

测量球面无标记物体定轴转动 角位移的客观散斑法

于晓江 栾胜奎 朱光世

(武汉测绘科技大学光学仪器系, 武汉珞瑜路 39 号, 430070)

摘 要 本文提出了测量球面无标记物体定轴转动角位移的客观散斑法。通过记录球面散射的散斑位移, 计算球面物体的定轴角位移, 并给出了实验验证。测量方法简单、测量精度高。实验结果与理论相符。

关键词 激光散斑; 散斑计量; 统计光学

分类号 O438

0 引 言

通过记录物体位移或形变前后表面散射形成的散斑场(如散斑照相), 对散斑场进行分析, 获取物体位移或形变的信息从而达到测算物体位移或形变的目的, 这就是本文所称的客观散斑法。该法光路简单, 测量方便, 特别是测量刚体的运动和位移, 尤为实用。但一般来说, 理论上要复杂一些, 目前看到的文献记载还不多。P. Jacquot^[1]与伍小平^[2]各自独立地研究了利用客观散斑测量平面物体的整体平动和转动(表面倾斜)问题。P. M. Boone^[3]提出了一种近场客观散斑法, 可以测量物体各部分的相对形变, 但必须将记录介质固定在物体的某一点上, 而且仅限于平面物体。F. P. Ching^[4]提出的远场客观散斑法, 可以测量曲面物体表面各点的三维形变, 但需要将感光物质涂在物体表面, 一般来说比较麻烦, 甚至在许多情况下难以实现。龙品^[5]对柱面物体绕轴旋转问题进行了研究。本文试图在上述工作的基础上研究利用客观散斑测量球面无标记物体定轴微小角位移的方法, 并将结果推广到任意旋转对称面绕对称轴角位移的测量。最后通过实验验证实验结果与理论的一致性。

1 测量球面无标记物体定轴角位移理论

设用点光源照明被测球面(图 1), 以球心为原点取球坐标系, S 为点光源, P 为观察点, Q 为球面上被照明区域中任意一点, 它们在球坐标系中的坐标分别为: $S: (r_s, \theta_s, \varphi_s)$ 、 $P: (r_p, \theta_p, \varphi_p)$ 、 $Q: (a, \theta, \varphi)$ 其中 a 为球面半径, 则根据文献[6], P 点的复振幅由下式给出:

$$U(P) = \frac{\exp(jk(r_s - a + r_p - a + \frac{r_s a}{r_s - a} + \frac{r_p a}{r_p - a}))}{j\lambda(r_s - a)(r_p - a)}$$

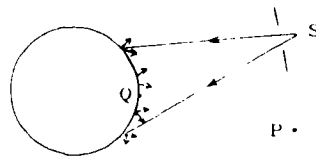


图 1 点光源照明被测球面

$$\iint_{\Sigma} D(\theta, \varphi) \cdot \exp\left\{-jk \frac{r_s a}{r_s - a} [\sin\theta, \sin\theta \cos(\varphi_s - \varphi) + \cos\theta, \cos\theta]\right\} \\ \cdot \exp\left\{-jk \frac{r_p a}{r_p - a} [\sin\theta, \sin\theta \cos(\varphi_p - \varphi) + \cos\theta, \cos\theta]\right\} d\sigma \quad (1)$$

其中 λ 为照明波长, $D(\theta, \varphi)$ 为球面上随机漫反射函数, $k = 2\pi/\lambda$ 为波数, Σ 为照明区域, $d\sigma$ 为积分面元, j 为虚数。

由(1)式可知, 当 λ, Σ 及 $D(\theta, \sigma)$ 确定之后, (1)式实际上表示下面三者的关系: S 点的位置 $(r_s, \theta_s, \varphi_s)$, P 点的位置 $(r_p, \theta_p, \varphi_p)$ 及 P 点的复振幅 $U(P)$ 或 P 点的光强 $|U(P)|^2$ 。我们可以从两个方面来理解(1)式的物理意义:

1. 对固定位置的观察点 P , S 点的位置决定了 P 点的光强。

2. 对固定光强的 P 点, S 点的位置决定了 P 点的位置。例如, 对于散斑场中的一个亮点, 当光源作微小位移时, 该亮点也作微小位移而保持其光强不变(或近似不变。)

