Helmert—WF(权因子)方差分量估计

吴　晓　清

(珠海市西区规划办公室)

摘　要　本文利用权因子(Weight Factor)概念阐述了 Helmert—WF 方差分量估计的原理,并给出了其相应的计算公式及其解域与可估的条件。文中从数学分析的观点指出了负方差存在的可能性及原因,而且还就 Helmert—WF 法与 Helmert 法的异同作了比较,指出了 Helmert 法中的某些缺陷与不足。算例对所给结论作了很好的印证。

关键词　权因子;Helmert—WF 方差分量估计;负方差

1　概　述

自从 1924 年赫尔默特(Helmert)提出方差分量估计的理论以来,不少学者如 Kubik,Serbetci,Enber,Förstner,Welsch,Rao,Koch,Grafarend,Schaffring,以及我国周江文教授,李德仁博士等对赫尔默特估计方法进行了扩展或简化,并进行了大量的研究和应用推广,但是,正如文献〔1〕〔2〕〔5〕所指出:负方差的问题,譬如究竟由什么原因引起,在什么情况下会出现以及如何避免等问题一直未得到完满解决。正是这一问题的存在,使得人们在对方差分量估计理论有着极大的兴趣与重视的同时,却又小心翼翼地应用和推广这一理论;也正是这一问题的存在,近几年来,该课题的研究依然给人们以极大的兴趣与关注,文献〔4,5,6〕所研究的问题颇有进展。尽管文献〔5〕的 WF 法从新的角度去探讨了这一问题,但仍不全面。

本文提出的 Helmert－WF 方差分量估计将利用数学分析理论进行更深一步的研究,该法指出了负方差存在的可能性及出现的原因,并且给出了 Helmert—WF 法方差分量估计的解的函数值域以及避免负方差出现的条件,亦即可估的条件式。

必须指出的是,人们在研究方差分量的估计这一理论的时候,或许不该忽视了这个不容忽视的问题:单位权方差与权的本质含义,文献〔3〕中指出:在一组观测值中,只能选定一个 σ_0^2 值,不能选用几个不同的 σ_0^2 值,否则就破坏了权之间的比例关系。而当前的方差分量估计中恰恰并非如此,它们从一开始就定义了不同的 σ_{0i}^2 值,虽然通过迭代使 σ_{0i}^2 相等以满足只有一个 σ_0^2 这一要求,但是我们指出要求 $\hat{\sigma}_{0_1}^2=\hat{\sigma}_{0_2}^2=\cdots=\hat{\sigma}_{0_m}^2$ 这一迭代收敛条件并不是严格的。

基于这些认识,我们定义了权因子(Weight Factor)这一概念,并充分运用这一概念,详细地阐述了 Helmert－WF 方差分量估计的原理,通过与 Helmert 法的理论上分析和实例计算比较,得出了 Helmert－WF 法与 Helmert 法有着本质的区别这一重要结论,这一结论为我们进一步研究方差分量估计理论打下了基础。

收稿日期:1992-06-03

2 Helmert－WF 方差分量估计的原理

2.1 权因子

文献〔5〕中已非常清楚地阐明了(Weight－Factor)的概念及其意义，这里简述如下(以两类观测值为例)：

设两类观测值 $\underset{n_1\times 1}{L_1}$；$\underset{n_2\times 1}{L_2}$，其先验权为 $\underset{n_1\times n_1}{p_1}$；$\underset{n_2\times n_2}{p_2}$ 而其正确的先验权为 $\underset{n_1\times n}{p_1^0}$，$\underset{n_2\times n_2}{p_2^0}$，因 p_1^0，p_2^0 通常是未知的，一般是通过验后估计而获得，故 p_1^0，p_2^0 又称验后权。由于权只有相对意义，故令：

$$p_1^0 = p_1 \tag{1}$$

$$p_2^0 = \frac{1}{\alpha} p_2 \tag{2}$$

式(2)中 α 就是我们所定义的权因子(Weight Factor)，它表明：当且仅当先验权是正确的时候，$\alpha=1$，而通常认为 $\alpha\neq 1$。

