

# 基于高斯括号原理的 高斯光束传输与变换特性的分析

何平安 林银森

**摘要** 本文基于高斯括号原理,用 ABCD 定律详细地分析了基模高斯光束经过一般光学系统的传输与变换特性,并以此为基础,就各种典型光学系统及特殊情况作了进一步地讨论,得出了许多有实际应用价值的结论。

**关键词** 高斯光束;高斯括号;ABCD 定律

## 1 引言

研究高斯光束传输与变换特性的方法很多,诸如几何光学分析法、图解法、矩阵法(ABCD 定律)<sup>[1]</sup>,光线等效模型法<sup>[2]</sup>等等。几何光学分析法基于透镜对光束的变换作用,导出高斯光束参数 $(\omega_0, z)$ 经过一个理想薄透镜前后的变换规律,而相邻两透镜间的过渡可看作高斯光束在自由空间的传输,以此建立起高斯光束经过整个光学系统的变换规律。这种方法简单直观,但用来分析比较复杂的光学系统时,就颇觉烦琐。图解法借助柯林斯圆和 $\Sigma$ 圆 $\pi$ 圆图,其优点是可以避免烦琐的运算,在某些工程问题中可用作定性估计,但其缺点是精度较低,不适合于精确分析与计算。

以 ABCD 定律为基础的矩阵法,借助于矩阵运算可以分析任何复杂的光学系统的变换特性,它是目前分析高斯光束传输与变换特性时应用得最多的一种方法。但它得经过复杂的矩阵运算,尤其不便分析复杂系统中某个参数变化时(如变焦系统等)对输出高斯光束的影响。等效光线模型法采用两条等效光线,用几何光学方法对其作近轴光线追迹,由这两条出射光线的斜率及在输出面上的光线高度,可计算出象空间的高斯光束参数。该方法的核心仍是 ABCD 定律,其优点是可以利用已有的光线追迹程序计算,其缺点与矩阵法相同。

M. Herzberger 首先把高斯括号原理运用到光学成像特性的分析上,随后, M. Herzberger, H. G. Zimmer、田中一夫<sup>[3]</sup>和林银森<sup>[4]</sup>等学者推广和发展了高斯括号原理。尤其是田中一夫,他不仅完善了高斯括号原理在近轴光学中的应用,而且成功地用高斯括号原理分析了光学系统的变焦特性<sup>[5][6]</sup>,并初步分析了高斯光束的传输与变换特性<sup>[7]</sup>。高斯括号原理之所以在光学中获得如此广泛的应用,主要在于用高斯括号表示的广义高斯常数可以展开成光学系统任一结构

参数的函数,从而便于分析某一结构参数变化时对光束变换特性的影响。

下面,我们从高斯光束的概念及 ABCD 定律出发,在田中一夫分析的基础上,对高斯光束经过光学系统的传输与变换作进一步深入分析。

## 2 高斯光束及 ABCD 定律

基模高斯光束是波动方程的一个特解,其场分布为<sup>[1]</sup>:

$$U(x, y, z) = \frac{\omega_0}{\omega(z)} \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{\omega^2(z)}\right] \exp\left[-i\left(kz + \frac{k}{2R(z)}(x^2 + y^2) - \varphi(z)\right)\right] \quad (1)$$

式中:

$$R(z) = z\left[1 + \left(\frac{\pi\omega_0^2}{\lambda z}\right)^2\right], \quad (2)$$

$$\omega^2(z) = \omega_0^2\left[1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi\omega_0^2}\right)^2\right], \quad (3)$$

$$\varphi(z) = \arctg\left(\frac{\lambda z}{\pi\omega_0^2}\right), \quad (4)$$

分别表示高斯光束等相面的曲率半径、光斑半径和附加位相。其中  $\lambda$  表示波长,  $\omega_0$  表示光束束腰半径,  $z$  表示光束某一点到束腰的距离(如图 1 所示)。由以上四式可知,基模高斯光束的特性由其波长  $\lambda$ 、束腰半径  $\omega_0$  及其位置唯一确定。