下面就根据第二个物理意义, 推导测量角位移的散斑位移公式。设球面绕 x 轴转动 $\delta\varphi$, 相当于光源转动 $\delta\varphi$, 而 r_s, θ_s 保持不变。若保持 P 点光强不变, P 点必然有一个相应的位移 $(\delta r_p, \delta\theta_p, \delta\varphi_p)$, 从(1)式可以看到, 积分号前位相因子中的 r_s 产生增量, 对光强并无影响, 分母中 r_s 的微小改变对光强影响很小, 可忽略不计, 重要的是积分号内的位相改变, 若积分号内的位相改变为零, 则可认为光强保持不变。令积分号内的位相增量为零, 即

$$\delta\left\{\frac{r_s}{r_s - a} [\sin\theta, \sin\theta \cos(\varphi_s - \varphi) + \cos\theta, \cos\theta]\right\} \\ + \frac{r_p}{r_p - a} [\sin\theta, \sin\theta \cos(\varphi_p - \varphi) + \cos\theta, \cos\theta] = 0 \quad (2)$$

当增量很小时, 上式可用微分运算, 展开得:

$$-\frac{r_s}{r_s - a} \sin\theta, \sin\theta \sin(\varphi_s - \varphi) \delta\varphi_s - \frac{a}{(r_s - a)^2} [\sin\theta, \sin\theta \cos(\varphi_s - \varphi) \\ + \cos\theta, \cos\theta] \delta r_s + \frac{r_p}{r_p - a} [\cos\theta, \sin\theta \cos(\varphi_p - \varphi) - \sin\theta, \cos\theta] \delta\theta_p \\ + \frac{r_p}{r_p - a} [-\sin\theta, \sin\theta \sin(\varphi_p - \varphi)] \delta\varphi_p = 0 \quad (3)$$

令

$$C_s = \frac{r_s}{r_s - a}, \quad C_p = \frac{r_p}{r_p - a} \quad (4)$$

将(3)整理得:

$$\left(-C_s \sin\theta, \sin\theta, \delta\varphi_s - \frac{a}{r_s^2} C_s^2 \sin\theta, \cos\theta, \delta r_s + C_s \cos\theta, \cos\theta, \delta\theta_s\right. \\ \left.- C_p \sin\theta, \sin\theta, \delta\varphi_p, \sin\theta \cos\theta + (C_s \sin\theta, \cos\theta, \delta\varphi_s - \frac{a}{r_s^2} C_s^2 \sin\theta, \sin\theta, \delta r_s\right. \\ \left.+ C_p \cos\theta, \sin\theta, \delta\theta_p + C_p \sin\theta, \cos\theta, \delta\varphi_p, \sin\theta \sin\theta\right. \\ \left.+ (-\frac{a}{r_p^2} C_p^2 \cos\theta, \delta r_p - C_p \sin\theta, \delta\theta_p) \cos\theta = 0 \quad (5)$$

由于 $\sin\theta \cos\theta, \sin\theta \sin\theta, \cos\theta$ 可取任意值, 上式成立的充要条件是它们的系数分别为零。这样就得到一个关于 $\delta r_p, \delta\theta_p, \delta\varphi_p$ 的三元线性方程组, 其矩阵形式为:

$$\begin{pmatrix} -\frac{a}{r_p^2}C_p^2\sin\theta_p\cos\varphi_p & C_p\cos\theta_p\cos\varphi_p & -C_p\sin\theta_p\sin\varphi_p \\ -\frac{a}{r_p^2}C_p^2\sin\theta_p\sin\varphi_p & C_p\cos\theta_p\sin\varphi_p & C_p\sin\theta_p\cos\varphi_p \\ \frac{a}{r_p^2}C_p^2\cos\theta_p & C_p\sin\theta_p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta r_p \\ \delta\theta_p \\ \delta\varphi_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_p\sin\theta_p\sin\varphi_p \\ -C_p\sin\theta_p\cos\varphi_p \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

上式的解为:

$$\begin{cases} \delta r_p = -\frac{r_p^2 C_p}{a C_p^2} \sin\theta_p \sin\theta_p \sin(\varphi_p - \varphi_p) \delta\varphi_p \\ \delta\theta_p = \frac{C_p}{C_p} \cos\theta_p \sin\theta_p \sin(\varphi_p - \varphi_p) \delta\varphi_p \\ \delta\varphi_p = -\frac{C_p \sin\theta_p}{C_p \sin\theta_p} \cos(\varphi_p - \varphi_p) \delta\varphi_p \end{cases} \quad (7)$$

