

计算 Stokes 公式的快速 Hartley 变换(FHT)技术*

宁津生 晁定波 李建成

(武汉测绘科技大学大地测量系,武汉珞珈路 39 号,430070)

摘要 本文提出了利用快速 Hartley 变换(FHT)计算 Stokes 公式的方法,这一算法最适合于用来计算实序列的积分变换,而快速 Fourier 变换(FFT)较适合于用来计算复序列的积分变换。计算 Stokes 公式只涉及实序列问题,用 FHT 计算 Stokes 公式比用 FFT 算法更有效。本文详细地描述了用 FHT 计算 Stokes 公式的算法,进行了数值计算,与相应的 FFT 计算结果作了比较。结果表明,两种算法可以得到相同的精度,但是,FHT 的计算速度比 FFT 的计算速度快一倍以上,且所需要的内存空间只是后者的一半。

关键词 Stokes 公式,快速 Hartley 变换(FHT),快速 Fourier 变换(FFT),数值积分方法

分类号 P312

0 引 言

在过去几年里,对应用 FFT 技术求解地球重力场作了许多研究,例如,利用 FFT 计算 Stokes 公式的平面近似和球面近似形式求解大地水准面高程(Forsberg 1985,Sideris 1987b,Sideris 和 Forsberg 1991,Strange 1990)和用 FFT 计算地形改正(Forsberg 1985,Sideris 1985a,1987b),等等。FHT 技术与 FFT 技术相似,它们都属于谱方法。在计算大地水准面高程或地形改正时,两种变换技术都要求有格网化重力异常数据或地形数据,计算结果给出相应的格网大地水准面高程或地形改正。

两种算法计算 Stokes 公式,都要将该积分公式化成相应的卷积形式,再利用 FHT 或 FFT 完成卷积计算,从而提高了其计算速度。如果用 FFT 进行卷积计算,需要将 Stokes 核函数和重力异常两个实序列分别构成复序列在频域中进行复数计算,一个复数乘法包含四个实数乘法运算,因而,对于实序列来说,复数运算增加了不必要的工作量。

Hartley 变换是由美国学者 R. V. L. Hartley 在 1942 年提出的,R. N. Bracewell 在 1984 年提出了一维 FHT(Bracewell,1984),相继人们又提出了二维 FHT(Kumersam 1986,Bracewell,Bumenan,Hao 和 Villasenor 1986b)。与 Fourier 变换相比,Hartley 变换避免了实序列的复数运算,它最适合于实序列的卷积运算(Bracewell 1986)。FHT 技术进行实序列的卷积运算减少了计算机运算时间和计算机内存的要求。

本文描述了 FHT 技术及其计算 Stokes 公式的球面近似和平面近似公式的卷积形式,最后给出了由 FHT 技术计算 Stokes 球面近似公式的数值结果,其结果与 FFT 技术、数值积分方法的结果作了相应的比较。

收稿日期:1992-11-25. 宁津生,男,60岁,教授,博士生导师,长期从事地球重力场研究。

* 国家教委博士点专项科研基金资助课题

1 数学原理

下面将扼要地介绍二维 Hartley 变换的基本公式和原理,并着重描述由二维 FHT 技术完成二维卷积的算法,最后,将详细地介绍由一维 FHT 完成二维 FHT 的实现方法。

1.1 Hartley 变换理论和用 FHT 计算卷积

一个二维连续函数 $f(x, y)$ 的二维 Hartley 变换以下式定义:

$$F(u, v) = H[f(x, y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \text{cas}(2\pi ux + 2\pi vy) dx dy \quad (1)$$

式中:

$$\text{cas}(2\pi ux + 2\pi vy) = \cos(2\pi ux + 2\pi vy) + \sin(2\pi ux + 2\pi vy)$$

u, v 是频率变量, H 表示 Hartley 变换算子。对于二维 Hartley 逆变换有下列形式:

$$f(x, y) = H^{-1}[F(u, v)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u, v) \text{cas}(2\pi ux + 2\pi vy) du dv \quad (2)$$

这里, H^{-1} 表示 Hartley 逆变换。从式(1)和(2)不难看出, Hartley 的正变换具有相同的形式。

根据式(1)和式(2), 二维离散 Hartley 的正变换与逆变换为:

$$F(k, l) = H[f(i, j)] = \frac{1}{NM} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} f(i, j) \text{cas}\left(\frac{2\pi ki}{N} + \frac{2\pi lj}{M}\right) \quad (3)$$

