

关于地形复杂地区地形改正的 FFT 算法*

吴黎明

摘要 大面积地形改正的快速计算,对现代大地测量实践具有重大意义,尤其是在那些地形复杂地区。本文通过理论分析选出了一种适于此类地区地形改正计算的 FFT 算法,并给出了用于实际计算的数学模型。试算结果表明,该模型用于特大山区能够获得与双三次样条柱算法精度相当的结果。

关键词 地形复杂地区;地形改正;FFT

快速付立叶变换(FFT)技术的应用使得大面积地形改正的计算不再是一项非常繁重的工作,鉴于其在应用上的广泛前景,近几年国内外对此都做了许多研究。但由于该方法在实际应用中存在的近似性,人们对其用于地形复杂地区的有效性及精度还缺乏确切的认识,而地形起伏越是剧烈,地形改正的重要性也越是明显。为此本文对适用于特大山区改正计算的 FFT 算法及其精度做了研究。

1 地形改正 FFT 算法概述

如图 1 所示,局部地形对地面一点 P 的引力位为:

$$T_p = G\rho \iint_R \frac{1}{l} dE dZ \quad (1)$$

式中 $l = [(x-x_p)^2 + (y-y_p)^2 + (z-h_p)^2]^{\frac{1}{2}}$

G 为引力常数, ρ 为地形密度。

设 $d = [(x-x_p)^2 + (y-y_p)^2]^{\frac{1}{2}}$, 若 $\left(\frac{z-h_p}{d}\right)^2 \ll 1$ 则可将 $\frac{1}{l}$ 写成 $\left(\frac{z-h_p}{d}\right)^2$ 的级数形式,进一步导出下列地形改正计算公式

$$TC_p = G\rho \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{(i-1)} a_i \iint_R \frac{(h-h_p)^{2i}}{d^{2i+1}} dE, a_i = \frac{(2i)!}{(2^i i!)^2} \quad (2)$$

显然等式右端是由卷积组成的,因而是可以用 FFT 来实现,取其线性项得

$$IC_p = \frac{1}{2} G\rho \left[\iint_R \frac{h^2}{d^3} dE - 2h_p \iint_R \frac{h}{d^3} dE + h_p^2 \iint_R \frac{1}{d^3} dE \right] \quad (3)$$

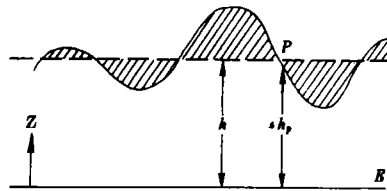


图 1

收稿日期:1992-05-29

* 本文为硕士论文的一部分,指导教师为管泽霖教授、左传惠高级工程师。

用 * 表示卷积上式可写成

$$TC_r = \frac{1}{2}G\rho[h^2 * r - 2h_r h * r + h_r^2 R(0,0)] \quad (4)$$

式中 $r = (x^2 - y^2)^{-3/2}$, $R(0,0)$ 是 r 函数谱在 $u=0, v=0$ 处的值。

用 F, F^{-1} 分别表示付立叶正变换和逆变换, 根据卷积定理

$$TC_r = \frac{1}{2}G\rho[F^{-1}\{F\{h^2\}F\{r\}\} - 2h_r F^{-1}\{F\{h\}F\{r\}\} + h_r^2 R(0,0)] \quad (5)$$

一般为

$$TC(x, y) = \frac{1}{2}G\rho[F^{-1}\{F\{h^2\}F\{r\}\} - 2h_r F^{-1}\{F\{h\}F\{r\}\} + h_r^2 R(0,0)] \quad (6)$$

