

特大型精密工程 SSC 测量投影方式的选择*

陈永奇

摘要 目前世界上最大的工程超导超级对撞机(SSC)正在建造之中,作者参与这项大型精密工程测量的方案设计和部分咨询工作。根据工程的特点,设计测量投影方式是其中一项工作。本文讨论所设计的双重正形投影(stereographic double conformal projection)以及各种观测量投影归化中的问题。

关键词 超导超级对撞机;投影方式;观测量归化。

分类号:TB22 TL508

0 前言

美国正在建造一个大型超导超级对撞机,该项工程包括了大量的精密工程测量问题。1992年作者曾作为承包该项工程的测量公司的技术顾问,参与测量方案的设计,协助解决了一些测量工程中的问题。本文要介绍的有关测量投影面的选择和计算问题是其中之一。

超导超级对撞机(Superconducting Super Collider——缩写为SSC)座落在美国Texas州Dollars市,整个建筑呈椭圆形,平均直径约27km,全长84km的地下隧道平均深度约40m,隧道断面直径3.6m,对撞机环中将安装10000块磁块,磁块定位精度要求不低于0.3mm/300m。该工程水平施工控制采用GPS测量,控制网由16个主控制点和85个首级控制点组成,全网用Trimble 4000SST双频接收机观测了410条基线向量。垂直控制采用一等精密水准。水准测量成果拟引入潮汐改正和重力改正。由于设计要求,对撞机环在空间中必须是一个平面,因此水准测量所测定的点的高程必须归化到大地高,然后再归化到相对于空间中某一平面的高度。这里,精确地确定大地水准面高又是一项重要的内容。隧道中控制拟采用陀螺仪导线,使用目前最精密的自动陀螺仪Gyromat 2000(方位角测定精度为3'')。地面地下通过竖井并用光学投影器连接。

整个工程大约需要10年才能完成。在整个工程的施工阶段,施工控制网要经常复测以检查控制点的稳定性。工程的全部测量成果要归化到一个投影平面上计算。根据工程的特点,精度要求最高的是在对撞机环上,因此提出了沿着环上各点投影变形最小的要求。

1 双重正形投影

为计算方便,所选择的投影方式包括两个步骤,首先从椭球体面上投影到一个球面上,然

收稿日期:1992-11-19

* 国家教委博士点基金和加拿大国家科学研究基金资助项目。

后再从球面上投影到一个平面上。两次投影都是正形投影,第二次投影采用斜轴球面透视方位投影。这种投影的特点是地面上无论大圆或小圆在投影中的表象仍为一个圆。

1.1 基本参数的确定和计算

选择整个工程的中心作为投影的坐标原点,该点的大地纬度 φ_0 和大地经度 λ_0 是已知的。定义该点处的投影比例为 k_0 ,根据工程的特点,应该这样来选择 k_0 ,使得对撞机环上各点的投影比例尽量接近于 1。如图 1 所示,选择一个割平面(相当于选择 k_0)使得它与球体的交线尽量接近于对撞机环线(即 $k \approx 1$)。由图中可以看出,在交线内部 $k < 1$,在其外部 $k > 1$ 。

设 a 和 f 分别为椭球体的长半轴和扁率(在北美洲 NAD83 系统, $a = 6378137.0\text{m}$, $f = 1/298.257222101$ 与 WGS84 椭球差别很小),那么原点处的子午圈和卯酉圈的曲率半径 M_0 和 N_0 可以算出:

$$M_0 = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\varphi_0)^{3/2}}, N_0 = \frac{a}{(1-e^2\sin^2\varphi_0)^{1/2}} \quad (1)$$

式中 e 第一偏心率, $e = \sqrt{2f - f^2}$ 。投影的第一步是从椭球面上到球面上,球面的曲率半径为

$$R = \sqrt{M_0 N_0} \quad (2)$$

原点投影到球面上得到球体纬度 Φ_0 和经度 Λ_0 :

$$\Phi_0 = \arcsin(\sin\varphi_0/c_1) \quad (3a)$$

$$\Lambda_0 = c_1\lambda_0 \quad (3b)$$

其中

$$c_1 = \sqrt{1 + \frac{e^2}{1-e^2}\cos^2\varphi_0} \quad (4)$$

另外一个基本参数 c_2 为

$$c_2 = \text{tg}(45^\circ + \frac{\Phi_0}{2}) \left\{ \text{tg}(45^\circ + \frac{\varphi_0}{2}) \left(\frac{1 - \sin\varphi_0}{1 + \sin\varphi_0} \right)^{1/2} \right\}^{-c_1} \quad (5)$$

