图,则较完整的复测资料可全部采用,不必再为减小模型误差而进行资料筛选,并将提高平差结果的精度。

虽然分段速率整体平差的未知参数大量增多,但由本文给出的平差模型组成的法方程系数阵为变带宽稀疏矩阵,便于采用特殊的压缩存储算法解方程及求协因数阵,区域监测网多期资料的整体平差计算可在微机上完成。

## 2.1 应用分段速率整体平差法需注意的问题

本文给出的平差模型是水准监测网分段速率整体平差基本的、通用的模型,直接采用此模型一般能满足地震分析预报工作中及时处理当年垂直形变资料的需要。计算工作较简单,只要分段速率数与资料期数相匹配,就不会发生函数模型与观测实际不符的函数模型偏差,分段速率的精度也能达到分期平差的速率精度。但还必须看到,实测水准网中并不是所有水准点的速率变化都剧烈,直接套用本文平差模型,所有的水准点都设立  $m-1$  时段速率就有些浪费,存在不必要的参数<sup>[3]</sup>。要想资料处理得更满意,完全可以逐点灵活设立分段速率参数。当经检验两个时段间或几个时段间速率变化不显著时,即可用一个速率来代替。这样处理在理论上更严密。合理地减少函数模型中的参数,可使参数的方差估计值变小而获得较理想的平差结果。

## 3 平差计算中的几个实际问题

### 3.1 平差中心时刻与分段时刻的选取

分段速率整体平差的平差中心时刻  $T$ ,可以根据实际需要任选,它的改变仅使高程改正值变化,对各时段速率及其精度无影响。而分段时刻  $T_1, T_2, \dots, T_m$  的选择对各时段的速率值及其精度有影响。一般应根据资料的施测年月来确定分段时刻。第一时段的起点  $T_1$  取最早观测值的观测时刻,最后一时段的终点  $T_m$  取最晚观测值的观测时刻,中间分段时刻应尽量接近每一期资料观测时刻的中心时刻。这样计算精度也较高。

### 3.2 法方程的解算

我们知道,用高斯约化法解线性方程组(或矩阵求逆),不仅要求系数阵满秩,还要求其左上各阶主子式均非奇异。而本文(4)式给出的法方程系数阵的左上第  $u-1+d$  到  $u$  阶主子式奇异,因此不能直接计算。应在计算前先将法方程系数阵右下的附加条件行列向左上对调  $d$  行  $d$  列(法方程常数项也跟着对调),这样既满足左上各阶主子式均非奇异的条件,又保持了对称性,可以顺利解算<sup>[4]</sup>。

### 3.3 关于计算程序设计

区域水准监测网的多期资料分段速率整体平差未知参数量大,这种数千阶巨型法方程式的解算对计算机内存及机时的需要量都太大,因此必须采用特殊压缩存储算法。文献[4]较具体地介绍了压缩存储约化法用于水准网速率模型平差中的编程问题。在此,我们再给出分段速率整体平差组成法方程系数阵时直接一维压缩存储的通用方法。

设各相连水准点编号的最大间隔为  $rd, (i=1, \dots, m_1)$ , 并已由程序存入相应数组,则法方程主元在一维压缩数组中的序号数组元素  $r_k (k=1, \dots, u)$  可由以下二重循环来确定:

$$r((i-1)m+j) = r((i-1)m+j-1) + m \cdot rd(i) + j \quad (j=1, m; i=1, m_1)$$

在组成法方程系数时,可开设  $2m$  个元素的一维实型数组和一相同大小的整型数组为工作单元,存放一误差方程系数及其相应的未知参数序号(用后即冲消),再把由此误差方程算得的法方程系数累加值依  $r_k$  数组确定的对应关系直接存入一维压缩数组中。

用压缩存储约化法解算分段速率整体平差法方程,其系数阵元素的存入量可由原来的  $(m_1 \cdot m)^2$  ( $m_1$  为网中水准点数,  $m$  为资料期数)减少到  $5 \sim 8m_1 \cdot m_2$ 。作区域水准监测网平差计算,法方程系数阵元素的存入量仅为总元素量的  $1 \sim 2\%$ ,在具 2M 内存的 286、386 微机即可进行较大区域水准监测网多期资料分段速率整体平差计算。