α 的大小表明了先验权与验后权的比例关系，故称为权因子。

不难知道有下式：

$$D_{L_1} = \sigma_0^2 (p_1^0)^{-1} \tag{3}$$

$$D_{L_2} = \sigma_0^2 (p_2^0)^{-1} \tag{4}$$

将式(1)、(2)代入(3)、(4)：

$$D_{L_1} = \sigma_0^2 p_1^{-1} \tag{5}$$

$$D_{L_2} = \alpha \sigma_0^2 p_2^{-1} \tag{6}$$

由式(6)知：α 还表明了当先验权比不正确时所引起的单位权方差的差异或比值的大小，我们进行验后估计的目的就是要求得这个比值，亦即权因子 α 的大小。

2.2 Helmert－WF 估计的原理

采用高斯—马尔柯夫模型

$$\begin{cases} V_1 = B_1 X - L_1 & (7a) \\ V_2 = B_2 X - L_2 & (7b) \end{cases}$$

且有：

$$V = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$N = B^T P B = B_1^T P_1 B_1 + B_2^T P_2 B_2 = N_1 + N_2$$

$$r_1 = n_1 - \mathrm{tr} N^{-1} N_1, r_2 = n_2 - \mathrm{tr} N^{-1} N_2 \tag{9}$$

在 $V^T P V=\min$ 下，以 p_1、p_2 参加平差，易知：

$$V_1 = B_1 \hat{x} - L_1 = (B_1 N^{-1} B_1^T P_1 - E) L_1 + B_1 N^{-1} B_2^T P_2 L_2 \tag{10}$$

则 V_1 的方差为

$$D(V_1) = (B_1 N^{-1} B_1^T P_1 - E) D_{L1} (B_1 N^{-1} B_1^T P_1 - E)^T + B_1 N^{-1} B_2^T P_2 D_{L2} P_2 B_2 N^{-1} B_1^T$$

将(5)、(6)代入上式并整理得

$$D(V_1) = \sigma_0^2 [(B_1 N^{-1} N_1 N^{-1} B_1^T - 2 B_1 N^{-1} B_1^T + P_1^{-1}) + \alpha (B_1 N^{-1} N_2 N^{-1} B_1^T] \tag{11}$$

而
$$E(V_1^TP_1V_1)=\mathrm{tr}[P_1D(V_1)] \tag{12}$$

将式(11)代入(12),整理得

$$E(V_1^TP_1V_1)=(n_1-2\mathrm{tr}N^{-1}N_1+\mathrm{tr}N^{-1}N_1N^{-1}N_1)\sigma_2^0+\alpha\mathrm{tr}N^{-1}N_1N^{-1}N_2\cdot\sigma_0^2$$

令 $t=\mathrm{tr}N^{-1}N_1N^{-1}N_2$

则
$$E(V_1^TP_1V_1)=[r_1+(\alpha-1)t]\sigma_0^2 \tag{13}$$

同理可得

$$\begin{aligned}E(V_2^TP_2V_2)&=\mathrm{tr}N^{-1}N_1N^{-1}N_2\sigma_0^2+\alpha(n_2-2\mathrm{tr}N^{-1}N_2+\mathrm{tr}N^{-1}N_2N^{-1}N_2)\sigma_0^2\\&=[\alpha r_2+(1-\alpha)t]\sigma_0^2\end{aligned} \tag{14}$$

于是,由式(13)、(14)可得:

$$\sigma_0^2=\frac{E(V_1^TP_1V_1)}{r_1+(\alpha-1)t} \tag{15}$$

$$\sigma_0^2=\frac{E(V_2^TP_2V_2)}{\alpha r_2+(1-\alpha)t} \tag{16}$$

去掉期望,则有

$$\hat{\sigma}_0^2=V_1^TP_1V_1/[r_1+(\alpha-1)t] \tag{17}$$

$$\hat{\sigma}_0^2=V_2^TP_2V_2/[\alpha r_2+(1-\alpha)t] \tag{18}$$

于是,我们得到了在先验权比不正确的情形下单位权方差的无偏估值的两个公式,它们都是权因子的函数。

因式(17)、(18)是按 Helmert 估计法并加入了权因子 α 这一重要参数而推导出的,故该法称为 Helmert—WF 估计法。

从下面的分析中,我们将看到这两个公式起着十分重要的作用,并且与 Helmert 法有着本质上的区别。

正如前面所述,我们进行验后方差估计的目的,就是要求出权因子 α 的值的大小。

因式(17)、(18)均是 σ_0^2 的无偏估值公式,且均是 α 的函数,那么,同时满足于式(17)、(18)的 α 的值是:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_0^2&=V_1^TP_1V_1/[r_1+(\alpha-1)t]\\&=V_2^TP_2V_2/[\alpha r_2+(1-\alpha)t]\end{aligned}$$