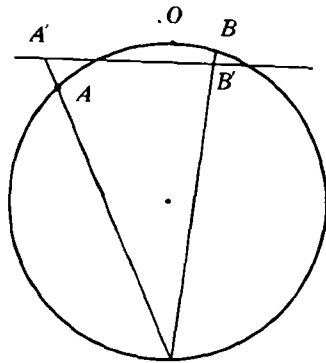


图 1 球面透视方位投影示意

1.2 正算问题

所谓正算问题是由一个点的经纬度 φ, λ 计算它在投影平面上的直角坐标 X (北方向)和 Y (东方向),该点处的子午线收敛角 γ 和比例因子 k 。令

$$\gamma = 45^\circ + \varphi/2, \quad q = \left(\frac{1 - \sin\varphi}{1 + \sin\varphi} \right)^{1/2} \quad (6)$$

该点的球体经纬度用下式计算:

$$\Phi = 2\text{arctg}\{c_2(\text{tg}\gamma)^{c_1}\} - 90^\circ \quad (7a)$$

$$\Lambda = c_1\lambda \quad (7b)$$

投影到平面上的坐标为

$$X = 2k_0 \cdot R \frac{\sin\Phi\cos\Phi_0 - \cos\Phi\sin\Phi_0\cos\Delta\Lambda}{1 + \sin\Phi\sin\Phi_0 + \cos\Phi\cos\Phi_0\cos\Delta\Lambda} + X_0 \quad (8a)$$

$$Y = 2k_0 \cdot R \frac{\cos\Phi\sin\Delta\Lambda}{1 + \sin\Phi\sin\Phi_0 + \cos\Phi\cos\Phi_0\cos\Delta\Lambda} + Y_0 \quad (8b)$$

式中 $\Delta\Lambda = \Lambda - \Lambda_0$, X_0 和 Y_0 是原点的坐标,引入它们是为避免在测区范围内出现负坐标值。该点处子午线收敛角(定义为从投影的子午线顺时针方向算到 X 轴方向的角度):

$$\gamma = \text{arctg}\left\{ \frac{\sin\Delta\Lambda(\sin\Phi + \sin\Phi_0)}{\cos\Phi\cos\Phi_0 + (1 + \sin\Phi\sin\Phi_0)\cos\Delta\Lambda} \right\} \quad (9)$$

比例因子(定义为投影平面上微分长度与相应的椭球面上微分长度之比):

$$k = \frac{2k_0 c_1 R \cos \Phi}{N \cos \Phi (1 + \sin \Phi \sin \Phi_0 + \cos \Phi \cos \Phi_0 \cos \Delta \Lambda)} \quad (10)$$

式中 N 是该处卯酉圈曲率半径。

1.3 反算问题

反算问题是指由一点的直角坐标 X, Y , 计算它的大地坐标 φ, λ 。计算过程包括两步: 由平面到球面; 由球面到椭球面。令

$$x = (X - X_0), y = (Y - Y_0), s = \sqrt{x^2 + y^2}$$

那么

$$\beta = \arcsin(x/s), \quad \delta = 2 \operatorname{arctg}[s/(2Rk_0)]$$

则

$$\Phi = \arcsin[\sin \Phi_0 \cos \delta + \cos \Phi_0 \sin \delta \sin \beta] \quad (11a)$$

$$\Lambda = \Lambda_0 + \arcsin[\cos \beta \sin \delta / \cos \Phi] \quad (11b)$$

由式(7b)可以得到大地经度

$$\lambda = \Lambda / c_1 \quad (12)$$

大地纬度的计算需要迭代多次, 直到迭代结果在许可的精度限差之内。式(7a)可以写成 $c_2(q \operatorname{tg} \gamma)^{c_1} - \operatorname{tg}(45^\circ + \frac{\Phi}{2}) = 0$, 简为 $f(\varphi) = 0$ 。令 $\varphi^{(0)}$ 为近似值, 有 $f(\varphi^{(0)}) + f'(\varphi^{(0)}) \delta \varphi = 0$, 则 $\varphi = \varphi^{(0)} - f(\varphi^{(0)}) / f'(\varphi^{(0)})$ 。根据这一原理, 迭代由 $\varphi^{(0)} = \Phi$ 开始, 解算中, 直到第 n 次迭代与上一次迭代的结果的差值小于某一预先设置的限差为止。令

$$r^{(n-1)} = 45^\circ + \frac{\varphi^{(n-1)}}{2}, \quad q^{(n-1)} = \left(\frac{1 - e \sin \varphi^{(n-1)}}{1 + e \sin \varphi^{(n-1)}} \right)^{\frac{c_2}{2}}$$

