

# 工程控制网精度设计的多元分析法

吴 栋 材

## 摘 要

本文结合当前工程控制网设计的主元分析法和数学模型扭曲法,提出了根据谱分解的方法进行控制网精度设计的多元分析法。文中介绍了该法的基本原理,并结合实例说明了该法对全面判定控制网的设计质量的有效性。

【关键词】主元分析;多元分析;模拟真误差

## 1 引 言

现代工程控制网的精度设计中,常常利用给定的设计网形和先验设计精度与权阵,利用解析计算的方法,求出各控制网点精度的统计值,即各点坐标在给定置信概率下的点位中误差或误差椭圆的长、短半轴及长半轴的方向。这种方法从整体上反映了设计控制网精度的统计特性。然而,在实际工作中,对控制网只能进行一次或少数有限次的观测,由于观测误差的偶然特性,使得由观测值通过平差计算求各网点坐标相对实际点位的误差具有随机性,即具有点位真误差的特性。因此,在某些精密工程控制网的设计中,提出了用数学模型扭曲法进行控制网的精度设计,以探讨控制网点偶然误差的大小和方向,随着现代电子计算技术的应用,给该法的应用创造了良好的条件。然而,由于该法要求产生若干组符合正态分布的随机观测误差和扭曲观测值,再多次进行重复模拟平差计算,以求得其点位的平差值及相应的模拟真误差,其计算工作量较大。在[1]中,提出用主元法分析网点精度,这种方法主要的特点是只顾及到控制网点的方差——协方差阵的最大特征值和特征向量,及其所对应的误差分量(即主元分量)。在这种情况下,它仅从整体上反映出控制网中精度最不利的分布情况,但并不能代表所有点上都可能出现的最不利情况,特别是对某些专用控制网,需要分析部分点位在某方向上的精度时,在控制网点较多的情况下,采用本文提出的多元分析法可以同时达到前述两种设计方法的效果。

收稿日期:1992-03-18

## 2 基本原理

众所周知，工程控制网按间接观测平差原理进行精度设计时，其相应的函数模型和随机模型为

$$\begin{cases} V = A\delta x + l \\ P = Q_{\bar{l}\bar{l}}^{-1} \end{cases} \quad (1)$$

式中， $A$  为设计矩阵； $P$  为观测值的先验权阵。根据 (1) 式，组成法方程系数阵并求得其逆阵  $Q_{xx}$ ，按给定的先验设计精度  $\mu$ ，即可按下式分别求得各点位的精度

$$\begin{cases} M_{\bar{x}(r)}^2 = \mu^2 Q_{2r-1, 2r-1} \\ M_{\bar{y}(r)}^2 = \mu^2 Q_{2r, 2r} \end{cases} \quad (2)$$

式中， $r=1, 2, \dots, R$ ， $R$  为设计平面网的未知点个数。相应的误差椭圆元素为

$$\begin{cases} E_r^2 = \frac{1}{2}\mu^2 \{(Q_{2r-1, 2r-1} + Q_{2r, 2r}) + k_r\} \\ F_r^2 = \frac{1}{2}\mu^2 \{(Q_{2r-1, 2r-1} + Q_{2r, 2r}) - k_r\} \\ \varphi_r = \frac{1}{2} \arctg \left( \frac{2Q_{2r-1, 2r}}{Q_{2r-1, 2r-1} - Q_{2r, 2r}} \right) \end{cases} \quad (3)$$

式中，

$$k_r = \sqrt{(Q_{2r-1, 2r-1} - Q_{2r, 2r})^2 + 4Q_{2r-1, 2r}^2}$$

在控制网设计的多元分析法中，在不顾及设计的先验单位方差  $\mu^2$  时，对  $Q_{xx}$  进行谱分解，即：

$$Q_{xx} = S \Lambda S^T \quad (4)$$

式中，

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{2R} \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$S = (S_1 \ S_2 \ \dots \ S_{2R}), \quad S_i = (S_{i,1} \ S_{i,2} \ \dots \ S_{i,2R})^T$$