为便于讨论,通常引入一个新的复数参量——复曲率半径  $q$ :

$$q = z + i\bar{v}z_0 \quad (5)$$

或者: 
$$\frac{1}{q} = \frac{1}{R} - i\frac{\lambda}{\pi\omega^2} \quad (6)$$

式中  $z_0 = \pi\omega_0^2/\lambda$  叫做高斯光束的共焦参量或瑞利长度。距束腰距离等于共焦参量  $z_0$  时,高斯光束的波前曲率半径最小。

高斯光束经过光学系统(如图 2 所示)的传输与变换可以用 ABCD 定律来表示:

$$q' = \frac{Aq + B}{Cq + D} \quad (7)$$

式中  $q$  和  $q'$  分别表示高斯光束经过光学系统前后的复曲率半径;  $A, B, C, D$  分别为光学系统变换矩阵的元素。从物方参考面出发,经过光学系统后到达像方参考面的变换矩阵用高斯括号表示的广义高斯常数表示为:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^1A_{i+1} & {}^0B_{i+1} \\ {}^1C_i & {}^0D_i \end{pmatrix} \quad (8)$$

式中:

$$\begin{cases} {}^1A_{i+1} = [\varphi_1, -e_1, \dots, \varphi_i, -e_i], \\ {}^0B_{i+1} = [-e_0, \varphi_1, -e_1, \dots, \varphi_i, -e_i], \\ {}^1C_i = [\varphi_1, -e_1, \dots, \varphi_i], \\ {}^0D_i = [-e_0, \varphi_1, -e_1, \dots, \varphi_i], \end{cases} \quad (9)$$

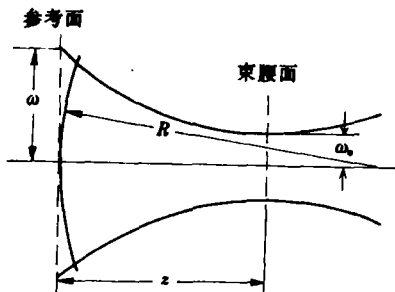


图 1 高斯光束

即为广义高斯常数,其中  $\varphi_i$  表示第  $i$  个结构元素的光焦度:

$$\varphi_i = \begin{cases} (n'_i - n_i)/r_i & (\text{对于折射面}) \\ -2/r_i & (\text{对于反射面}) \\ 1/f'_i & (\text{对于薄透镜}) \end{cases} \quad (10)$$

$e_i = d_i/n'_i$  为两结构元素间的折合距离,  $d_i$  为实际距离。于是,用广义高斯常数表示的 ABCD 定律为:

$$q' = \frac{{}^1A_{k+1}q + {}^0B_{k+1}}{{}^1C_k q + {}^0D_k} \quad (11)$$

这就是下面我们分析高斯光束传输与变换特性的基本关系式。

### 3 高斯光束通过光学系统的传输与变换

正如几何光学研究成像特性时主要是讨论物体经过光学系统成像的大小、位置、正倒和虚实一样,研究高斯光束的传输与变换特性,我们主要讨论经光学系统变换后高斯光束的束腰大小和位置等问题,而光束的虚实及其发散度等都可由束腰位置与大小确定。