由于函数 r 在原点处奇异, 计算时对它进行采样将出现困难, 可以通过以下两种方法解决。

第一种方法是直接利用垂直微分算子的谱函数实现计算 (Sideris, 1990)。垂直微分算子 L 的定义如下:

$$Lf = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{f - f_r}{d^3} dE \quad (7)$$

$$L^* f = \frac{\partial f}{\partial z^*} = L(L^{*-1}f) \quad (8)$$

若 $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$, 可以证明:

$$F\{L\} = D_z = -2\pi(u^2 + v^2)^{1/2} \quad (9)$$

$$F\{L^*\} = D_z^* = [-2\pi(u^2 + v^2)^{1/2}]^* \quad (10)$$

可见谱函数 D_z, D_z^* 都不是奇异函数, 于是如果式(2)可用 L 算子严格表达, 其计算就可利用 L^* 数函数谱 D_z^* 来实现, 从而避免在时域中对 r 的函数进行采样, 事实上式(2)可写成

$$TC_r = 2\pi G\rho \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i)!} L^{2i-1}(\Delta h^{2i}) \quad (11)$$

与式(2)相同, 此式唯一要求的条件是 $\Delta h^2/d^2 \leq 1$, 其线性项为:

$$TC_r = \pi G\rho[Lh^2 - zh_r Lh] \quad (12)$$

去掉脚标 P 得其一般形式

$$TC(x, y) = \pi G\rho[Lh^2 - 2h_r Lh] \quad (13)$$

此式的积分形式即为式(6), 因此根据 L 算子的性质式(6)的严格频谱计算式为

$$TC(x, y) = \frac{1}{2}G\rho[F^{-1}\{F\{h^2\}D_z\} - 2h_r^{-1}\{F\{h\}D_z\}] \quad (14)$$

第二种方法是在函数 r 中加入一小的非零常数 α^2 , 即用函数

$$r_1(x, y) = (x^2 + y^2 + \alpha^2)^{-3/2}$$

代替函数 r , 得

$$TC(x, y) = \frac{1}{2}G\rho[F^{-1}\{F\{h^2\}F\{r_1\}\} - 2h_r F^{-1}\{F\{h\}F\{r_1\}\} + h_r^2 R_1(0,0)] \quad (15)$$

同样 $R_1(0,0)$ 为 r_1 函数谱在 $u=0, v=0$ 处的值。

2 地形复杂地区地形改正 FFT 算法的数学模型

2.1 公式严密性证明

一般认为,式(14)是式(6)的严格的频谱计算式,而式(15)是在式(6)中加入常数 α 得到的近似式(Sideris, 1990; Harrison and Dickinson, 1989)。下面要证明,式(15)事实上是地形改正另一种严格展开式线性项的频谱计算式。

根据引力位的性质,由式(1)可得 P 点的地形改正为

$$TC_p = G\rho \iiint_{\Sigma} \frac{Z - h_p}{l^3} dEdZ \quad (16)$$

将 l 写成 $l = [d_1^2 + (Z - h_p)^2 - \alpha^2]^{\frac{1}{2}}$, 式中 $d_1 = [(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 + \alpha^2]^{\frac{1}{2}}$, 则有

$$\frac{1}{l^3} = \frac{1}{[d_1^2 + (Z - h_p)^2 - \alpha^2]^{3/2}} = \frac{1}{d_1^3 \left[1 + \frac{(Z - h_p)^2 - \alpha^2}{d_1^2} \right]^{3/2}}$$

若 $\left| \frac{(Z - h_p)^2 - \alpha^2}{d_1^2} \right| \leq 1$, 则上式可展开为下列级数形式

$$\frac{1}{l^3} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{(2i+1)!!}{2^i} \frac{[(Z - h_p)^2 - \alpha^2]^i}{d_1^{2i+3}} \quad (17)$$

将展开后的 $\frac{1}{l^3}$ 回代到式(16)里,并将加和号移到积分号外得

$$TC_p = G\rho \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{(2i+1)!!}{2^i} \iiint_{\Sigma} \frac{[(Z - h_p)^2 - \alpha^2]^i (Z - h_p)}{d_1^{2i+3}} dEdZ \quad (18)$$