(7)表明,当光源作微小角位移 $\delta\varphi_p$ 时, P 点在空间三个坐标方向都产生位移。对于远场散斑,散斑颗粒沿纵向成长型,可以认为纵向微小位移 δr_p 对整个散斑场的横向分布无影响,因此当在 P 点垂直于 r_p 放置记录材料时,便可记录下散斑的横向位移。以上的计算是设光源位移 $\delta\varphi_p$,球面未动,而实际上是球面转动 $\delta\varphi = \delta\varphi_p$ 。坐标轴也转动了 $\delta\varphi$,光源位置不变(图2), P 点移动到 P' 点, r_p 与 r_p' 在 φ 方向的夹角为:

$$\delta\psi = [(\varphi_p + \delta\varphi_p) - (\varphi_p + \delta\varphi_p)] - (\varphi_p - \varphi_p) = \delta\varphi_p - \delta\varphi_p \quad (8)$$

将(7)式的第三式代入(8)式得:

$$\delta\psi = [1 + \frac{C_p \sin\theta_p}{C_p \sin\theta_p} \cos(\varphi_p - \varphi_p)] \delta\varphi_p \quad (9)$$

而 P 到 P' 的实际横向位移为:

$$\begin{aligned} \delta t &= \sqrt{(r_p \delta\theta_p)^2 + (r_p \sin\theta_p \delta\psi)^2} \\ &= r_p \delta\varphi_p \left\{ \left[\frac{r_p (r_p - a)}{r_p (r_p - a)} \cos\theta_p \sin\theta_p \sin(\varphi_p - \varphi_p) \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + \sin^2\theta_p \left[1 + \frac{r_p (r_p - a) \sin\theta_p}{r_p (r_p - a) \sin\theta_p} \cos(\varphi_p - \varphi_p) \right]^2 \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad (10)$$

其中我们用到了(5)、(9)及(7)式的第二式,并将 $\delta\varphi_p$ 改写为 $\delta\varphi$ 表示球面的角位移。最后得到了远场散斑测量球面物体角位移的公式:

$$\begin{aligned} \delta\varphi &= \frac{\delta t}{r_p} \left\{ \left[\frac{r_p (r_p - a)}{r_p (r_p - a)} \cos\theta_p \sin\theta_p \sin(\varphi_p - \varphi_p) \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + \sin^2\theta_p \left[1 + \frac{r_p (r_p - a) \sin\theta_p}{r_p (r_p - a) \sin\theta_p} \cos(\varphi_p - \varphi_p) \right]^2 \right\}^{-1/2} \end{aligned} \quad (11)$$

式中 δt 可由对在 P 点作二次曝光的散斑图进行逐点分析获得。

2 讨论

1. 推导(11)式的过程中,曾假定球面只有 φ 方向的转动,这并不意味着(11)式具有局限

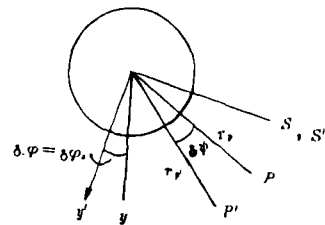


图2 角位移前后各点位置的变化

性,因为总可以将转轴取为 x 轴,使球面只有 φ 方向的转动。

2. (11)式对光源 S 与观察点 P 的位置没有任何限制,它们不必都在球的赤道面内,也不必在同一纬度($\theta_s = \theta_o$),而是具有相当的任意性。

以上两条表明(11)式是测量球面物体定轴角位移的普遍公式。

3. 下面根据转轴与 r_s, r_o 平面的相对位置讨论几种特殊情况:

a. 转轴与 r_s, r_o 平面垂直。此时有 $\theta_s = \theta_o = \pi/2$, 则(11)式成为:

$$\delta\varphi = \delta t / r_s \left[1 + \frac{r_s(r_s - a)}{r_o(r_s - a)} \cos(\varphi_s - \varphi_o) \right] \quad (12)$$

当 $r_s = r_o$ 时, 上式简化为:

$$\delta\varphi = \delta t / r_s [1 + \cos(\varphi_s - \varphi_o)] \quad (13)$$

若用平行光照明, $r_s \rightarrow \infty$, 则(12)成为:

$$\delta\varphi = \delta t / r_s \left[1 + \frac{r_s - a}{r_s} \cos(\varphi_s - \varphi_o) \right] \quad (14)$$