和

$$f(i, j) = H^{-1}[F(k, l)] = \frac{1}{NM} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{M-1} F(k, l) \text{cas}\left(\frac{2\pi ki}{N} + \frac{2\pi lj}{M}\right) \quad (4)$$

式中:

$$i, k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad j, l = 0, 1, 2, \dots, M-1$$

对于两个二维连续函数 $f(x, y)$ 和 $h(x, y)$ 的卷积以下式给出:

$$\begin{aligned} c(x, y) &= f(x, y) * h(x, y) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_0, y_0) h(x - x_0, y - y_0) dx_0 dy_0 \end{aligned} \quad (5)$$

这里 $*$ 表示卷积, 其离散形式为:

$$c(i, j) = f(i, j) * h(i, j) = \frac{1}{NM} \sum_{i'=0}^{N-1} \sum_{j'=0}^{M-1} f(i', j') h(i - i', j - j') \quad (6)$$

式中:

$$i = 0, 1, 2, \dots, 2N-2 \quad j = 0, 1, 2, \dots, 2M-2$$

函数 $c(i, j)$ 的离散谱 $C(k, l)$ (Bracewell, 1986) 为:

$$C(k, l) = F(k, l) \cdot H_e(k, l) + F(N - k, M - l) \cdot H_o(k, l) \quad (7)$$

式中, $F(k, l)$ 和 $H(k, l)$ 分别是函数 $f(i, j)$ 和 $h(i, j)$ 的离散 Hartley 变换, 并且有:

$$H(k, l) = H_e(k, l) + H_o(k, l)$$

$H_e(k, l)$ 和 $H_o(k, l)$ 称为 $H(k, l)$ 的“偶”项和“奇”项:

$$H_e(k, l) = \frac{H(k, l) + H(N - k, M - l)}{2}$$

和

$$H_o(k, l) = \frac{H(k, l) - H(N - k, M - l)}{2}$$

利用式(3)分别将 $f(i, j)$ 和 $k(i, j)$ 进行 Hartley 变换, 可得式(7), 最后将式(7)进行 Hartley 逆变换便可得到 $c(i, j)$ 。

过去完成卷积的方法通常是将两个给定的实函数进行 Fourier 变换, 然后在频域(更确切地说在 Fourier 域)将两个函数对应的谱做复数乘法, 即每项复数乘法 $(a+bj) \cdot (c+dj) = (ac-bd) + j(ad+bc)$ 将要求四次实数乘法, 再作 Fourier 逆变换, 才可得到卷积函数。如果利用式(7)做卷积, 在 Hartley 域每项需要两次乘法, 从而在算法上说明了 FHT 技术计算卷积比 FFT 技术有更高的效率。

1.2 二维 FHT 算法

因为二维 Fourier 核函数 $\exp[j2\pi(ux/N+vy/M)]$ 是可以分成两个因子 $\exp[j2\pi(ux/N)]$ 和 $\exp[j2\pi(vy/M)]$ 的乘积, 所以, 二维 FFT 通常可以用二次一维 FFT 实现 (Colombo 1981, Brigham 1988), 即首先将二维函数逐行(或列)进行一维 FFT 计算, 然后再将上述变换后的二维序列逐列(或行)做一维 FFT 计算。

然而, Hartley 变换的核函数 $\text{cas}[2\pi(ux/N+vy/M)]$, 不像 Fourier 变换的核函数 $\exp[2\pi(ux/N+vy/M)]$ 那样, 它是不可分离成两个因子的乘积的, 因此, 二维 FHT 不能简单地利用一维快速 Hartley 变换按行列来完成。如果模仿二维快速 Fourier 变换方法, 由一维 FHT 将二维函数逐行(或列)逐列(或行)变换, 可以得出一个过渡函数 $T(i, j)$, 即:

$$T(k, l) = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} f(i, j) \text{cas}(2\pi ki/N) \text{cas}(2\pi lj/M) \quad (8)$$

上式与式(3)比较可知, 它不是函数 $f(i, j)$ 的二维 Hartley 变换。不过, 这一结果可以由简单的一步转换成函数 $f(i, j)$ 的二维 Hartley 变换。

根据下列三角恒等关系 (Bracewell, 1986),

$$\text{cas}(\alpha + \beta) = \frac{1}{2} [\text{casc}\alpha \cdot \text{cas}\beta + \text{casc}\alpha \cdot \text{cas}(-\beta) + \text{cas}(-\alpha)\text{cas}\beta - \text{cas}(-\alpha)\text{cas}(-\beta)] \quad (9)$$