若令
$$a=r_1V_2^TP_2V_2\quad,\quad b=r_2V_1^TP_1V_1 \tag{19}$$

于是有:

$$\alpha=\frac{a-V^TPVt}{b-V^TPVt} \tag{20}$$

式(20)就是 Helmert—WF 估计法的求解公式。

式(20)又可写成:

$$\alpha-1=\frac{a-b}{b-V^TPV\cdot t} \tag{21}$$

式(21)表明先验权比不正确时与先验权比正确时的差异的大小。

2.3 Hemlert—WF 估计的解的值域与可估条件

为了分析 Helmert—WF 估计法的解的值域,亦即 α 的值域,又因 α 是同一个单位权方差的两个无偏估值的函数交点,故我们先从数学分析方法来分析式(17)、(18)的函数特性:

将式(17)、(18)改写后并令:

$$\hat{\sigma}_0^2 = f_1(\alpha) = \frac{1}{\frac{r_1 - t}{V_1^T P_1 V_1} + \frac{t}{V_1^T P_1 V_1} \cdot \alpha} \tag{22}$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = f_2(\alpha) = \frac{1}{\frac{t}{V_2^T P_2 V_2} + \frac{r_2 - t}{r_2^T P_2 V_2} \cdot \alpha} \tag{23}$$

因为是以 P_1、P_2 参加平差，故 r_1；r_2；$V_1^T P_1 V_1$；$V_2^T P_2 V_2$；$\mathrm{tr}N^{-1}N_1N^{-1}N_2$ 均为常数，而 $\hat{\sigma}_0^2$ 是 α 的函数，从数学分析角度讲，$f_1(\alpha)$、$f_2(\alpha)$的图形如图 1 所示。它的主要特性有：

(1)$f_1(\alpha)$、$f_2(\alpha)$分别有渐近线

$$\alpha = -\frac{r_1 - t}{t}$$

及

$$\alpha = -\frac{t}{r_2 - t}$$

(2)$f_1(\alpha)$、$f_2(\alpha)$均为单调减函数，且不存在极值。

(3)因为 $f_1(\alpha)$、$f_2(\alpha)$有着不同的渐近线，故从图 1 中可以看出，第一、二象限内一般只有一个交点，三、四象限内的交点为负值。

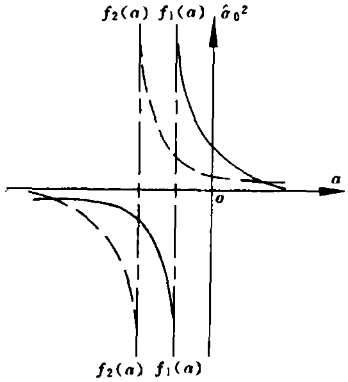

图 1

通过对 $f_1(\alpha)$、$f_2(\alpha)$的函数特性的描述，我们可以直接有下述结论：

(i)无论是 $f_1(\alpha)$、$f_2(\alpha)$函数本身，还是其交点，都存在负值的可能，又因 $f_1(\alpha)$、$f_2(\alpha)$均是单位权方差对 α 的函数，故存在负方差是完全可能的。

而这一点正是 Helmert 估计法本身存在的却又无法能够揭示出来的函数规律，正因为这个原因，使得人们在满怀信心地使用该法进行验后估计的时候，却又小心翼翼地期待着最终结果朝着人们所期望的方向发展。一旦出现了负方差，却又百思不得其解，虽可分析诸多原因，其解释仍不能令人满意，然而，利用我们所定义的权因子的概念，运用数学分析方法来探讨、分析 Helmert 法本身的内部结构机制后，我们能够正确地对待和解释负方差这个问题：负方差具有数学意义，但不能完全具有实际意义。