#### 3.1 一般情况

如图 2 所示,高斯光束通过由  $k$  个结构元素所组成的光学系统的传输与变换。图中  $\varphi_1$ ,

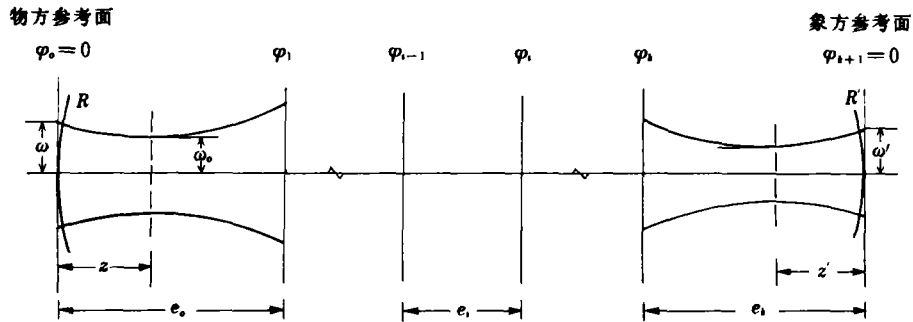


图 2 高斯光束的传输与变换

$\varphi_2, \dots, \varphi_k$  为各结构元素的光焦度,由(10)式计算; $e_1, e_2, \dots, e_{k+1}$ 为相邻两结构元素间的折合距离; $e_0$ 为物方参考面到系统第一面的距离, $e_k$ 为系统最后一面到像方参考面的距离; $\omega_0$ 和 $\omega'_0$ 分别为物、像方光束腰, $z$ 和 $z'$ 分别为物、像方参考面到相应束腰的距离。我们把物方参考面作为第 0 面, $\varphi_0=0$ ,像方参考面作为第  $k+1$  面, $\varphi_{k+1}=0$ ,物像方参考面上光束参数分别为  $\omega, R$  和  $\omega', R'$ 。由复曲率半径的表达式(5)式和(6)式及用广义高斯常数表示的 ABCD 定律(11)式,得到:

(1)已知物空间的光束参数  $\omega_0$  和  $z$ ,则像空间的光束参数为:

$$z' = \frac{({}^1A_{k+1}z + {}^0B_{k+1})({}^1C_k z + {}^0D_k) + {}^1A_{k+1} {}^1C_k (\pi\omega_0^2/\lambda)^2}{({}^1C_k z + {}^0D_k)^2 + ({}^1C_k)^2 (\pi\omega_0^2/\lambda)^2} \quad (12)$$

$$\omega_0'^2 = \omega_0^2 / [({}^1C_k z + {}^0D_k)^2 + ({}^1C_k)^2 (\pi\omega_0^2/\lambda)^2] \quad (13)$$

$$R' = \frac{({}^1A_{k+1}z + {}^0B_{k+1})^2 + ({}^1A_{k+1})^2 (\pi\omega_0^2/\lambda)^2}{({}^1A_{k+1}z + {}^0B_{k+1})({}^1C_k z + {}^0D_k) + {}^1A_{k+1} {}^1C_k (\pi\omega_0^2/\lambda)^2} \quad (14)$$

$$\omega'^2 = [({}^1A_{k+1}z + {}^0B_{k+1})^2 + ({}^1A_{k+1})^2(\pi\omega_0^2/\lambda)^2](\lambda/\pi\omega_0)^2 \quad (15)$$

由(12)式可知,像方束腰位置 $z'$ 不仅和光学系统结构参数和物方光束腰位置 $z$ 有关,而且和物方光束腰大小 $\omega_0$ 有关。这表明对于同一光学系统,即使物方束腰位置 $z$ 一定,像方束腰位置 $z'$ 也会随着物方束腰大小 $\omega_0$ 的变化而变化。这和几何光学中像距 $l'$ 与物体大小无关的结论截然不同。

(2)如果已知物方参考面上的光束参数 $R$ 和 $\omega$ ,则像空间的光束参数为:

$$z' = \frac{({}^1A_{k+1} + {}^0B_{k+1}/R)({}^1C_k + {}^0D_k/R) + {}^0B_{k+1} {}^0D_k(\lambda/\pi\omega^2)^2}{({}^1C_k + {}^0D_k/R)^2 + ({}^0D_k)^2(\lambda/\pi\omega^2)^2} \quad (16)$$

$$\omega_0'^2 = (\lambda/\pi\omega^2)^2 / [({}^1C_k + {}^0D_k/R)^2 + ({}^0D_k)^2(\lambda/\pi\omega^2)^2] \quad (17)$$

$$R' = \frac{({}^1A_{k+1}z + {}^0B_{k+1}/R)^2 + ({}^0B_{k+1})^2(\lambda/\pi\omega^2)^2}{({}^1A_{k+1} + {}^0B_{k+1}/R)({}^1C_k + {}^0D_k/R) + {}^0B_{k+1} {}^0D_k(\lambda/\pi\omega^2)^2} \quad (18)$$

$$\omega'^2 = \omega^2 [({}^1A_{k+1} + {}^0B_{k+1}/R)^2 + ({}^0B_{k+1})^2(\lambda/\pi\omega^2)^2] \quad (19)$$