则

$$f_1 = f(\varphi^{(n-1)}) = c_2 \{ q^{(n-1)} \operatorname{tg} r^{(n-1)c_1} - \operatorname{tg}(45^\circ + \Phi/2) \}$$

$$f_2 = f'(\varphi^{(n-1)}) = c_1 c_2 \{ q^{(n-1)} \operatorname{tg} r^{(n-1)(c_1-1)} \cdot \{ q^{(n-1)} [$$

$$\frac{1}{2} \sec^2 r^{(n-1)} - \frac{e^2 \cos \varphi^{(n-1)}}{1 - e^2 \sin^2 \varphi^{(n-1)}} \operatorname{tg} r^{(n-1)}] \}$$

故

$$\varphi^{(n)} = \varphi^{(n-1)} - f_1 / f_2 \quad (13)$$

1.4 k_0 的选择

k_0 选取的原则已在上面讨论过了。实际计算, 沿着对撞机环均匀地选取几个点, 利用式(10), 在假定 $k_i = 1$ 的情况下得到这些点处的比例因子 $k_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 最后的 k_0 值用下式计算:

$$k_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1/k_i) \quad (14)$$

该工程的 k_0 为 0.999 998 85。

2 观测量的归化

该工程的测量观测量包括 GPS 基线向量(或 GPS 网点的平差坐标), 水平角, 陀螺方位角和距离。把这些观测量从地面上归化到参考椭球面上的计算过程在一般教科书中都有介绍, 本文不再重复。本节主要介绍从椭球面上归化到投影平面上的方法。

2.1 距离观测量

把一条边从椭球体面上归化到投影平面上需要知道沿该边上点的比例因子 k 。令 $S^{(M)}$ 为投影平面上该边的距离, $S^{(E)}$ 为它在椭球体面上的距离, 它们之间有关系:

$$S^{(M)} = \int k ds^{(E)} \quad (15)$$

实际工作中,由于边长比较短,因此采用一个平均的比例因子 \bar{k} , \bar{k} 由下式计算^[3,4]:

$$\frac{1}{\bar{k}} = \left(\frac{1}{k_1} + \frac{4}{k_m} + \frac{1}{k_2} \right) / 6 \quad (16)$$

式中 k_1 和 k_2 为该边两 endpoints 处的比例因子, k_m 为该边中间点的比例因子。注:文献[2],[5]采用另一种方法计算 \bar{k} ;

$$\bar{k} = (k_1 + 4k_m + k_2) / 6 \quad (17)$$

由于 k 值与 1 相差很小,因此用上面两式所得的结果实际上是一致的。这样

$$S^{(N)} = \bar{k} \cdot S^{(P)} \quad (18)$$

2.2 陀螺方位角和水平角

观测的陀螺方位角加上垂线偏差改正即得到椭球体面上的大地方位角(目标点高度改正和法截线到大地线改正很小,略去)。在该工程中,该地区的大地水准面高(N)测定得相当准确,因此垂线偏差分量可用下式计算:

$$\xi = -\frac{\partial N}{R \partial \varphi}, \quad \eta = -\frac{\partial N}{R \cos \varphi \partial \lambda} \quad (19)$$

式中 R 为地球平均半径令 α_{ij} 为椭球体面上从点 i 到 j 的大地方位角,那么投影到平面上的坐标方位角 t_{ij} 用下式计算

$$t_{ij} = \alpha_{ij} - \gamma_i + \delta_{ij} \quad (20)$$

式中 γ_i 为 i 点处的子午线收敛角,用式(9)计算, δ_{ij} 为方向改正,对于所用的双重正形投影,推导出这个改正数为:

$$\delta_{ij} = \arctg \left(\frac{x_i y_j - x_j y_i}{x_i x_j + y_i y_j + (2k_0 R)^2} \right) \quad (21)$$

其中 $x_i = X_i - X_0, y_i = Y_i - Y_0, x_j = X_j - X_0, y_j = Y_j - Y_0$ 。

水平角是两个方位角的差值,因此只需加上两个方向的改正数之差。

3.3 GPS 观测量

对于 GPS 测量结果的归化,有两种处理方法,一种是先进行 GPS 网平差,得到 GPS 网点在 WGS-84 坐标系中的大地坐标和它们的协方差阵,然后再作大地坐标与平面坐标的转换;另一种是转换 GPS 基线向量。WGS-84 系统与 NAD83 系统的差别仅在所用的椭球体的扁率(f)不同,该值差别很小,实践中可以认为 GPS 测量的坐标即为 NAD83 坐标系中的坐标。对于第一种方法,坐标转换过程就是 1.2 节讨论的正算问题。对于第二种方法,分别转换基线两端的坐标,即 φ_i, λ_i 和 $\varphi_j = \varphi_i + \Delta\varphi_{ij}, \lambda_j = \lambda_i + \Delta\lambda_{ij}$,然后计算投影平面上的基线分量; $\Delta X_{ij} = X_j - X_i, \Delta Y_{ij} = Y_j - Y_i$ 。这里重点要讨论的是协方差阵的转换。