它们分别代表  $Q_{xx}$  的特征值  $\lambda_i$  和由对应特征向量  $S_i$  构成的矩阵，将 (4) 式展开，得其中相应的元素为

$$Q_{i,j} = \sum_{K=1}^{2R} \lambda_K \cdot S_{K,i} \cdot S_{K,j} \quad (5)$$

$$i=1, 2, \dots, 2R; \quad j=1, 2, \dots, 2R$$

将 (5) 代入 (2) 式得

$$\left\{ \begin{aligned} M_{X(r)}^2 &= \mu^2 Q_{2r-1, 2r-1} \\ &= \mu^2 \sum_{K=1}^{2R} \lambda_K \cdot S_{K, 2r-1} \cdot S_{K, 2r-1} \\ M_{Y(r)}^2 &= \mu^2 Q_{2r, 2r} \\ &= \mu^2 \sum_{K=1}^{2R} \lambda_K \cdot S_{K, 2r} \cdot S_{K, 2r} \end{aligned} \right. \quad (6)$$

由上式可以看出，控制网中每一点的点位中误差可以分解为 $2R$ 项 $Q_{x,x}$ 的特征值和特征向量乘积之和，其中的每一项可以视为点位真误差。为了确定由谱分解求得特征值、特征向量与上述点位真误差之关系，由真误差求中误差公式

$$\left\{ \begin{aligned} M_{X(r)}^2 &= \frac{\sum_{K=1}^{2R} \Delta_{X(k), 2r-1}^2}{2R} \\ M_{Y(r)}^2 &= \frac{\sum_{K=1}^{2R} \Delta_{Y(k), 2r}^2}{2R} \end{aligned} \right. \quad (7)$$

( $r=1, 2, \dots, R$ )

比较(6)、(7)两式可得

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta X_{r,K} &= \mu \cdot \sqrt{2R} \cdot \sqrt{\lambda_K} \cdot S_{K, 2r-1} \\ \Delta Y_{r,K} &= \mu \cdot \sqrt{2R} \cdot \sqrt{\lambda_K} \cdot S_{K, 2r} \end{aligned} \right. \quad (8)$$

( $K=1, 2, \dots, 2R, r=1, 2, \dots, R$ )

由此可得，利用上述谱分解的方法，对于每一个控制点，都可以产生一组( $2R$ 个) $x$ 、 $y$ 方向的模拟真误差。由[2]可知，实对称矩阵的不同特征值所对应的特征向量必为直交，即 $S_i$ 与 $S_{i+1}$ 之间是相互独立的。因此，可以认为，每组内的各个真误差 $\Delta X_{r,K}$ 或 $\Delta Y_{r,K}$ 之间是彼此独立的。由此可以根据任一组中的坐标真误差 $\Delta X_{r,K}$ 、 $\Delta Y_{r,K}$ 计算各点真误差大小和方向：

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta S_{r,K} &= \sqrt{\Delta X_{r,K}^2 + \Delta Y_{r,K}^2} \\ \varphi_{r,K} &= \text{tg}^{-1} \frac{\Delta Y_{r,K}}{\Delta X_{r,K}} \end{aligned} \right. \quad (9)$$

根据计算的 $\Delta S$ 和 $\varphi$ ，可将其绘制在相应的控制网节点上，以直观判断各点误差的大小及分布方向，供评定设计控制网质量的优劣。当网中特定控制点较多时， $Q_{x,x}$ 的阶数也相应增大，每点真误差的个数相应增多，用上述方法来评定控制网设计质量将更为全面和可靠。

### 3 实例分析

图1为某工程施工控制网布设实例，网中共有11个点，其中1、2为已知点，设计先验观测精度 $\mu = \pm 1.0$ 。笔者按上述基本原理编制了电算程序，计算了该网未知点坐标的协因数阵及其相应的特征值和特征向量、模拟了18组坐标真误差及点位真误差的方向和大小，各点