(ii)函数 $f_1(\alpha)$、$f_2(\alpha)$的渐近线，因通常情况下 $r_1 - \mathrm{tr}N^{-1}N_1N^{-1}N_2 > 0$ 或 $r_2 - t >$是可能的．因而从图 1 中可以看出：即使 $f_1(\alpha)$、$f_2(\alpha)$在一、二象限内是正值，但仍存在 α 为负值的可能，以及 $f_1(\alpha)$、$f_2(\alpha)$的交点为负值的可能，也就是说，当 α 为负值时，存在着负权的可能，但这时对应的方差仍为正值，而 Helmert 估计因定义了 $\sigma_{0_i}^2$，为了保证权为正值，以致出现了负方差，而且 Helmert 估计出现负方差的情形多属这一类。

当出现负权时，有如下解释：(一)在确定的权 P_1、P_2 的这种观测水平及网形结构下，是不可估的，亦即不宜进行验后估计。(二)本应作为已知条件(相应地权为∞)参加平差的第二类观测值因不恰当地给定了常数权 P_2 参加平差以至扭曲了实际情况所致。

通过以上的分析，我们充分揭示了 Helmert－WF 估计的函数规律及其内在的结构机制后，我们来探讨 Helmert－WF 估计的解的值域问题及可估条件问题，从实际意义出发，我们要求 $\alpha > 0$。

$$\alpha = \frac{a - V^T PVt}{b - V^T PVt} \tag{20}$$

要使 $a>0$，则应要求

$$\begin{cases} a - V^TPVt > 0 \\ b - V^TPVt > 0 \end{cases} \tag{24}$$

或

$$\begin{cases} a - V^TPVt < 0 \\ b - V^TPVt < 0 \end{cases} \tag{25}$$

为讨论方便，不妨设 $a>b$，于是由(24)、(25)得：

$$V^TPVt < b \tag{26}$$

或

$$V^TPVt > a \tag{27}$$

式(26)、(27)就是 a 为正值的条件，亦即当：

$$b < V^TPVt < a \tag{28}$$

成立时，a 为负值，用图形表示则如图 2 所示：

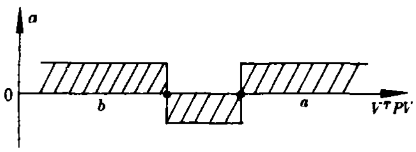

图 2

因此，式(26)、(27)、(28)及图 2 表明了 a 为正值的范围，即 a 的值域，同时也给出了其可估条件，就是说，当式(26)或(27)成立时，a 为正值，是可估的；当(28)式成立时，a 为负值，是不可估的。

由(26)、(27)、(28)可知：要使 $a>0$，这不仅与先验权有关，而且还与网的结构及观测水平有关，并不是所有情况下都可以进行验证估计的，也正是这一可估条件的存在，使得验后估计的应用和推广大大受到限制。

3 Helmert－WF 估计与 Helmert 估计的异同

正如前面所述，Helmert－WF 估计与 Helmert 估计有着本质的区别：

1)Helmert－WF 法是利用求同一估值的函数交点来求解的，是严格的函数相等，且不需迭代计算；而 Helmert 法是通过多个估值相等(对两类观测值要求 $\hat\sigma_{01}/\hat\sigma_{01}=1$)进行迭代求解的，因而应是统计意义上的相等，正因如此，才使得 Helmert－WF 法与 Helmert 法有本质的区别。

2)作为同一个问题中，单位权方差只能有一个，而不是多个，Helmert 估计法认为：由于权比的不正确而导致了 σ_{01}^2、σ_{02}^2 的不一致，以至定义了两个单位权方差，这违背了定权原则[3]，比较式(17)、(18)知，Helmert 估计在迭代过程中 $\hat\sigma_{01}^2$、$\hat\sigma_{02}^2$ 是有偏的，只有当 $\hat\sigma_{01}^2=\hat\sigma_{02}^2$ 成立后才是无偏的，就是说，严格的 Helmert 估计法亦是从有偏到无偏的，然而这一点是 Helmert 法本身不能作出解释的。