显然上式不存在任何近似,唯一要求的条件是 $\left| \frac{(Z - h_p)^2 - \alpha^2}{d_1^2} \right| \leq 1$, 因而与式(2)一样是严格的,其线性项就是

$$\begin{aligned} TC_p &= G\rho \iiint_{\Sigma} \frac{(Z - h_p)}{d_1^3} dEdZ = \frac{1}{2} G\rho \iiint_{\Sigma} \frac{(h - h_p)^2}{d_1^3} dE \\ &= \frac{1}{2} G\rho \left[\iiint_{\Sigma} \frac{h^2}{d_1^3} dE - 2h_p \iiint_{\Sigma} \frac{h}{d_1^3} dE + h_p^2 \iiint_{\Sigma} \frac{1}{d_1^3} dE \right] \end{aligned} \quad (19)$$

此式一般形式的频谱表达式即为式(15)。

2.2 关于公式的选择

可以看出式(18)和式(2)都收敛得非常快,加上受客观条件限制,所以在实际计算时只采用它们的线性项,即式(15)或式(14)。在地形变化比较平缓地区两式相差无几,但哪个公式更适用于地形复杂地区则需仔细考虑,选择的原则有以下二个:其一,用于地形起伏大的地区时,公式本身的精度高低;其二,公式克服 FFT 算法特有误差的能力,以下根据这两个原则,对式(15)和式(14)做几点分析:

a) 在地形起伏很大的地区,式(14)所要求的条件 ($|\Delta h|/d \leq 1$) 可能得不到满足。表 1 是我国川西地区某 $1^\circ \times 1^\circ$ 区域内 $|\Delta h|/d$ 值分布统计表,表中所列的是在不同间距格网中不同 $|\Delta h|/d$ 点个数。可以看出两种间距的 DTM 都有 $|\Delta h|/d$ 大于 1 的情况出现,而且地形数据越是精细,即地形格网越密,这种情况出现得越多。而对于某一具体区域,通常都可以选择适当的 α 值,使得区域内各地形网点上 $\left| \frac{(Z - h_p)^2 - \alpha^2}{d_1^2} \right| \leq 1$ 。

b) 即使条件 $|\Delta h|/d \leq 1$ 能够满足,在地形起伏大的情况下,式(15)可得出比式(14)更精确的结果,因为一般情况下总可以使得 $\sqrt{(Z - h_p)^2 - \alpha^2}/d_1 < |Z - h_p|/d$, 这样式(18)的收敛速度就比式(2)快,因而式(15)由于去掉高阶项引起的误差比式(14)小。

表 1

DTM 格网间距	$ \Delta h /d$					
	>1.0	≤ 1.0 >0.9	≤ 0.9 >0.8	≤ 0.8 >0.7	≤ 0.7 >0.6	≤ 0.6 >0.5
$30'' \times 30''$	8	46	111	485	1120	2452
$18''.75 \times 28''.125$	447	559	1349	2731	4581	5501

c) FFT 所特有的问题是循环卷积与线性卷积之间的差异,式(14)是采用理论谱计算,因而无法顾及这项差异,而式(15)则可以通过重新定义 r_1 完全消除这项误差。

综合以上三点,根据前面提出的二个原则,显而易见式(15)更适于地形复杂地区的地形改正计算。

2.3 公式常数 α 的确定

式(15)与式(14)的本质区别在于式(15)引入了常数 α ,显然选择不同的 α 对式(15)的计算精度有直接影响,图 2 所示的是一圆锥形山峰,其顶点 P 的高程为 H ,坡度角为 θ ,任一点高程为

$$h(x, y) = h(r_0) = \begin{cases} H - r_0 \operatorname{tg} \theta & r_0 \leq H / \operatorname{tg} \theta \\ 0 & r_0 > H / \operatorname{tg} \theta \end{cases} \quad (20)$$