位中误差及相应的误差椭圆元素。并将18组模拟坐标真误差列入表1，将有关点位真误差及方向、点位中误差、误差椭圆元素等列入表2中。根据表2有关数据，绘制了各误差向量分

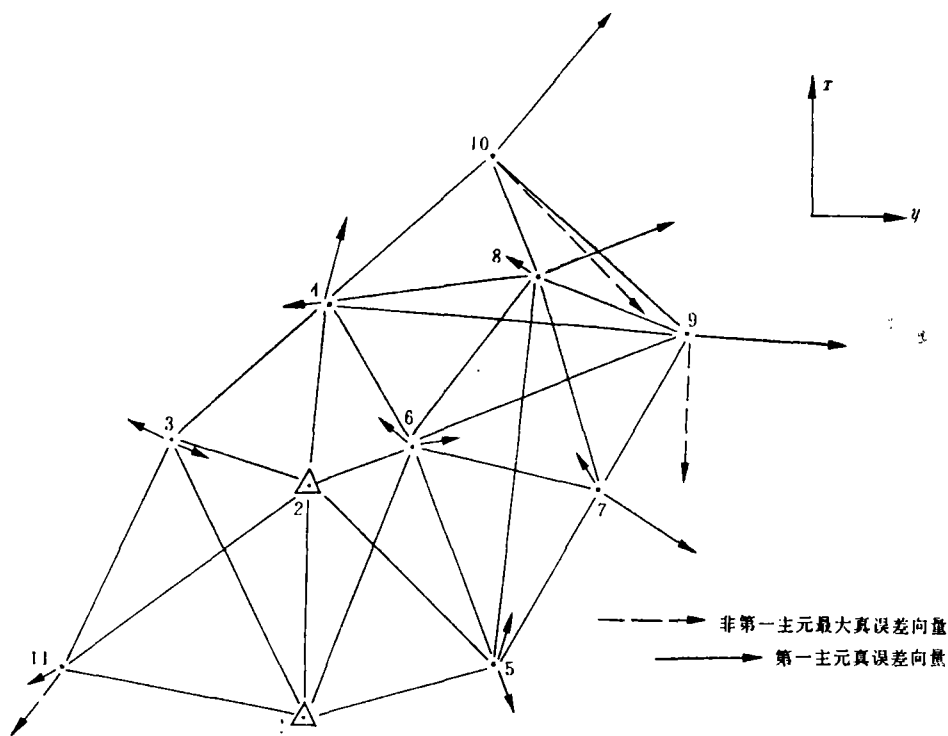


图 1

表 2 (线元素单位: cm)

点号	第一主元		第四主元		第一主元外的最大误差		点 位 精 度				
	$\Delta S$	$\varphi$	$\Delta S$	$\varphi$	$\Delta S$	$\varphi$	$E$	$F$	$\varphi$	$M$	$3M$
3	1.27	292° 57'	1.20	268° 46'	1.16	110° 16'	0.57	0.38	103° 03'	0.69	2.07
4	2.73	15 13	0.92	324 38	0.96	265 23	0.75	0.55	9 19	0.93	2.79
5	1.52	154 43	0.78	331 00	1.44	16 45	0.61	0.56	160 20	0.83	2.49
6	1.51	78 07	0.27	315 47	0.67	329 36	0.48	0.31	71 42	0.57	1.71
7	3.64	120 20	0.98	294 59	0.82	335 33	0.96	0.75	130 01	1.22	3.66
8	4.74	68 46	0.29	246 07	0.62	288 48	1.15	0.84	69 46	1.42	4.26
9	6.07	92 48	1.40	250 13	4.34	180 35	1.52	1.11	92 36	1.88	5.64
10	8.27	39 06	1.12	54 11	6.28	132 38	2.03	1.56	31 42	2.56	7.68
11	0.92	238 00	2.57	217 19	2.57	217 19	0.82	0.66	46 37	1.05	3.15