3)关于负方差，Helmert－WF 估计法利用函数分析的方法，指出了负方差存在的可能及其范围(式(28)及图 2)，亦给出了权因子的解及其值域，或者说是其可估与不可估的条件式，这些结论却是 Helmert 法无法也难以做到的。

4)关于 Helmert 法中的迭代收敛条件，Helmert 法中要求 $\hat\sigma_{01}^2/\hat\sigma_{02}^2=1$ 作为迭代收敛的条件是不完全合理的(参见式(37))，作为同一个单位权方差的两个估值相等，只要通过统计检验就认为是相等的。当然，由于 σ_{01}^2、σ_{02}^2 的统计属性不太清楚，故在未找到更合理的要求时，$\hat\sigma_{01}^2/\hat\sigma_{02}^2=1$ 这一条件仍然有其存在的依据，上面已指出，$\hat\sigma_{01}^2$、$\hat\sigma_{02}^2$ 是有偏的。而 Helmert－WF 法则

是同一个估值的两个函数相等以求函数交点的方式来解决了这个问题，且是无偏的。

尽管 Helmert－WF 与 Helmert 法有着本质的区别，但它们均是验后估计，自然有其相似之处。

Helmert 法中定义：

$$D_{L_1} = \sigma_{01}{}^2 P_1^{-1} \tag{29}$$

$$D_{L_2} = \sigma_{02}{}^2 P_2^{-1} \tag{30}$$

将(29)、(30)同(5)、(6)比较，有：

$$\sigma_{01}{}^2 = \sigma_0{}^2 \tag{31}$$

$$\sigma_{02}{}^2 = a\sigma_0{}^2 \tag{32}$$

亦即

$$\frac{\sigma_{01}{}^2}{\sigma_{02}{}^2} = 1/a \tag{33}$$

而 $\sigma_{01}{}^2$、$\sigma_{02}{}^2$ 的估值[1]在第一次平差(即以 P_1、P_2 参加平差)后分别是：

$$\hat{\sigma}_{01}{}^2 = \frac{b - V^T PVt}{r_1 r_2 - rt} \tag{34}$$

$$\hat{\sigma}_{02}{}^2 = \frac{a - V^T PVt}{r_1 r_2 - rt} \tag{35}$$

则有：

$$\hat{\sigma}_{01}{}^2/\hat{\sigma}_{02}{}^2 = \frac{b - V^T PVt}{a - V^T PVt} \tag{36}$$

将(36)与(20)比较有：

$$\hat{\sigma}_{01}^2/\hat{\sigma}_{02}^2 = 1/a \tag{37}$$

由(33)、(37)知：

$$\sigma_{01}{}^2/\sigma_{02}{}^2 = \hat{\sigma}_{01}^2/\hat{\sigma}_{02}^2 = \frac{1}{a} \tag{38}$$

式(38)表明：Helmert 估计法中定义的 $\sigma_{01}{}^2$、$\sigma_{02}{}^2$，其验前之比等于验后之比，且其比值为 $1/a$。

根据权因子的定义知：当且仅当先验权比正确时 $a=1$，而 Helmert 法中要求 $\hat{\sigma}_{01}^2/\hat{\sigma}_{02}^2=1$，那么由式(38)知：$a=1$，且有 $\sigma_{01}{}^2=\sigma_{02}{}^2$，显然这一要求与验后估计的目的是矛盾的，我们之所以进行验后估计，就是因为先验权比不正确，亦即 $a\neq1$，就是说，Helmert 法中的迭代收敛条件是不尽合理的，但这是 Helmert 法中本身是不能作出解释的。

式(37)还表明：Helmert 法的第一次平差求得的 $\hat{\sigma}_{01}^2$、$\hat{\sigma}_{02}^2$的比值恰好就是我们要求的权因子 a 的值的大小。

以上我们阐述了 Helmert－WF 法与 Helmert 法的异同之处，下面我们将给出实例来验证我们的理论。

4 算　例

算例来源于〔1〕，如图 3 所示。

为了更好地验证我们的理论，我们设计了四个不同的方案，同时亦进行了 Helmert 估计。

图(3)所示算例的一些已知数据是：边角网中，已知测角数 $n_1=12$，测角中误差 $m_\beta=\pm1''.5$，测边数 $n_2=6$，测边中误差 $m_s=\pm2.0\text{cm}$，未知数 $t=4$。

