DOI:10.13203/j.whugis1992.03.012

第17卷 第3期 武汉测绘科技大学学报 Vol.17 No.3
1992年 9月 Journal of Wuhan Technical University of Surveying and Mapping Sep. 1992

基于协调过程的地图政区自动着色

李 霖

摘 要

地图制图中行政区划通常用颜色来区分，本文以*Heawood*定理及其证明过程为基础，提出一个基于协调某些已着色区域，用限定色数对政区进行自动着色的方法。它在只要求区分相邻色块的情况下，用最多5种颜色就可完成着色过程。并且在此方法中，根据制图中图面颜色平衡的要求，引进颜色的权重及相应的着色步骤。通过分析地图行政单元的区划特点以及制图中表示行政单元的要求，指出对政区这一类地图着色，在存在分离区域的情况下，不能保证按给定色数完成自动着色过程。

【关键词】 行政单元；区域着色；分离区域；邻接矩阵

1 引 言

制图区域的着色是地图制图中常见的设计过程之一，它包括选择多少种颜色，选择哪些颜色以及如何着色。有关最少色数问题是一个古老的数学问题，对这个问题的讨论已经历了一个多世纪，但实际应用难题仍留给了当今的数学家。

地图制图中对政区着色，也倾向用较少的颜色来区分各相邻政区，因为颜色数量增多会给实际成图过程带来许多不便，也不经济。一幅地图上到底要多少颜色呢？“四色定理”对这个问题的回答是，只要用不多于四种颜色，就可使各区域与之相邻区域的颜色不同。但是，这仅是一种假设（注：1976年9月，美国伊利诺大学的K·Appel和W·Haken宣称，他们在计算机的协助下证明了这个定理，但没有被公认）。

大量的事实表明，人工对地图进行着色，可能只需四种颜色就可区别相邻区域。但是，用计算机来实现四色着色过程，只有用穷尽试验的方法[5]，即在每个区域可能着四种颜色的组合中，寻找一个可能的着色方案。由于“四色定理”没有公认的结论，也就是说，用穷尽的方式对某一幅图可能只存在四种颜色以上的着色方案。另外，当区域数量增大时，且可能组合数也相当大，在这样大的空间（4^n）中搜索也相当费时。

收稿日期：1992—05—03

但是，Heawood定理及证明的方法，为计算机实现着色过程提供了帮助。据此，本文介绍一种完成限定色数的着色过程，此过程不是用穷尽的方式而是协调某些着色节点完成着色过程。并在此基础上，考虑图面颜色平衡问题，而且还分析说明了：若政区中含有可分离的区域，要满足制图的要求，那么总存在某些政区图不能用预先给定色数的颜色着色。

2 着色过程

2·1 基本概念

Heawood定理（五色定理）：任何平面图，其顶点总可以用 5 种颜色来涂色，使得任何两个相邻的顶点不具有同一种颜色。

此定理的证明可见一般图论教科书，其证明的方法是采用归纳原理，下面将要给出的着色过程是按此思路设计的。为了将着色过程表述清楚，我们用政区图的对偶图来表示，区域与节点对应，一个节点的度数就是与此节点对应的区域具有相邻区域的个数。对区域的着色即将某一颜色代码赋给此节点。

五色定理成立的关键是一个引理：在任何一个平面图中，至少存在一个顶点，其度数小于或等于 5 。

如图 1 ，若有一节点 N_0的度数为5，相邻的 5 个节点N_1，N_2，N_3,N_4,N_5排列如图，且已设置的颜色代码分别为C_1，C_2，C_3，C_4，C_5，此时N_0节点不能在这 5 种颜色中选一种着色，我们必须对已着色的节点进行调整。