下面就从这两组公式出发,对一些典型的光学系统和特殊情况予以讨论。

### 3.2 单薄透镜

设单薄透镜的焦距为 $f'$ 。分别以物像方束腰平面为参考面,即 $z=z'=0$ ,如图3所示,因为:

$$\begin{cases} {}^1A_2 = [\varphi_1, -e_2] = 1 - e_2\varphi_1 = 1 - \frac{d'}{f'} \\ {}^0B_2 = [-e_1, \varphi_1, -e_2] = \varphi_1 e_1 e_2 - e_1 - e_2 = \frac{dd'}{f'} - d' - d \\ {}^1C_1 = [\varphi_1] = \varphi_1 = \frac{1}{f'} \\ {}^0D_1 = [-e_1, \varphi_1] = 1 - e_1\varphi_1 = 1 - \frac{d}{f'} \end{cases} \quad (20)$$

当 $z=z'=0$ 时,由(12)式得:

$${}^0B_2 {}^0D_1 + {}^1A_2 {}^1C_1(\pi\omega_0^2/\lambda)^2 = 0 \quad (21)$$

将(20)式代入上式,从中解出 $d'$ 得:

$$d' = \frac{f'd(d-f') + f'(\pi\omega_0^2/\lambda)^2}{(d-f')^2 + (\pi\omega_0^2/\lambda)^2} \quad (22)$$

将(20)式代入(13)式,得:

$$\omega_0'^2 = f'^2\omega_0^2 / [(d-f')^2 + (\pi\omega_0^2/\lambda)^2] \quad (23)$$

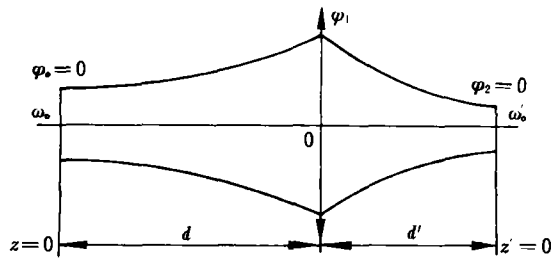


图3 高斯光束经单薄透镜的变换

式(22)和(23)与其它文献<sup>[1]</sup>中导出的公式实质上是相同的,只是 $d$ 的符号与文献中的规定相反。由(23)式可知,当 $d=f'$ 时, $\omega_0'$ 取得最大值 $\omega'_{0max}$ :

$$\omega'_{0max} = f' \left( \frac{\lambda}{\pi\omega_0} \right) = f'\theta \quad (24)$$

式中 $\theta = \lambda/\pi\omega_0$ 是物方光束的远场发散角。(22)式表明,此时 $d'=f'$ ,这说明当物方束腰位于透镜前焦点时,像方束腰位于透镜后焦点上,且束腰半径取得最大值,该最大值等于透镜焦距与光束发散角之乘积。当物方束腰离开前焦点时,像方束腰也离开后焦点,且束腰半径随之减小。

### 3.3 两参考面共轭

如果两参考面共轭<sup>[4]</sup>,则有:

$$\begin{cases} {}^0B_{k+1} = 0 \\ {}^1C_k = \Phi \\ {}^1A_{k+1} = 1/{}^0D_k = \beta \end{cases} \quad (25)$$