并顾及式(8), 则 $f(i, j)$ 的二维 Hartley 变换 $F(k, l)$ 可写成函数 T 的四项之和, 即:

$$F(k, l) = \frac{1}{2} [T(k, l) + T(N-k, l) + T(k, M-l) - T(N-k, M-l)] \quad (10)$$

根据式(10), 二维 FHT 变换可由一维 FHT 来实现。

2 Stokes 公式的卷积形式

球面上任意一点 P 的扰动位可由下式确定 (Heiskanen and Moritz, 1967):

$$T(P) = \frac{R}{4\pi} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{\psi=0}^{\pi} \Delta g(\psi, \alpha) S(\psi) \sin\psi d\psi d\alpha \quad (11)$$

这里, R 是地球平均半径; Δg 是自由空间重力异常; ψ 是计算点 P 与流动点间的球面距离; $S(\psi)$ 是 Stokes 核函数:

$$S(\psi) = \frac{1}{\sin(\psi/2)} - 6\sin(\frac{\psi}{2}) + 1 - 5\cos\psi - 3\cos\psi \cdot \ln[\sin(\frac{\psi}{2}) + \sin^2(\frac{\psi}{2})] \quad (12)$$

根据 Bruns 公式,大地水准面高程 N (以椭球面为基准起算)可以由下式求得

$$N(P) = \frac{T(P)}{\gamma} = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{\phi=0}^{\pi} \Delta g(\psi, \alpha) S(\psi) \sin\psi d\psi d\alpha \quad (13)$$

这里 γ 是地球平均正常重力。

在实际应用中,我们只能得到一个有限范围内的自由空间重力异常数据,因此,式(13)只能对某一球冠进行积分,即:

$$N(\varphi_r, \lambda_r) = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint \Delta g(\varphi_0, \lambda_0) S(\psi_{r0}) \cos\varphi_0 d\varphi_0 d\lambda_0 \quad (14)$$

这里 φ, λ 分别是大地纬度。

2.1 Stokes 公式平面近似的卷积形式

在 Stokes 公式平面近似的情况下,由于球面距离很小,因此,Stokes 核函数可由下式近似:

$$S(\psi) \approx \frac{1}{\sin(\psi/2)} \approx \frac{1}{\psi/2} = \frac{2}{\psi} \quad (15)$$

顾及 $\psi = s/R$, 式(15)为:

$$S(s) = \frac{2R}{s} = \frac{2R}{\sqrt{(x_r - x_0)^2 + (y_r - y_0)^2}} \quad (16)$$

这里 s 是点 P 和点 Q 的平面距离。

式(16)代入(14),可得:

$$N(x_r, y_r) = \frac{1}{2\pi\gamma} \iint_{\sigma_{r0}} \Delta g(x_0, y_0) \frac{1}{\sqrt{(x_r - x_0)^2 + (y_r - y_0)^2}} dx_0 dy_0 \quad (17)$$

其卷积形式为:

$$N(x, y) = \frac{1}{2\pi\gamma} [\Delta g(x, y) * S(x, y)] \quad (18)$$

式中

$$S(x, y) = [(x_r - x_0)^2 + (y_r - y_0)^2]^{-\frac{1}{2}}$$

显然,式(18),可以由 FHT 技术完成卷积运算。

2.2 Stokes 公式球面近似的卷积形式

由于 Stokes 核函数(12)式不完全是 $(\varphi_r - \varphi_0, \lambda_r - \lambda_0)$ 的函数,因此,式(14)不满足卷积定理。根据球面三角函数关系,球面距离 ψ_{r0} 可以表达为:

$$\sin^2\left(\frac{1}{2}\psi_{r0}\right) = \sin^2\left[\frac{1}{2}(\varphi_r - \varphi_0)\right] + \sin^2\left[\frac{1}{2}(\lambda_r - \lambda_0)\right] \cdot \cos\varphi_r \cos\varphi_0 \quad (19)$$

由上式不难看出, ψ_{r0} 不仅是 $(\varphi_r - \varphi_0, \lambda_r - \lambda_0)$ 的函数,而且也是 φ_r 和 φ_0 的函数,要使式(14)满足卷积定理,必须做微小的近似,使 $\cos\varphi_r \cos\varphi_0$ 一项变成 $\varphi_r - \varphi_0$ 的函数。 $\cos\varphi_r \cos\varphi_0$ 可近似为 (Strang, 1990):

$$\begin{aligned} \cos\varphi_r \cos\varphi_0 &= \cos^2\left[\frac{1}{2}(\varphi_r + \varphi_0)\right] - \sin^2\left[\frac{1}{2}(\varphi_r - \varphi_0)\right] \\ &\approx \cos^2\varphi_m - \sin^2\left[\frac{1}{2}(\varphi_r - \varphi_0)\right] \end{aligned} \quad (20)$$