式中 $r_0 = (X^2 + Y^2)^{1/2}$,坐标原点设在 P 点。

通过积分可以得到 P 点的地形改正真值 TC_{exact} 以及用式(15)求得的结果 $TC(\alpha)$ 。

$$TC_{\text{exact}} = 2\pi G\rho \int_0^\infty r_0 dr_0 \int_H^{h(r_0)} \frac{(Z-H)}{(r_0^2 + (Z-H)^2)^{3/2}} dZ = 2\pi G\rho H \sin \theta \quad (21)$$

$$\begin{aligned} TC(\alpha) &= 2\pi G\rho \int_0^\infty r_0 dr_0 \int_H^h \frac{(Z-H)}{(r_0^2 + \alpha^2)^{3/2}} dZ \\ &= 2\pi G\rho \operatorname{tg} \theta [(H^2 + \alpha^2 \operatorname{tg}^2 \theta)^{1/2} - \alpha \operatorname{tg} \theta] \end{aligned} \quad (22)$$

解方程

$$\operatorname{tg} \theta [(H^2 + \alpha^2 \operatorname{tg}^2 \theta)^{1/2} - \alpha \operatorname{tg} \theta] = H \sin \theta$$

可得用式(15)计算 P 点地形改正时, α 的优选值为

$$\alpha = H \sin \theta / 2 \quad (23)$$

通常 $\theta \neq 0$,可见最优 α 的绝对值总是大于零,这再一次说明了式(15)较式(14)的精确性。

在实际情况下,一般是用 FFT 同时计算一区域内所有地形格网点的的海拔改正,地形起伏绵延不断,不象独立的圆锥形山峰那么简单。但是,由于 $(Z-h_p)^2/d_i^2$ 随距离的增大收敛很快,因此某一格网点的的海拔改正 α 可以只由其相对周围相邻点的起伏确定。不难想到,对一给定区域,最优 α 值可以采用地形格网间距和该区域地形起伏的标准差按照圆锥形山峰的处理方法求得。根据式(23)得到实用的 α 计算公式为

$$\alpha = \sigma_i^2 / 2 \sqrt{\sigma_i^2 + d_0^2} \quad (24)$$

式中 d_0 为 DTM 网间距, $\sigma_i = \sqrt{[(h-\bar{h})^2]/n}$, h 为各 DTM 格网点的的海拔, \bar{h} 为区域平均高程, n 为

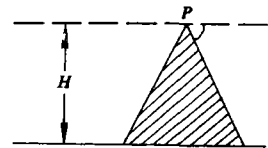


图 2

DTM 格网点数。

2.4 用于实际计算的数学模型

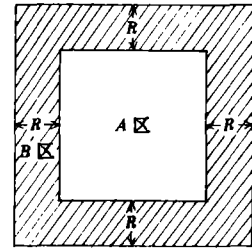
通过前文的讨论,确认式(15)适用于地形复杂地区,由于 FFT 技术特有的循环卷积误差,必须对 r_1 重新定义,设计算半径为 R ,则

$$r_1(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2 + \alpha^2)^{-3/2} & \sqrt{x^2 + y^2} \leq R \\ 0 & \sqrt{x^2 + y^2} > R \end{cases} \quad (25)$$

这样在距 DTM 数据边缘 R 的范围内,计算结果就不受循环卷积误差的影响。图 3 所示的是 FFT 结果精确值取值范围, A 区为精确值区域, B 区为边缘区域,其宽度即为计算半径的长度。

至此可以写出用于地形复杂地区改正计算的 FFT 算法的数学模型为

$$\begin{cases} TC(x, y) = \frac{1}{2} G \rho [F^{-1}\{F\{h^2(x, y)\}F\{r_1\}\} \\ \quad - 2h(x, y)F^{-1}\{F\{h(x, y)\}F\{r_1\}\} + h^2(x, y)R_1(0, 0)] \\ r = \begin{cases} (x^2 + y^2 + \alpha^2)^{-3/2} & \sqrt{x^2 + y^2} \leq R \\ 0 & \sqrt{x^2 + y^2} > R \end{cases} \\ \alpha = \sigma_a^2 / 2 \sqrt{\sigma_a^2 + d_0^2} \\ R_1(0, 0) = F\{r_1\} / u = 0, v = 0 \end{cases}$$