式中,  $\Phi$  为整个系统的光焦度,  $\beta$  为两共轭参考面的横向放大率。为简单起见, 设物方光束腰位于物方参考面上, 即  $z=0$ , 则由(12)~(15)式得:

$$z' = \frac{\beta}{\Phi} \left[ 1 + \left( \frac{1}{\beta\Phi} \frac{\lambda}{\pi\omega_0^2} \right)^2 \right]^{-1} \quad (26)$$

$$\omega_0'^2 = (\beta\omega_0)^2 \left[ 1 + \left( \beta\Phi \frac{\pi\omega_0^2}{\lambda} \right)^2 \right]^{-1} \quad (27)$$

$$R' = \beta/\Phi = \beta f' \quad (28)$$

$$\omega' = \beta\omega_0 \quad (29)$$

式中  $f'$  为光学系统的焦距。由(26)式可看出, 一般情况下,  $z' \neq \beta f'$ , 且  $z' \neq 0$  (除非  $\omega_0 = 0$ ), 这表明像方束腰并不在象面上, 亦即物像方束腰并不共轭。(28)式表明, 在像方参考面上波前的曲率半径等于系统的横向放大率与系统的焦距之积。而几何光学告诉我们,  $\beta = -z'/f'$ , 代入(28)式可得  $R' = -z'$ , 像方参考面处波前的曲率半径等于参考面到系统像方焦点的距离。而(29)式说明, 尽管光束的两束腰并不共轭, 但两共轭面上的光斑大小之比正好等于系统的横向放大率  $\beta$ 。更一般地, 把(25)式代入(15)式, 得:

$$\begin{aligned} \omega'^2 &= \left[ (\beta z)^2 + \beta^2 \left( \frac{\pi\omega_0^2}{\lambda} \right)^2 \right] (\lambda/\pi\omega_0)^2 \\ &= \beta^2 \omega_0^2 \left[ 1 + \left( \frac{\lambda z}{\pi\omega_0^2} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

将(3)式代入上式, 即得:

$$\omega' = \beta\omega \quad (30)$$

(30)式表明, 任一对共轭平面上光斑大小之比等于这对共轭面间的垂轴放大率, 并不要有一个束腰一定位于相应的共轭面上, 田中一夫<sup>[7]</sup>和 R. Herloski 等人得出的结论<sup>[2]</sup>只是(30)式的一种特例, 即物方光束腰位于物方参考面上的情况。

### 3.4 参考面位于系统前后焦平面

在讨论单个薄透镜对高斯光束的变换特性时, 我们已证明, 物方束腰位于薄透镜前焦面时, 像方束腰位于薄透镜的后焦面上且束腰获得最大值。这个结论可以推广到任一个光学系统。首先, 假设两参考面分别位于光学系统的前后焦面<sup>[4]</sup>上, 则有:

$$\begin{cases} {}^1A_{k+1} = {}^0D_k = 0 \\ {}^1C_k = -1/{}^0B_{k+1} = \Phi \end{cases} \quad (31)$$

将(31)式代入(12)~(15)式, 得:

$$\begin{cases} z' = -z/\Phi^2 [z^2 + z_0^2] \\ \omega_0' = f'\theta / \sqrt{1 + (z/z_0)^2} \\ R' = -f'^2/z \\ \omega' = \frac{1}{\Phi} \left( \frac{\lambda}{\pi\omega_0} \right) = f'\theta \end{cases} \quad (32)$$

如果物方光束腰位于物方焦平面上,因  $z=0$ ,则上式变为:

$$\begin{cases} z' = z = 0 \\ R' = R = \infty \\ \omega'_0 = \omega' = f'\theta \end{cases} \quad (33)$$

式中  $f'$  为光学系统的组合焦距。比较(32)式和(33)式可知,如果  $z \neq 0$ ,则  $z' \neq 0$ ,且  $\omega'_0 < f'\theta$ ,因此,当  $z=0$  时,即物方光束腰位于光学系统物方焦面时,像方束腰位于系统像方焦面上( $z'=0$ ),且获得最大值  $\omega'_{0max} = f'\theta$ 。显然,这与几何光学中系统前后焦面不可能是共轭的结论形成鲜明的对比。

### 3.5 无焦系统

我们考虑两参考面共轭的望远系统或称无焦系统<sup>[4]</sup>,有:

$$\begin{cases} {}^1A_{i+1} = {}^0D_i = \gamma, \\ {}^1C_i = \Phi = 0, \quad {}^0B_{i+1} = 0 \end{cases} \quad (34)$$