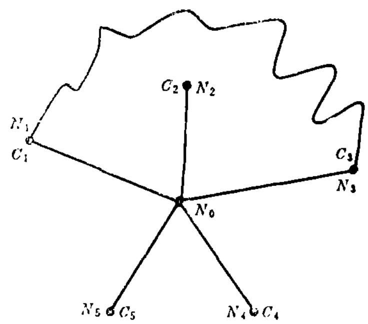

图 1

将已着色的节点分为三类：凡是着C_5色的节点归为一类且不管它；凡着C_1和 C_3 色的节点归为另一类；凡着C_2和C_4色的节点又另作一类。在$\{C_1,C_3\}$类中，我们寻找一条从N_1到N_3的通道，若存在这样一条通道，根据平面图的特征，我们知道就不可能存在一条从N_2到N_4的通道，即$\{C_2,C_4\}$类中至少有两个分支，对于N_2所在的连通道路上，将某些节点的颜色互换，即把着C_2色的节点换成着C_4色，把原来着C_4色的节点改成着C_2色，这样的调换显然不影响其区分性。此时，N_2的颜色由原来的C_2色换成C_4色，因此N_0可着C_2色。反之，若不存在一条从N_1到N_3的通道，对N_1支路上的节点作同样处理，因此N_0可着C_1色，

显然，若节点的度数小于 5 ，则此节点更能着色。因此，凡度数等于或小于 5 的节点可着色。

2·2 着色的一般过程

着色过程中所必要的区域数据是表示区域的邻接关系，即一个区域四周有哪些相邻的区域。通过这些数据可生成着色过程中所需的连通数据。为了确定道路的连通情况，需建立连通矩阵，由于连通是传递的，因而连通的传递闭包可反映出某两点的连通情况。计算这个传递闭包是在一个基本过程（FCL）中进行，因为只有FCL 中才用到传递闭包的元素值。

FCL过程：当一个节点N_0的邻接节点中有$K(K\geqslant5)$个节点已用完全部K种颜色，N_0暂不

能着色时，进行下列处理：

设K种颜色的代码为及相邻节点为$C_1,C_2,\cdots,C_K$和$N_1,N_2,\cdots,N_K$且按此排列。将着C_P，C_{P+2}色的节点归为一类，根据邻接关系建立连通邻接矩阵$M=(m)_{n\times n}$，n为已着色点的总数，M中元素定义如下：

$$m_{ij}=\begin{cases}1 & \text{当节点}N_i,N_j\text{邻接且同属一类}\\ 0 & \text{其他情况}\end{cases}$$

M的传递闭包为$t(M)=M^n$，计算M^n可采用下列方法：首先找出M中元素为1的第i行第j列，而后检查M的第j行第q列的元素值，当元素为1时，令M中的第i行第q列元素为1[3]

若计算后M中与N_P对应的行与N_{P+2}对应列（由于M是对称的，或N_P对应的列与N_{P+2}对应行）的元素为0，则N_P与N_{P+2}不存在连通的通道，从N_P出发将此支路上节点的颜色互换，则N_0节点可着C_P色。

由前面引理以及FCL过程，我们可按下列方法，用不多于5种颜色对政区着色：

若图中有度数大于5的节点，将图中度数小于或等于5的节点暂时去掉，检查余下图（子图）中的节点数，若图中节点度数都不大于5，则对此图中各节点分别着色；若图中还有度数大于5的节点，则继续去掉度数小于或等于5的节点，直到图中所有节点的度数不大于5。对此图中各节点着色后，按去掉节点的相反顺序，将原来去掉的度数小于或等于5的节点依次恢复到图中，每恢复一个节点，就对此节点进行着色，由于恢复到图上的节点其度数仍不大于5，因而可着色。

在着色过程中需用到区域（即节点）的邻接关系，因此，用邻接矩阵表示这些邻接关系，计算机对图的操作可表现为对矩阵的操作。令$B=(b)_{n\times n}$是邻接矩阵，其中

$$b_{ij}=\begin{cases}1 & \text{当}N_i\text{与}N_j\text{邻接（}i\neq j\text{）}\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

在着色过程中，我们还需一个对应表TAB存贮节点号——实际上是区域（或政区）代码以及相应的颜色代码。此外，我们知道，节点度数越大，越难着色，某一节点后着色比先着色难。因此，在着色过程中，应选择节点度数大的先着色，度数小的节点后着色，以此，减少着色过程的复杂性以及提高最小色数着色的成功率。

下面是自动着色的一般过程：

设K是限定的色数，N为节点数（即政区单元数），B为邻接矩阵，B'及N'为当前处理的邻接矩阵及节点数，r为当前阵当前行，$B'=B,N'=N$。

（1）根据节点度数的大小进行排序。即按矩阵（$N'\times N'$）B'中每行中元素值为1的个数重新排列矩阵B'的行序，从上到下，节点度数逐渐减小（B'是对称阵，故B'中行的调整其列也同时作调整）则令r为1。