这里 φ_m 是计算区域的平均纬度值,对于一个给定的区域 φ_m 可视为常数。

顾及式(12)、(19)、(20),式(14)为:

$$N(\varphi_r, \lambda_r) = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\text{cap}} [\Delta g(\varphi_0, \lambda_0) \cdot \cos\varphi_0] \cdot S(\varphi_r - \varphi_0, \lambda_r - \lambda_0) d\varphi_0 d\lambda_0 \quad (21)$$

式中:

$$S(\varphi_r - \varphi_0, \lambda_r - \lambda_0) = \frac{1}{s} - 4 - 6s + 10s^2 - (3 - 6s^2)\ln(s + s^2)$$

式中

$$s = \sin \frac{\psi}{2} = \left\{ \sin^2 \left[\frac{1}{2}(\varphi_r - \varphi_0) \right] + \sin^2 \left[\frac{1}{2}(\lambda_r - \lambda_0) \right] \right. \\ \left. \cdot \left\{ \cos^2 \varphi_m - \sin^2 \left[\frac{1}{2}(\varphi_r - \varphi_0) \right] \right\} \right\}^{1/2}$$

将(21)式用卷积表示,可写作为:

$$N(\varphi, \lambda) = \frac{R\lambda}{4\pi\gamma} [\Delta g(\varphi, \lambda) \cos\varphi] * S(\varphi, \lambda) \\ = \frac{R\lambda}{4\pi\gamma} H^{-1} \{ H[\Delta g(\varphi, \lambda) \cos\varphi] \cdot H[S(\varphi, \lambda)] \} \quad (22)$$

(22)式表示,首先将 $\Delta g(\varphi, \lambda) \cos\varphi$ 和 $S(\varphi, \lambda)$ 分别作 FHT 变换,然后在频域(更确切地说 Hartley 域)将 $H[\Delta g(\varphi, \lambda) \cos\varphi]$ 和 $H[S(\varphi, \lambda)]$ 的对应谱相乘,其结果再作 FHT 逆变换,即可获得格网大地水准面高程。

在计算时,需将(21)式离散化,这样则有

$$N(\varphi, \lambda) = \frac{R\Delta\varphi\Delta\lambda}{4\pi\gamma} \sum \sum [\Delta g(\varphi_0, \lambda_0) \cos\varphi_0] S(\varphi_r - \varphi_0, \lambda_r - \lambda_0) \quad (23)$$

3 数值结果

为了验证 FHT 技术计算 Stokes 公式的正确性,我们选取了我国境内两个地区的 $5' \times 5'$ 自由空间重力异常数据,并且,利用了三种方法,其中包括 FHT 技术,FFT 技术和数值积分方法,在这两个有数据的地区分别计算了大地水准面高程。图 1 标示了这两个地区在中国境内

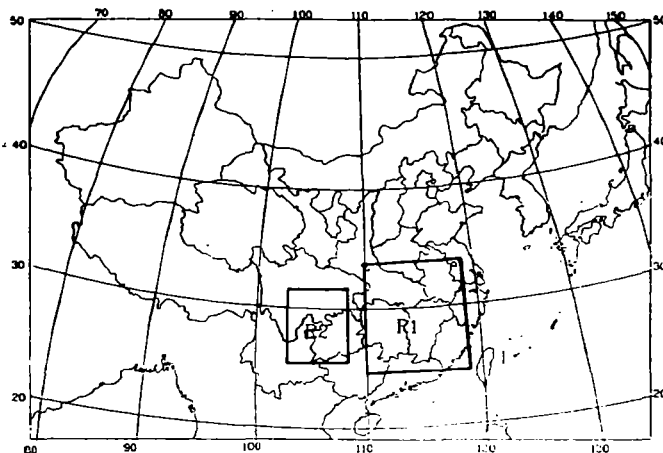


图 1 重力异常数据取样位置和范围图

的位置和范围。

(i)在区域 R1 范围内($25^{\circ} \leq \varphi \leq 34^{\circ}$), $110^{\circ} \leq \lambda \leq 119^{\circ}$)选取了 108×108 个 $5' \times 5'$ 相对于 GRS80 椭球的自由空间重力异常数据,位于我国东南部(如图 1 所示);