A 区为精确值区域 B 区为边缘区域

图 3 FFT 结果精确值取值范围示意图

式中 R 为计算半径, σ_a 为计算区高程的标准差, d_0 为 DTM 格网间距。

3 算例与分析

为了考察地形改正 FFT 算法在地形复杂地区的计算精度,在川西地区选择了一地形起伏特别突出的试验区,所用 DTM 格网间距为 $30'' \times 30''$,区域的大小为 $1^\circ \times 1^\circ$,对其中所有 14400 个 DTM 格网点高程的统计结果显示,区域内高程最大值为 5641 米,最小值为 615 米,平均值为 3027 米,高程的标准差为 1049 米。试算时计算半径取为 50 公里。从图 3 看,为了获得试算区内所有地形格网点上的精确地形改正值。必须采用区域以外 50 公里的地形数据。因而计算实际使用了范围约为 200×200 公里的地形数据。

用于衡量 FFT 算法精度的双三次样条棱柱算法。由于 FFT 算法给出的是地形格网点上的地形改正值,因此重力点上的地形改正值一般要经过内插才能得到,这样就会引起误差,为了将这一误差考虑进去,本文比较的是分散在试算区内 42 个重力点上的两种算法的结果,棱柱法的结果是直接计算的,FFT 结果由其算出的格网地形改正数据采用双二次曲线内插法内插得到。为了考察常数 α 的取值对计算结果的精度的影响由式(24)确定 α 的实用性,采用了 17 个不同的 α 值,各计算结果及其与棱柱法结果之比较列于表 2。

由表 2 可以着出,FFT 算法结果的精度一般优于 2.0 毫伽,选择最佳 α 值可使差值均方根和标准差小于 1.5 毫伽,而差值平均值小于 0.5 毫伽,由于受目前 DTM 采样的密度和精度的限制以及地壳密度异常的影响,在大山区,这个差值在地形改正计算实际能达到精度范围之内(Hans Siinkel, 1984)。因此可以说采用本文的地形改正 FFT 算法模型在地形起伏明显地区

其结果精度与双三次样条棱柱算法相当。

常数 α 的取值对计算精度的影响比较明显。从表 2 中看,在试算区其对差值平均值的影响超过 1.0 毫伽,对差值均方根值的影响也超过 0.5 毫伽, α 的最佳值在 400 米附近,而用式 (24) 算出的 α 值为 398 米,两者符合得很好,因此在实际工作时可以由式 (24) 简便地确定 α 值。图 4 是根据表 2 绘出的 FFT 算法的精度随 α 值的变化情况,它很直观地表明实际计算结果与本文讨论的结论是一致的。