### 4 算 例

如图2所示的水准网共有1977年至1991年5期观测资料列于表1,分别以1977年6月、1980年7月、1983年6月、1987年8月、1991年8月作为分界时刻,划分出4个时段,选4、6、7、11、12、14、15号点为拟稳点,作分段速率整体拟稳平差结果列于表2。

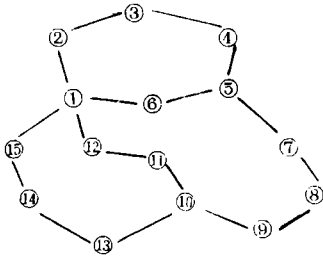


图2

表1 观测值信息表

No	起迄点	距离 /km	时间	观测高差 /m	时间	观测高差 /m	时间	观测高差 /m	时间	观测高差 /m	时间	观测高差 /m
1	1 2	5.3	77.6	15.2882	80.6	15.2775	83.6	15.2667	87.7	15.2731	91.7	15.2663
2	2 3	5.8	77.6	9.2736	80.6	9.2735	83.6	9.2728	87.7	9.2733	91.7	9.2737
3	3 4	5.4	77.6	5.9553	80.6	5.9784	83.6	5.9991	87.7	5.9806	91.7	6.0006
4	4 5	6.1	77.6	-1.3492	80.6	-1.3404	83.6	-1.3315	87.7	-1.3408	91.7	-1.3307
5	5 6	4.9	77.6	-20.8922	80.6	-20.9101	83.6	-20.9195	87.7	-20.9131	91.7	-20.9201
6	6 1	5.1	77.6	-8.2695	80.6	-8.2809	83.6	-8.2901	87.7	-8.2776	91.7	-8.2962
7	5 7	5.3	77.7	-3.6423	80.7	-3.6514	83.7	-3.6416	87.8	-3.6501	91.8	-3.6408
8	7 8	6.0	77.7	18.3230	80.7	18.3397	83.7	18.3482	87.8	18.3406	91.8	18.3513
9	8 9	5.3	77.7	6.5676	80.7	6.5679	83.7	6.5753	87.8	6.5692	91.8	6.5787
10	9 10	5.4	77.7	-7.8802	80.7	-7.8872	83.7	-7.8997	87.8	-7.8902	91.8	-7.9005
11	10 11	4.8	77.7	-10.0206	80.7	-10.0281	83.7	-10.0381	87.8	-10.0306	91.8	-10.0397
12	11 12	4.5	77.7	-18.9101	80.7	-18.9113	83.7	-18.9170	87.8	-18.9133	91.8	-18.9190
13	12 1	4.7	77.7	-13.6123	80.7	-13.6182	83.7	-13.6298	87.8	-13.6307	91.8	-13.6316
14	10 13	7.2	77.8	-11.4157	80.8	-11.4108	83.6	-11.4051	87.8	-11.4112	91.8	-11.4087
15	13 14	5.8	77.8	-12.5630	80.8	-12.5642	83.6	-12.5677	87.8	-12.5659	91.8	-12.5692
16	14 15	5.9	77.8	-7.8287	80.8	-7.8395	83.6	-7.8527	87.8	-7.8451	91.8	-7.8565
17	15 1	5.4	77.8	-10.7415	80.8	-10.7456	83.6	-10.7526	87.8	-10.7487	91.8	-10.7501