由于在一般测量中取 r_s, r_o 平面位于水平面比较方便, 所以(12)、(13)、(14)式在转轴竖直时测量角位移比较方便。

b. 转轴位于 r_s, r_o 平面内, r_s, r_o 在转轴同侧。此时有 $\varphi_s = \varphi_o$, (11)式成为:

$$\delta\varphi = \delta t / r_s \left[\sin\theta_s + \frac{r_s(r_s - a)}{r_o(r_s - a)} \sin\theta_o \right] \quad (15)$$

当 $r_s = r_o$ 时, 上式简化为:

$$\delta\varphi = \delta t / r_s [\sin\theta_s + \sin\theta_o] \quad (16)$$

若用平行光照明, 则(15)式成为:

$$\delta\varphi = \delta t / r_s \left[\sin\theta_s + \frac{r_s - a}{r_s} \sin\theta_o \right] \quad (17)$$

c. 转轴位于 r_s, r_o 平面, r_s, r_o 在转轴两侧。此时有 $\delta\varphi_s - \delta\varphi_o = \pm\pi$, (11)式成为:

$$\delta\varphi = \delta t / r_s \left[\sin\theta_s - \frac{r_s(r_s - a)}{r_o(r_s - a)} \sin\theta_o \right] \quad (18)$$

当 $r_s = r_o$ 时:

$$\delta\varphi = \delta t / r_s [\sin\theta_s - \sin\theta_o] \quad (19)$$

当 $r_s \rightarrow \infty$ 时, (18)式成为:

$$\delta\varphi = \delta t / r_s \left[\sin\theta_s - \frac{r_s - a}{r_s} \sin\theta_o \right] \quad (20)$$

从以上公式可以看到, (13)、(16)、(19)与球面半径无关, 即在测量中不必先测球面半径, 因而使用起来特别方便。

4. 最后讨论光源位于转轴上的情况, 在(11)式中令 $\theta_s = 0$, 或 π , 得:

$$\delta\varphi = \delta t / r_s \sin\theta_o \quad (21)$$

此式的物理意义是, 当球面转过 $\delta\varphi$ 时, 散斑场对于球心也转过相同的角度, 即散斑场与球的相对位置不变, 整体同步运动。注意此式对于汇聚光、发散光及平行光都是实用的。

3 几点推广

首先, 可以指出的是(21)式适用于任意曲面的定轴角位移测量, 只要光源沿轴照明即可。

因为点光源产生的光波具有旋转对称性,当曲面转动时,散斑分布仅由曲面决定,因此空间散斑必然与曲面的转动同步。

其次,我们注意到式(14)与文献[5]中测圆柱转角的理论公式完全相同,因此可以认为(12)、(13)、(14)都是测量球面和圆柱定轴角位移的通用公式,而(13)式优点在于测量时不必知道半径,而且不用准直系统,光路简单。

第三,由于(13)式与半径无关,而且对球面和柱面同样有效,使我们考虑到进一步考查该式对一般旋转对称面沿对称轴的定轴角位移测量的有效性。由于一般旋转对称面可看成是由许多不同半径的圆柱组成,而各个圆柱的角位移测量都由(13)式决定,所以该式对一般旋转对称面也应该是有效的,下一节的实验研究证实了上述的设想。

4 实验验证

实验中采用了两种光路对理论进行验证,图3是球面波照明,图4是平面波照明。预置角位移采用J2型精密光学经纬仪,精度为1秒。 δt 由逐点分析法间接测得,即 $\delta t = n\lambda L / e$,其中 L 为散斑屏到观察屏的距离, e 是 n 条条纹的总宽度, n 为条纹数,逐点分析法光路见图5。实验中分别对球面、柱面、锥面及旋转双曲面物体定轴角位移进行了测量,测取了大量数据,实验结果与理论相符,限于篇幅,下面仅列出部分实验结果。