表1

方案一	Helmert 方法	Helmert-WF 方法
1. $AN=12$(测角)	1. 迭代收敛	1. 满足可估条件(26)、(27)式
$SN=6$(测边)	$\hat{\sigma}_{01}^2/\hat{\sigma}_{02}^2=1.0057$	亦即 $a=140.53$
$m_s=\pm 2.0$ cm	迭代次数=3	$b=145.01$
$M_A=\pm 1''.5$	2. $\hat{\sigma}_0^2=\frac{V^TPV}{r}=\frac{50.705}{14}$	$V^TPVt=37.90$
$P_1=1.0$		有 $a>V^TPVt$
$P_2=0.5625$	$=3.622$	$b>V^TPVt$
2. 以 P_1、P_2 平差有:	3. $a'=0.9210$	2. $a=0.9582$
$r1=9.9061$	4. 第一次平差,有	3. $\hat{\sigma}_0^2=\frac{V_1^TP_1V_1}{r_1+(a-1)t}=3.587$
$r_2=4.0939$	$\hat{\sigma}_{01(1)}^2=3.59$	
$V_1^TP_1V_1=35.419$	$\hat{\sigma}_{02(1)}^2=3.43$	$\hat{\sigma}_0^2=\frac{V_2^TP_2V_2}{ar_2+(1-a)t}=3.587$
$V_2^TP_2V_2=14.186$	$\hat{\sigma}_{01(1)}^2/\hat{\sigma}_{02(1)}^2=\frac{1}{0.9582}$	
$V^TPV=49.605$		$\hat{\sigma}_0^2=\frac{V^TPV}{r_1+ar_2}=3.587$
$t=0.7642$		4. 当以正确权 $P_1^0=P_1=1.0$
$a=140.53$		$P_2^0=\frac{1}{a}P_2=0.587$ 平差
$b=145.01$		
$V^TPVt=37.90$		则 $\hat{\sigma}_0^2=\frac{V^TPV}{r}=\frac{50.214}{14}=3.587$

表 2

方案二	Helmert 方法	Helmert—WF 方法
1. $AN=12$	1. 迭代收敛	1. 满足可估条件(26)、(27)式
$SN=3$(三个边号为	$\hat{\sigma}_{01}^2/\hat{\sigma}_{02}^2=1.0044$	亦即$a=44.023$
13. 14. 15)	迭代次数=2	$b=45.814$
$m_s=\pm 2.0$cm	2. $\hat{\sigma}_0^2=\frac{V^TPV}{r}$	$V^TPVt=8.527$
$M_A=\pm 1''.5$		故$a>V^TPVt$
$P_1=1.0$	$=\frac{23.722}{11}$	$b>V^TPVt$
$P_2=0.5625$	$=2.156$	2. $a=0.952$
2. 以 P_1、P_2 平差有:	3. $a'=0.9618$	3. $\hat{\sigma}_0^2=\frac{V_1^TP_1V_1}{r_1+(a-1)t}=2.1636$
$r_1=8.5052$		
$r_2=2.4948$		$\hat{\sigma}_0^2=\frac{V_2^TP_2V_2}{ar_2(1-a)t}=2.1635$
$V_1^TP_1V_1=18.364$		
$V_2^TP_2V_2=5.176$		$\hat{\sigma}_0^2=\frac{V^TPV}{r}=2.1636$
$V^TPV=23.54$		4. 以正确权 $P_1^0=P_1=1.0$
$t=0.3622$		$P_2^0=\frac{1}{a}P_2=0.59$ 平差,则
$a=44.023$		$\hat{\sigma}_0^2=\frac{V^TPV}{r}=\frac{23.801}{11}=2.1637$
$b=45.814$		
$V^TPVt=8.527$		