投影过程可写成

$$\begin{cases} X = X(\varphi, \lambda) \\ Y = Y(\varphi, \lambda) \end{cases} \quad (22)$$

微分上式得

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial \varphi} & \frac{\partial X}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial Y}{\partial \varphi} & \frac{\partial Y}{\partial \lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\varphi \\ d\lambda \end{pmatrix} = J(\varphi, \lambda) \begin{pmatrix} d\varphi \\ d\lambda \end{pmatrix} \quad (23)$$

矩阵 J 中的元素为

$$\frac{\partial X}{\partial \varphi} = \frac{p}{n} u, \quad \frac{\partial X}{\partial \lambda} = c_1 \frac{m}{n} \cos \varphi$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \varphi} = -\frac{m}{n}u, \quad \frac{\partial Y}{\partial \lambda} = c_1 \frac{\rho}{n} \cos \Phi$$

式中

$$\begin{aligned} m &= 2k_0 \sin \Delta \Lambda (\sin \Phi + \sin \Phi_0) \\ n &= (1 + \sin \Phi \sin \Phi_0 + \cos \Phi \cos \Phi_0 \cos \Delta \Lambda)^2 \\ p &= 2k_0 R [\cos \Delta \Lambda (1 + \sin \Phi \sin \Phi_0) + \cos \Phi \cos \Phi_0] \\ u &= \frac{2c_1 c_2 (q \operatorname{tg} \gamma)^{(c_1-1)} \cdot q \left\{ \frac{1}{2} \sec^2 \gamma - \frac{e^2 \cos \varphi \operatorname{tg} \gamma}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)} \right\}}{(1 + c_2^2 (q \operatorname{tg} \gamma)^{2c_1})} \end{aligned}$$

令 $\Sigma_{\varphi, \lambda}$ 为 GPS 网点平差坐标的方差—协方差阵, 转换后的平面坐标的方差—协方差阵 Σ_{xy} 为

$$\Sigma_{xy} = J \Sigma_{\varphi, \lambda} J^T \quad (24)$$

式中

$$J = \operatorname{diag} \{ J(\varphi_1, \lambda_1), J(\varphi_2, \lambda_2), \dots, J(\varphi_n, \lambda_n) \} \quad (25)$$

对于基线向量, 若 $\Sigma_{\Delta \varphi, \Delta \lambda}$ 为其方差—协方差阵, 投影后的方差—协方差阵用下式计算:

$$\Sigma_{\Delta xy} = J(\varphi_m, \lambda_m) \Sigma_{\Delta \varphi, \Delta \lambda} J^T(\varphi_m, \lambda_m) \quad (26)$$

其中 φ_m, λ_m 表示基线中点的大地坐标。对于范围小于 100km 的测区, 式(25)和(26)的矩阵 $J(\varphi_i, \lambda_i)$ 可以用一个测区的平均经纬度来计算。

参 考 文 献

- 1 胡毓钜, 龚剑文, 黄伟. 地图投影. 测绘出版社, 1981.
- 2 Bomford G. Geodesy, Clarendon Press, Oxford, 1980.
- 3 Krakiwsky E J. Conformal Map Projection in Geodesy. Lecture Notes 37, Dept. of Surveying Engg., University of New Brunswick, 1973.
- 4 Leick A. GPS Satellite Surveying. John Wiley and Sons, N. Y. 1990.
- 5 Vincenty T. Precise Determination of the Scale Factor from Lambert Conical Projection Coordinates. Surveying and Mapping, 1985, 45(4)

Selection of Projection Technique and Reduction of Geodetic Observations for Huge Engineering Project SSC

Chen Yongqi

Abstract In the construction of huge engineering projects, like Superconducting Super Collider (SSC), several problems of precise engineering surveys need special attention. Selection of projection techniques and rigorous reduction of geodetic observations are one of the important issues. This paper focuses on the SSC project. In the project the stereographic double conformal projection method is employed. The rigorous procedures for the reduction of GPS observations, gyroazimuths, horizontal angles, and EDM distances from the ellipsoid to the selected mapping plane are discussed.

Key words Superconducting Super Collider; projection techniques; reduction of geodetic observations