（2）令与r行相应的节点为N_0，在B'中第r行找到与N_0邻接的节点，表TAB中查看邻接节点的着色情况：

（2·1）若邻接点着色色数小于K，从剩余颜色中选一种颜色给N_0着色，即将节点N_0代码以及相应颜色代码存入TAB表；转（3）。

（2·2）若邻接点着色色数等于K，令$H=\{C_1,C_2,\cdots,C_K\}$在其相邻节点中有$m(m\geqslant k)$个节点（记为P）已着色，此时N_0不能着H中的色，调用协调过程HP，若HP着色成功，将相

应节点及颜色存入TAB表，转（3）；若着色失败，退出。

（2•3）其他，在当前的$N' \times N'$矩阵中，选那些元素值1超过K个的行，组成新的矩阵，若新矩阵与原来$N' \times N'$矩阵相等，着色失败。否则将新的矩阵调换到$N' \times N'$中的左上角，然后，改变N'的值，使此新矩阵为当前矩阵，转（1）。

（3）若$r<N'$，则令r加1，转到（2）。

若$N' \geqslant N$，着色完毕。

否则，令$N'=N$，令r加1，转到（2）。

协调过程HP：

$H=\{C_1,C_2,\cdots,C_K\}$，P为与N_0邻接节点中已着色的集合。首先令H'为空。

(*A*) 若H'与H相同，着色失败，退出。

(*B*) 从H中取出一个与H'不同的元素C_i，将C_i送入H'，对着C_i色的每个节点，根据邻接矩阵B'及TAB表，在P中找出与之邻接节点的颜色，这些颜色的集合为S，令$T=H-S-\{C_i\}$。

(*B*.1) 若$T=\varnothing$，转到（*A*）。

(*B*.2) 若$T\neq\varnothing$从T中移出一元素C_j。

将着色节点C_i,C_j归为一类，其他节点归为另一类，按*FCL*过程中的方法，建立连通邻接矩阵M，并计算其传递闭包，最后在M中，查看每一个着C_i色的行着C_j色的列的元素值。

若元素值为0，即C_i色节点与C_j色节点之间无通道，在P中C_i色节点的支路上，将C_i C_j色互换，此时P中无着C_i色的节点，N_0可着C_i色，着色成功，退出。

若元素值为1，根据B,在P中查看着S中色的节点是否有不相邻的节点。如果没有，转到（*B*•1）；否则，选两不相邻节点的颜色，设为C_i',C_j',在P中着C_i'色节点的支路上，将C_i'与C_j'互换，使N_0着C_i'色，成功退出。

上述着色过程，是对平面图的着色，若限定色数K大于4，则着色成功，这是由引理及Heawood定理所保证的。在其他情况下，这一着色过程可能失败也可能成功，它取决于所着色区域的邻接情况。

3 行政单元的分离性

若地图上的区域定义为包含边界的面域，称不分离区域为基本区域，那么某一行政单元可能由多个基本区域构成，即行政单元可以是分离的区域（如“飞地”地图上常见的分离区域）。所谓分离区域X指：若存在区域A,B,使$X=A\cup B$。且$A\cap B=\varnothing$，则称X为分离区域。如图2，X县有一块土地在Y县境内。

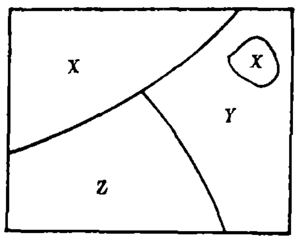

图 2

上述着色过程的成功，对制图来讲，是基于各行政单元是基本区域这一假设，若行政单元是分离的区域，而且要满足同属一行政单元的各区域须着相同色的要求。上述着色过程，即使对$K\geqslant 5$也会失败，因为在上述HP过程中，不可能对N_0着指定色。

下面一个例子可说明，对政区单元涂色，5种颜色是不够的。

如图3，有13个基本区域，分属7个政区单元 $\{A、B、C、D、E、F、G\}$，其中任一政区都与其他6个政区邻接，因而要使相邻的政区着不同的颜色，必须要7种颜色才行。