表 3

方案三	Helmert 方法	Helmert—WF 方法

1. $AN=12$ $SN=2$(13.14 两条边) $m_s=\pm2.0$cm $M_A=\pm1''.5$ $P_1=1.0$ $P_2=0.5625$ 2. 以 P_1、P_2 平差有： $r_1=8.3774$ $r_2=1.6226$ $V_1^TP_1V_1=18.003$ $V_2^TP_2V_2=0.276$ $V^TPV=18.279$ $t=0.3049$ $a=2.312$ $b=29.212$ $V^TPVt=5.572$	1. 第一次迭代出现负方差 $\hat{\sigma}^2_{01(1)}=2.24179$ $\hat{\sigma}^2_{02(1)}=-0.3089$ 2. 迭代仍收敛(这时以负权参加平差仅是数学运算，已无实际意义) 迭代结果： $V_1^TP_1V_1=25.372$ $V_2^TP_2V_2=-3.6928$ $P_1=1.0$；$P_2=-5.504$ $t=-3.2637$ $V^TPV=21.679$ $r_1=11.698$ $r_2=-1.698$ $\hat{\sigma}^2_{01}=2.1665$ $\hat{\sigma}^2_{02}=2.158$ $\hat{\sigma}^2_{01}/\hat{\sigma}^2_{02}=1.0039$	1. 不满足可估条件(26)、(27)式，但满足不可估条件(28)式， 亦即：$a=2.312$ $b=29.212$ $V^TPVt=5.572$ 故有 $a<V^TPVt<b$ 2. $a=-0.1379$ 3. 因不可估(这时可认为 $P_1^0=P_1=1.0$ $P_2^0=P_2=0.5625$) 则 $\hat{\sigma}_0^2=\frac{V^TPV}{V}=\frac{18.279}{10}=1.8279$ 4. 以 $a=-0.1379$ 代入下式 $\hat{\sigma}_0^2=\frac{V_1^TP_1V_1}{r_1+(a-1)t}$ $=\frac{V_2^TP_2VV_2}{ar_2+(1-a)t}$ $=2.241$

表 4

方案四	Helmert 方法	Helmert－WF 方法
1. $AN=12$ $SN=2$(16、17 两条边) $m_s=\pm2.0$ cm $M_A=\pm1''.5$ 2. 以 P_1、P_2 平差 $V_1=9.2618$ $r_2=0.73818$ $V_1^TP_1V_1=35.336$ $V_2^TP_2V_2=8.852$ $V^TPV=44.188$ $t=0.4382$ $a=81.985$ $b=26.084$ $V^TPV=19.363$	1. 迭代收敛 $\hat{\sigma}^2_{01}/\hat{\sigma}^2_{02}=0.9969$ 迭代次数=3 2. $\hat{\sigma}_0^2=\frac{V^TPV}{r}=\frac{22.5955}{10}$ $=2.25955$ 3. $a'=16.0129$	1. 满足可估条件(26)、(27)式 $a=81.985$ $b=26.084$ $V^TPVt=19.363$ 故：$a>V^TPVt$ $b>V^TPVt$ 2. $a=9.32$ 3. $\hat{\sigma}_0{}^2=\frac{V_1^TP_1V_1}{r_1+(a-1)t}=2.738$ $\hat{\sigma}_0^2=\frac{V_2^TP_2V_2}{ar_2+(1-a)t}=2.737$ $\hat{\sigma}^2=\frac{V^TPV}{r_1+ar_2}=2.7375$ 4. 正确权 $P_1^0=P_1=1.0$ $P_2^0=P_2/a=0.0603$ 则 $\hat{\sigma}_0^2=\frac{25.227}{10}=2.5227$

方案一、二、三、四的计算结果见表 1、2、3、4。

从表 1～4 的计算结果可以作如下分析：

1)该算例的方案一、二、三、四的计算结果非常好地验证了我们的 Helmert－WF 估计法的原理所得出的结论。例如方案一、二、四满足可估条件(26～27)式是可估的，而方案三是不可估的。再从方案三、四和网形结构看，除了两方案选择的参与平差的边不同(方案三中以 13、14 两

条边，方案四中以 16、17 两条边参加平差)，其余均一样，但是因对应的网形结构不同，结果方案三不满足可估条件(这时 α 为负值)，而方案 4 中则满足可估条件(这时 α 为正值)。

2)通过 Helmert 法与 Helmert－WF 法的实例比较，我们可以看出两种方法的本质的区别及 Helmert 法存在着自身无法解释的缺陷，同时看到 Helmert－WF 法从本质上解释了负方差这一难题。