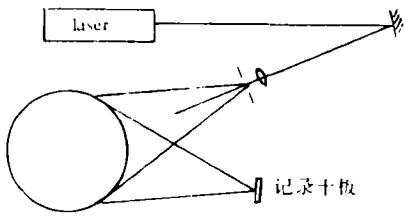


图3 球面波照明光路

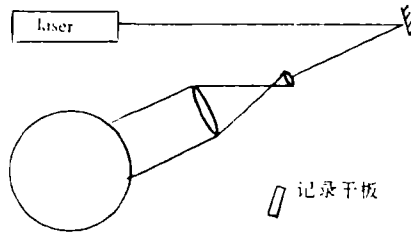


图4 平面波照明光路

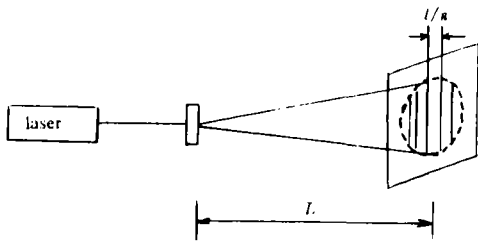


图5 逐点分析法光路

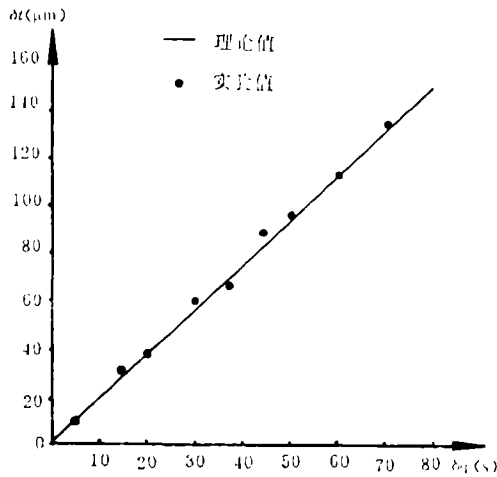


图6 锥面物体定轴角位移测量

图6是对式(13)的验证,实验采用图3光路照明球面物体,物体作微小角位移前后两次曝

光,然后对所获得的散斑图进行逐点分析得散斑位移量 δl ,作 $\delta l-\delta\varphi$ 图, $\delta\varphi$ 为预置角位移,实线表示由式(13)表示的理论结果。由图6可见理论与实验相当符合。

图7是对圆锥面物体绕对称轴角位移的测量,采用图3光路,图中实线是由(13)式确定的理论曲线。结果表明,式(13)对一般旋转对称面物体绕对称轴角位移的测量也是适用的。

以上实验证明,理论与实验完全符合。

参考文献

- 1 Jacquot P, Rastogi P K. Speckle motions induced by rigid-body movements in free-space geometry; an explicit investigation and extension to new cases, *Appl. Opt.* 1979, 18(12):2022~2032
- 2 伍小平等. 空间散斑的运动规律. *物理学报*, 1980, 29(9):1142~1150
- 3 Boone P M. Use of close range objective speckles for displacement measurement, *Opt. Eng.* 1982, 21(3):407~410
- 4 Ching F P. Hin C C. Strain determination on curved surfaces using far-field objective laser speckles. *Opt. Eng.* 1982, 21(3):441~446
- 5 龙品. 柱面物体绕轴转角的测量. *天津大学研究生学报*, 1985, 1(1):20~36
- 6 于晓江. 球面散射屏远场散斑的若干统计特征. *武汉测绘科技大学学报*, 1992(4):79~86

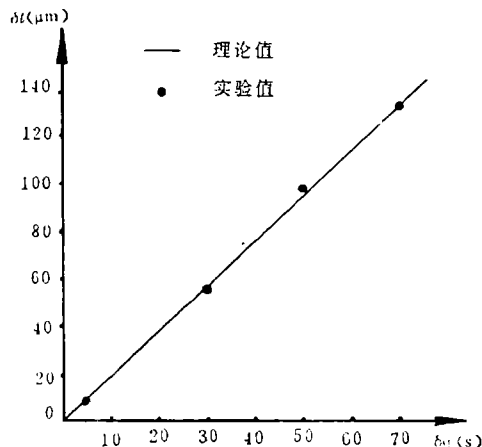


图7 锥面物体绕对称轴角位移测量

Object Speckle Method of Measuring Angular Displacement of Markless Objects with Spherical Surface

Yu Xiaojiang Luan Shengkui Zhu Guangshi

(Dept. of Optical Instrumentation, WTUSM, Luoyu Road 39, Wuhan, China, 430070)

Abstract A method for measuring angular displacement of markless objects with spherical surface is presented in this paper. Some theoretical conclusions are obtained and approved by experiments. The method is approved to have features of simplicity, practicality and high accuracy. The conclusions are experimentally extended to general cases.

Key words laser speckle; speckle metrology; statistic optics