(ii)在我国西南部($26^{\circ} \leq \varphi \leq 31^{\circ}$), $103^{\circ} \leq \lambda \leq 108^{\circ}$)区域 R2 内,选取了 60×60 个 $5' \times 5'$ 相对于 GRS80 椭球的自由空间重力异常数据(如图 1 所示)。

表 1 R1 和 R2 区域三种方法的高程比较(单位:m)

方法		FHT	FFT	数值积分方法
西门子 CPU 时间 (秒)	R1 区	19.9965	41.7411	2611.3117
	R2 区	4.8155	11.3156	89.9696
积分球冠 (度)	R1 区	2	2	2
	R2 区	1	1	1
计算点数	R1 区	36×36	36×36	36×36
	R2 区	12×12	12×12	12×12

表 2 R1 区域和 R2 区域 FHT 法与数值积分法高程差异(单位:m)

大地水准面高程	FHT 技术与数值积分方法的差异		FFT 技术与快速 FHT 技术的差异	
	R1 区	R2 区	R1 区	R2 区
最大值	0.042	0.025	0.000	0.000
最小值	-0.021	-0.011	0.000	0.000
标准差(Std. Dev.)	± 0.020	± 0.009	± 0.000	± 0.000
均方根(RMS)	± 0.023	± 0.011	± 0.000	± 0.000

根据式(14)和(23),由三种不同的方法分别计算了上述两个区域的大地水准面高程。在区域 R1 中央有效区内($28^{\circ} \leq \varphi \leq 31^{\circ}$), $113^{\circ} \leq \lambda \leq 116^{\circ}$)和区域 R2 内中央有效区($28^{\circ} \leq \varphi \leq 29^{\circ}$), $105^{\circ} \leq \lambda \leq 106^{\circ}$)分别选取了 1296(36×36)和 144(12×12)个点的大地水准面高程进行了比较,如表 1 和表 2 所示。结果表明:FHT 技术可以获得与 FFT 技术相同的精度,但计算速度却比后者快一倍多。在区域 R1, FHT 技术和数值积分法得出的大地水准面高程标准差和均方根分别为 ± 0.020 米和 ± 0.023 米,其最大差的绝对值为 0.042 米,如表 2 所示;在区域 R2, 其相应的标准差为 ± 0.009 米,均方根为 ± 0.011 米,最大值的绝对值为 0.025 米,如表 2 所示。从两个计算区域的比较结果,我们不难发现:区域 R2 的结果在精度方面优于区域 R1 的精度,这是因为区域 R1 的范围明显比区域 R2 大,因此,区域 R1 的计算结果产生较大的球面近似误差。

数值计算表明:FHT 技术是以上三种方法中最快的方法。计算 $N \times M$ 格网大地水准面高程其一次变换的运算量约为 $N \log N + M \log M$,这与 FFT 技术相比在速度上快一倍,但是,FHT 技术计算 $N \times M$ 格网序列卷积的运算量是 FFT 技术的一半。相反,数值积分方法计算 $N \times M$ 格网序列卷积的运算量为 NM 。图 2 列出了上述三种方法计算二维卷积的运算量。

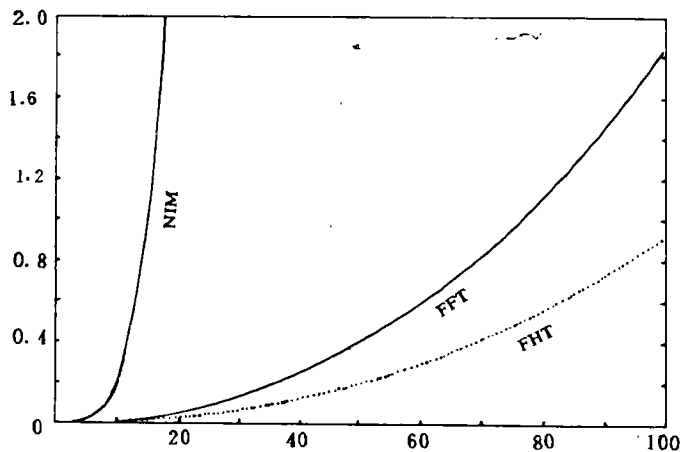


图2 Hartley 变换、Fourier 变换和数值积分方法计算二维卷积的运算量

4 结束语

本文的数值计算结果表明:FHT 技术计算局部格网重力异常数据为局部地球重力场的逼近提供了一种高效的方法。从上面的研究,我们不难得出如下结论:

第一,FHT 技术是目前计算大地水准面高程最快的方法,它的计算速度是 FFT 技术的两倍。

第二,用 FHT 技术计算大地水准面高程可以获得与 FFT 技术相同的精度。

第三,FHT 技术计算大地水准面高程所需要的计算机内存是 FFT 技术的一半,因为它不需要复数运算。

最后,局部地球重力场的其它卷积运算同样可以由 FHT 技术来完成,例如,均衡改正、地形改正、局部协方差函数和 Molodensky 级数解以及垂线偏差等。

参 考 文 献

- 1 Bracewell R N. The fast Hartley transform, Proc. IEEE, 1984, 72(8), 1010~1018
- 2 Bracewell R N, et al. Fast two-dimensional Hartley transforms. Proc. IEEE, 1986, 74(9), 1282~1283
- 3 Bracewell R N. The Hartley Transform. New York, Oxford University, Press, 1986.
- 4 Bracewell R N. The Fourier Transform and Its Applications. 2nd ed. New York, McGraw Hill, 1986.
- 5 Buneman O. Multidimensional Hartley transforms. Proc. IEEE, 1987, 75(2), 267
- 6 Brigham E O. The Fast Fourier Transform and Its Application. New Jersey, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1988.
- 7 Colombo O L. Numerical methods for harmonic analysis on the sphere; OSU report No. 310, Department of Geodetic Science and Surveying. The Ohio State University, Columbus, Ohio, 1981.
- 8 Forsberg R. Gravity field terrain effect computation by FFT. Bulletin Geodesique, 1985, 59, 342~360
- 9 Hao H and Bracewell R N. A three-dimensional DFT algorithm using the fast Hartley transform. Proc. IEEE, 1987, 75(2), 264~266
- 10 Harrison J C and Dickinson M. Fourier transform methods in local gravity modelling. Bulletin Geodesique, 1989, 63(2)
- 11 Heiskanen W A and Morits H. Physical Geodesy. San Francisco, W. H. Freeman and Company, 1980.

- 12 Malvar H S. Fast computation of the discrete cosine Transform and discrete Hartley transform. IEEE Tran. ASSP. 1987, 35, 1484~1485
- 13 Schwarz K P, et al. The use of FFT techniques in physical geodesy. Geophys. J. Int. ,1990,100,485~514
- 14 Sideris M G. A fast Fourier transform method of computing terrain corrections. Manuscripta Geodaetica, 1985, 10 (1), 66~73
- 15 Sideris M G. and Schwarz K P. Solving Molodensky' s series by fast Fourier transform techniques. Bulletin Geodesique, 1986, 60(1), 51~63
- 16 Siders M G. Spectral methods for the numerical solution of Molodensky' s problem, UCSE Report # 20024, Department of Surveying Engineering. Alberta, The University of Calgary, 1987.
- 17 Sideris M G and Tziavos I N. FFT-evaluation and applications of gravity field convolution integrals with mean and point data. Bulletin Geodesique, 1988, 62(4), 521~540
- 18 Sideris M G and Fousberg R. Testing the spherical FFT formula for the geoid over large regions (personal communication), 1991.
- 19 Strang Van Hees G. Stokes formula using fast Fourier techniques. Manuscripta Geodaetica. 1990, 15(4)

A Fast Hartley Transform Techniques of Computing Stokes Formula

Ning Jinsheng Chao Dingbo Li Jiancheng

(Dept. Geodesy WTUSM, Luoyu Road 39, Wuhan, China, 430070)

Abstract This paper presents a new method for the computation of the Stokes formula using the Fast Hartley Transform (FHT) techniques. The algorithm is most suitable for the computation of real sequence transform, but the Fast Fourier Transform (FFT) techniques is more suitable for the computation of complex sequence transform. The solution of Stokes formula is, however, only associated with a real sequence problem. Therefore the computation of the Stokes formula using FHT techniques is more efficient than using FFT techniques. The procedures of the evaluation of the Stokes formula by FHT techniques are described in detail and correspondingly, some numerical tests are given. By the comparison with both FFT techniques and numerical integration method, the results show that the resulting values of geoidal undulations by FHT techniques are almost the same as by FFT techniques, and the computational speed of FHT technique is about two times faster than that FFT techniques.

Key words fast Hartley transform; fast Fourier transform; numerical integration method