Helmert 法与 Helmert－WF 法的解是不同的，从表 1～4 知，Helmert 法中迭代收敛后相对应的权因子 α' 的大小与 Helmert－WF 法中求得的 α 值不相同，这正体现了两者的区别所在。

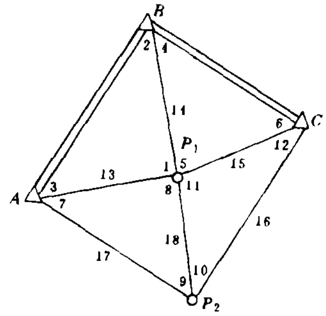

图 3

负方差：在方案三中，我们看到 Helmert 法出现负方差，令人感兴趣的是仍按 Helmert 法进行迭代，则仍收敛，它表明：Helmert 法中存在着严重的缺陷，但却无法解释，可是，从数学意义上讲，Helmert 法的解却是唯一的(迭代收敛)。

而用 Helmert－WF 法，则有着充分的理论解释：在这种网形结构及观测水平下，不满足可估条件(26)(27)式，但满足不可估条件(28)式，即是说不可估的。

在这种情况下，我们求得的 α 是负值(参见表 3，$\alpha=-0.1379$)，但并不出现负方差(亦见表 3，用 $\alpha=-0.1379$ 计算得 $\hat{\sigma}_0^2=2.24$)，这恰好验证了我们的 Helmert－WF 法所得结论：当 α 为负值时，存在着负权，但这时对应的方差仍为正值，而 Helmert 估计因定了 $\hat{\sigma}_{01}^2$、$\hat{\sigma}_{02}^2$，为了保证权为正值，以致出现了负方差(参见图 1)。

Helmert－WF 原理还表明，负方差有其数学意义，却不具备实际意义。

5 结束语

在上面，我们首次提出了 Helmert－WF 方差分量估计的原理，通过理论的分析及与 Helmert 估计的比较，经过实例的验证，我们有如下结论：

1. Helmert－WF 估计与 Helmert 估计有本质的区别。

2. Helmert－WF 法很好地解释了负方差出现的原因及避免负方差的可估条件式，它指出：一个工程控制网的结果能否进行验后估计取决于其网形结构及观测水平，并不是任何情况下都是可进行验后估计的。

3. Helmert 法因定义了不同的 $\hat{\sigma}_{0i}^2$，从而导致了负方差的出现，而 Helmert－WF 定义了权因子，从根本上解释了 Helmert 法出现负方差的原因。

4. Helmert 法的迭代收敛条件是不严格的，且在迭代过程中求出的 $\hat{\sigma}_{0i}^2$ 是有偏的，是从有偏到无偏的，这一点是 Helmert 法本身无法作出解释的。

虽然 Helmert－WF 法较好地弥补了 Helmert 法中的缺陷与不足，但仍有待于作进一步的研究、比如超过两类观测值的验后估计的应用等。

致谢　本文写作过程中曾得到孔祥元教授的指导，特致谢意。

参 考 文 献

1 刘大杰,于正林.广义平差原理(下).武汉测绘科技大学教材,1985.

2 李德仁.摄影测量平差系统的误差处理和可靠性理论(上).武汉测绘科技大学教材,1985.

3 於宗俦,鲁林成.测量平差基础.北京:测绘出版社,1982.

4 朱建军.方差分量的Bayes估计.测绘学报,1991(1).

5 吴晓清.权因子方差分量估计.武汉测绘科技大学学报,1989(4).

6 谭经明.工程三维网验后估计.武汉测绘科技大学硕士论文,1988.

The Method of Helmert—Weight Factor of Variance Component Estimation

Wu Xiaoqing

Abstract This paper gives the method of Helmert—Weight Factor of Variance Component Estimation, and then, the formula, the condition that can be estimated are given too. In the view of mathematical analysis, it is possible that the negative variance exists and why it exists. In the same time, comparing the method of Helmert—WF with that of Helmert, the defect of Helmert method is pointed by a special mode. Given examples show the conclusions are correct.

Key words weight factor; Helmert—WF variance component estimation; negative variance