表2 水准监测网分段速率整体拟稳平差计算结果

点号	基准权	$\lambda^{(1)}$ $m_1$ /mm·a <sup>-1</sup>	$\lambda^{(2)}$ $m_2$ /mm·a <sup>-1</sup>	$\lambda^{(3)}$ $m_3$ /mm·a <sup>-1</sup>	$\lambda^{(4)}$ $m_4$ /mm·a <sup>-1</sup>	$\bar{\lambda}$ $m_5$ /mm·a <sup>-1</sup>
1	0.0	-3.54±0.81	-5.02±0.83	3.02±0.58	-3.84±0.61	-1.98±0.21
2	0.0	-6.86±1.27	-8.70±1.32	4.85±0.93	-5.80±0.97	-3.47±0.34
3	0.0	-6.63±1.41	-9.03±1.46	5.26±1.03	-5.91±1.08	-3.40±0.37
4	1.0	1.32±1.29	-2.23±1.34	0.99±0.95	-0.91±0.99	-0.13±0.34
5	0.0	4.54±1.07	0.64±1.11	-0.99±0.78	1.50±0.81	1.25±0.28
6	1.0	-0.60±1.01	-2.20±1.05	0.28±0.74	0.31±0.77	-0.42±0.27
7	1.0	0.83±1.25	3.72±1.30	-2.49±0.92	2.99±0.94	1.04±0.33
8	0.0	5.64±1.43	6.31±1.48	-3.70±1.04	4.73±1.07	2.75±0.38
9	0.0	5.07±1.39	8.55±1.44	-4.61±1.02	6.28±1.04	3.24±0.37
10	0.0	2.05±1.16	3.86±1.20	-1.69±0.84	2.86±0.86	1.53±0.31
11	1.0	-0.70±1.09	0.59±1.13	0.05±0.79	0.49±0.81	0.12±0.29
12	1.0	-1.33±0.98	-1.19±1.01	0.88±0.71	-1.02±0.73	-0.56±0.26
13	0.0	3.10±1.40	5.12±1.43	-2.27±0.98	2.51±1.02	1.76±0.36
14	1.0	2.26±1.28	3.29±1.31	-1.31±0.90	0.89±0.93	1.09±0.33
15	1.0	-1.78±1.09	-1.99±1.11	1.42±0.76	-2.76±0.79	-1.14±0.28

观测值每公里中误差:±1.20mm 分段速率总平均中误差:±1.08mm 平均速率平均中误差:±0.32mm

水准监测网分段速率整体平差法是一种理论上较严密又较切合实际的平差方法,它可在

统一基准上整体解算各分时段的速度,对于研究形变场整体动态变化及其与地震的关系很有实际意义。这种平差模型又是一种通用的水准网间接平差模型,可包含原有的静态平差和速率动态平差模型,便于计算程序的通用。还便于采用压缩存储算法编程,使区域水准网多期资料的整体平差计算可在微机上完成,因而是一种值得推广的平差方法。

我们已将此平差法用于西海固地区<sup>[6]</sup>和滇西地区区域水准网多期复测资料的处理,取得了较满意效果。

### 参 考 文 献

- 1 顾国华.形变监测网的分段线性动态平差.地壳形变与地震,1990,10(2):26~34
- 2 於宗俦,鲁林成.测量平差基础(增订本).北京:测绘出版社,1984
- 3 陶本藻.模型误差理论及其在地形变数据处理中的应用.地壳形变与地震,1991,11(11):1~10
- 4 江在森.压缩存储约化法在水准网间接平差中的应用.地壳形变与地震,1988,8(1):99~107
- 5 江在森.大规模水准监测网平差程序设计.测绘通报,1989(2):21~24
- 6 江在森,凌 晔,唐传芬.西海固地区近期垂直形变场分析.高原地震,1993,5(1):1~8

## The Overall Adjustment of the Level Monitoring Network with Piece-wise Velocity Models

*Jiang Zaisen Gong Shouwen*

(No. 2 Crustal Deformation Monitoring Centre, SSB, Xiying Road 42, Xi'an, China, 710054)

**Abstract** In this paper, a kind of practical adjustment method that disposes the data of level net observed in different periods as whole is introduced. It is overall adjustment with piece-wise velocity models. The adjustment can solve deformation velocities of different periods on uniform datum and reflect kinematic evolutionary process of the vertical deformation field as whole. The model of the adjustment is a general adjustment of indirect observations from level net, because it contains traditional static adjustment and traditional dynamic adjustment with velocity models. The characteristic of the adjustment is analysed, the algorithm and program composition to solve the enormous normal equation in the adjustment is introduced, and an example is given.

**Key words** level monitoring net; piece-wise velocity; overall adjustment; average velocity