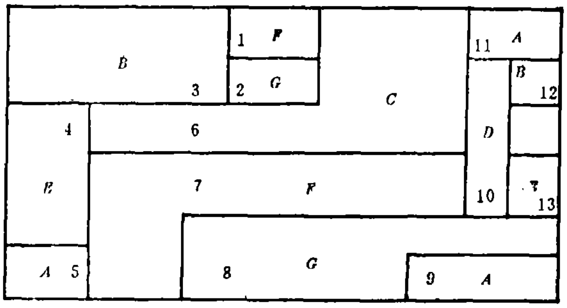

图 3

从这个例子，我们可得到这样一个结论：若政区中含有分离的区域，用给定 K 种颜色对政区图涂色，则一定存在某幅政区图需要多于 K 种颜色才能使相邻的政区涂上不同的颜色。

然而，在实际的地图中，飞地等分离区域比较少，而且不会像图3那样复杂。因此，对前述着色过程稍作修改，还是可以用于制图的实际设色过程。

首先，对 B 矩阵进行修改，将属于同一行政单元的区域合并为一行（列），即矩阵的行和列与行政单元对应。其次，对HP过程中的（B.2）作修改：若 C_i 色节点与 C_j 色节点存在通道就转到（B.1）

4 颜色的面积平衡

用颜色普染地图时，考虑人的视觉效果，图上用色应均匀一些，即各种颜色在图上所占面积不能相差太大。因此，在设色过程中，对每一颜色赋一权重值，这一权重值就是此色在图上所占的面积。用 $W_1, W_2, \cdots, W_K$ 分别表示 K 种颜色的权，开始赋0值，并对着色过程作相应修改；

在（2.1）中，在剩余颜色中选权重小的颜色给 N_0 着色。

在HP过程的（B.2），从 T 中选权重最小的元素 C_j。

每当节点着色后，就将节点对应的政区面积值加到此色的权重中。

5 结　论

从上述着色过程可看到，如果只考虑区分相邻色块，不考虑政区应着相同色这一要求，那么自动着色过程只用不多于5种颜色就能给出着色的结果。

从上述的分析，我们知道，用限定颜色对具有分离区域的政区着色，要满足制图的要求，一定存在不能着色的情况。因此，有一个非常重要的结论：不存在一个通用算法，用给定数量的颜色给政区着色，使任何相邻的政区具有不同的颜色。

此外，隐含在着色过程中的另一重要结论是：若在矩阵 B 中，去掉那些元素值1的个数小于 k 的行（列），得到的新矩阵 B 中，仍可按上述方法去掉某些行（列），如此下去，若最终矩阵 B 能被去掉，则这种 B 反映的政区图一定可用 $k+1$ 种颜色自动着色。

本文所述的着色过程，可在着色过程中发现不可能着色的情况，因而，用限定颜色数不

能确保对某些具有分离区域的政区图进行成功地着色，实际情况也如此。对大量的地图来说，一般也不会出现像图3所示那样特别的情况。此外考虑了颜色面积平衡的自动着色过程比较适用于实际的制图设计过程。

参 考 文 献

1 欧阳光中. 地图四色问题. 北京人民教育出版社，1981.

2 徐洁磐. 离散数学导论. 北京：高等教育出版社，1982，104

3 张文典等（译）. 编译程序设计理论. 北京：科学出版社，1984，594～600

4 胡晓玉. 拓扑学概念. 武汉测绘科技大学教材，1990.

5 杨洪. 图论常用算法选编. 北京：中国铁道出版社，1958，200～212

Adjustable Coloring Process for Administrative Units on a Map

Li Lin

A bstract

Administrative units are often distinguished by using different colors in cartography. Based on Heawood Theorem and its proving steps,this paper forwards a method in which administrative units may be automatically colored in given number of colors by adjusting some colored units. This coloring process can color any administrative units without separated areas in at most five colors.In addition,color weights are introduced in this process to meet the requirement of balancing different color areas no a map. By analysing graphic features of administrative units and carto graphic requiremts,this paper finally points out that no available process can assign given number of colors for any administrative units with separted areas so that any two neighbor units have different colors.

【Key words】 administraive unit; area coloring; separated arae; neighbor matrix