代入(12)~(15)式,得:

$$\begin{cases} z' = z/\gamma^2 = \alpha z \\ \omega'_0 = \omega_0/\gamma^2 = (\beta\omega_0)^2 \\ R' = \frac{1}{\gamma^2} \frac{1}{z} \left[ z^2 + \left( \frac{\pi\omega_0^2}{\lambda} \right)^2 \right] = \frac{1}{\gamma^2} R = \alpha R \\ \omega'^2 = \frac{1}{\gamma^2} \left[ z^2 + (\pi\omega_0^2/\omega)^2 \right] (\lambda/\pi\omega_0)^2 = \frac{1}{\gamma^2} \omega^2 = (\beta\omega)^2 \end{cases} \quad (35)$$

由上式可知,对无焦系统,物像方光束腰之比仅与系统的角放大率  $\gamma$  有关。当物方光束腰一定时,像方光束腰与角放大率  $\gamma$  成反比。如果要实现光束的准直,压缩光束的发散角,则要求  $\omega'_0 > \omega_0$ ,即要求角放大率  $\gamma < 1$ 。由于通常的望远系统  $\gamma > 1$ ,因此,通常用倒置的望远系统来实现光束的准直<sup>[1]</sup>。(35)式第三和第四式表明,对于一给定的无焦系统而言,像方任一位置上的光斑大小和波前曲率半径只与其共轭的物平面上的光斑大小和波前曲率半径有关。

如果物方光束腰位于物方参考面上,即  $z=0$ ,由式(35)第一式得  $z'=0$ ,这说明像方束腰落在共轭的像方参考面上。因此,在无焦系统中,高斯光束的两束腰是可以共轭的。这样,变换高斯光束的无焦系统就与普通的无焦系统达成一致。

## 4 结 论

通过以上的讨论,归纳起来,高斯光束通过光学系统的传输与变换有以下特点:

1. 一般情况下,高斯光束通过光学系统后,像方光束腰位置  $z'$  不仅和光学系统的结构参数及物方光束腰位置  $z$  有关,而且还与物方光束腰大小  $\omega_0$  有关。
2. 高斯光束经过有限焦距系统后,光束腰的“放大率” $\omega'_0/\omega_0$  与物方光束腰的大小有关;在无焦系统中,束腰放大率由系统的角放大率决定。
3. 一般情况下,物像方高斯光束的光束腰所在的两平面并不共轭,只有在无焦系统中,二者才有可能共轭。
4. 光学系统中任一对物像共轭面上光斑大小之比等于该共轭面的横向放大率。
5. 对有限焦距系统,如果光束腰位于该光学系统的前焦面上,则像方光束腰位于系统的后

焦面上,且像方光束腰取得最大值。该最大值等于系统的焦距  $f'$  与物方光束的远场发散角之乘积。

### 参 考 文 献

- 1 魏光辉,朱宝亮. 激光束光学. 北京工业学院出版社,1988.
- 2 Herloski R. Gaussian beam ray-equivalent modeling and optical design. Appl. Opt. 1983,22(8):1168
- 3 Tanaka K. Gaussian Brackets and their application to paraxial theory. Optik,1983,64(1):13,64(2):89
- 4 林银森. 高斯括号原理及其应用. 武测科技,1985(1)
- 5 Tanaka K. Paraxial analysis of zoom lens with built-in range extender. 1982,60(2):209
- 6 Tanaka K. Paraxial analysis of mechanically compensated zoom lenses. Appl. Opt. 1982,21(12):2174
- 7 Tankak K. Analysis and synthesis of Gaussian beam optical system. Optik,1984,67(4):345

## On the Feature of Gaussian Beam Propagation and Transformation Based on the Gaussian Bracket

*He Pingan      Lin Yinsen*

**Abstract** In this paper, the feature of the propagation and transformation of Gaussian beam through an optical system is analysed detailedly on the basis of the ABCD law of Gaussian beam in terms of Gaussian Brackets. Then, a variety of typically optical systems or some special cases are discussed deeply. Finally, some important conclusions, which are practically applied, are obtained.

**Key words** Gaussian bracket; Gaussian beam; ABCD law