表 2

统计量 方法	地形改正结果					棱柱法—FFT法					
	MIN	MAX	MEAN	MIN	STA. DEN.	MIN	MAX	MEAN	RMS	STA. DEN.	
棱柱法	3.380	60.720	25.035	31.065	±18.393						
F	$\alpha=20m$	4.089	63.844	26.130	32.688	±19.640	-0.049	-6.010	-1.095	2.162	±1.864
	$\alpha=50m$	4.089	63.830	26.113	32.665	±19.624	-0.045	-5.895	-1.079	2.141	±1.849
	$\alpha=100m$	4.089	63.647	26.047	32.583	±19.575	-0.075	-5.807	-1.012	2.081	±1.818
F	$\alpha=150m$	4.089	63.415	25.967	32.480	±19.510	-0.066	-5.495	-0.933	2.000	±1.769
	$\alpha=200m$	4.090	63.082	25.835	32.322	±19.423	-0.014	-5.183	-0.800	1.904	±1.727
	$\alpha=250m$	4.090	62.681	25.685	23.135	±19.310	-0.032	-4.782	-0.651	1.785	±1.662
T	$\alpha=300m$	3.981	62.228	25.501	31.912	±19.186	0.056	-4.271	-0.466	1.673	±1.606
	$\alpha=350m$	3.981	61.691	25.301	31.666	±19.041	-0.028	-3.648	-0.266	1.566	±1.543
	$\alpha=400m$	3.981	61.163	25.085	31.396	±19.879	0.041	-3.604	-0.051	1.4198	±1.497
算 法	$\alpha=450m$	3.981	60.609	24.862	31.119	±18.715	-0.0552	3.995	0.173	1.495	±1.485
	$\alpha=500m$	3.981	59.962	24.629	30.827	±18.540	-0.005	4.385	0.406	1.526	±1.471
	$\alpha=550m$	3.982	59.322	24.381	30.525	±18.367	-0.006	4.802	0.653	1.637	±1.501
	$\alpha=600m$	3.987	58.683	24.137	30.219	±18.183	0.012	5.214	0.898	1.787	±1.545
	$\alpha=650m$	3.997	58.020	32.883	29.903	±17.994	0.006	5.647	1.151	1.981	±1.612
	$\alpha=700m$	3.997	57.294	32.635	29.593	±17.809	-0.027	6.067	1.400	2.206	±1.705
	$\alpha=750m$	3.997	55.345	23.395	29.295	±17.632	0.041	6.285	1.640	2.445	±1.813
	$\alpha=800m$	3.999	54.623	23.146	28.983	±17.444	0.037	6.875	1.889	2.707	±1.939

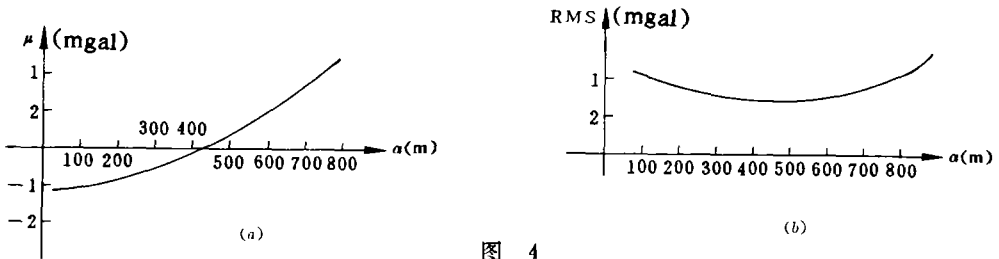


图 4

4 结 论

本文的研究表明,一般认为具有较大近似性的在积分核中加入常数以避免其奇异性的地形改正 FFT 算法,恰恰是适用于地形复杂地区的更为精确的方法。文中提出了一个确定常数 α 的简便实用公式,给出了适于地形复杂地区地形改正计算的数学模型。试算结果证明这种 FFT

算法在地形起伏特别大的地区能够取得与双三次样条棱柱算法精度相当的结果。

参 考 文 献

- 1 Sideris M G. Rigorous gravimetric terrain modelling using Molodensky' s operator. *manuscripta geodaetica*, 1990, 15(2);97—106
- 2 Harrison J C. and Dickinson M. Fourier transform methods in local gravity modelling . *Bull Geod*, 1989, 63(2), 149—166
- 3 宗孔德,胡广书。数字信号处理。北京:清华大学出版社,1988。
- 4 Hans SiinKel. For the prediction of the gravity disturbance vector at altitudes, Report No. 359, Dept. of Geod, sci, and Sur. OSU, 1984

On the FFT Method of Terrain Corretion Computation in Rough Mountain Areas

Wu Liming

Abstract The fast computation of terrain correction in a large area is significant for modern geodetic practice, especially in rough mountain areas. In this paper one FFT method of terrain correction computation is seleted for this kind of areas through theoretic analysing and a mathematic model for practical application is proposed. The computation experiment shows that the results caculated by this model are as accurate as those caculated by bicubic spline prism method in extremely rough mountain areas.

Key words rough mountain area; terrain correction; FFT