表 1 模拟纵横坐标真误差 (单位: cm)

	3		4		5		6		7		8		9		10		11		
	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	
$\lambda_1$	0.17	0.04	-0.23	-0.41	-0.03	-0.01	0.37	0.52	-0.12	-0.04	-0.14	-0.09	0.05	0.02	0.01	0.06	-0.02	0.02	
$\lambda_2$	-0.07	0.42	-0.46	0.48	-1.13	0.77	-0.19	0.31	0.42	0.64	-0.56	0.13	-0.24	-0.80	0.44	-0.03	-0.68	0.12	
$\lambda_3$	-0.27	0.29	0.48	-0.08	-0.37	-0.16	0.26	0.16	0.75	-0.34	-0.12	-0.12	-0.48	0.50	-0.05	-0.22	0.03	-0.10	
$\lambda_4$	-0.13	0.42	0.74	0.22	0.05	0.39	0.09	0.34	-0.68	-0.11	0.22	-0.28	-0.09	-0.23	-0.02	-0.17	-0.05	-0.05	
$\lambda_5$	-0.40	1.08	-0.28	-0.03	-0.27	-0.68	-0.05	-0.10	-0.03	-0.26	0.46	0.14	0.64	-0.15	-0.01	0.50	-0.20	-0.33	
$\lambda_6$	-0.55	0.24	-0.08	-0.96	0.05	0.71	-0.11	-0.57	-0.07	0.35	-0.07	-0.25	-0.24	0.07	-0.05	0.31	0.27	-0.34	
$\lambda_7$	-0.04	-0.02	-0.02	0.16	-0.08	0.05	0.58	-0.34	-0.11	-0.03	-0.11	0.05	0.07	-0.01	0.01	0.01	0.00	-0.00	
$\lambda_8$	-0.68	-0.31	-0.15	0.09	-0.03	0.20	-0.05	0.28	-0.08	-0.38	-0.11	0.40	0.16	-0.03	-0.02	-0.09	0.15	-0.10	
$\lambda_9$	-0.10	0.73	-0.45	0.45	1.38	0.42	0.13	0.15	0.31	0.07	-0.29	0.25	-0.25	0.38	0.10	-0.10	-0.46	-0.08	
$\lambda_{10}$	-0.36	-0.20	-0.24	0.31	0.04	-0.16	0.11	0.17	0.02	0.25	0.20	-0.59	-0.14	0.06	0.06	0.06	0.18	0.07	-0.04
$\lambda_{11}$	0.02	-0.01	-0.17	-0.07	-0.02	0.00	0.15	0.02	0.00	0.04	0.53	0.28	-0.40	-0.16	-0.07	-0.12	-0.00	0.00	
$\lambda_{12}$	-0.33	0.02	0.32	-0.15	0.19	-0.55	0.12	0.12	-0.04	0.72	-0.32	0.31	-0.01	-0.28	-0.04	-0.26	0.08	-0.08	
$\lambda_{13}$	-0.03	-1.20	0.75	-0.53	0.68	-0.38	0.20	-0.19	0.41	-0.89	-0.12	-0.26	-0.47	-1.31	0.65	0.91	-2.04	-1.56	
$\lambda_{14}$	0.49	-1.17	2.63	0.72	-1.38	0.65	0.31	1.48	-1.84	3.14	1.72	4.42	-0.30	6.06	6.42	5.22	-0.49	-0.78	
$\lambda_{15}$	-0.34	0.51	-0.61	-0.39	0.12	-1.06	-0.44	-0.63	-1.05	-1.10	-0.77	-0.33	-1.36	-0.39	2.33	-0.58	0.47	1.01	
$\lambda_{16}$	0.60	0.55	-0.36	1.60	-0.63	-1.31	-0.90	0.25	-2.33	-0.81	-3.07	1.35	-4.34	-0.04	-4.25	4.62	0.81	-0.22	
$\lambda_{17}$	0.81	0.23	-0.09	0.53	0.14	0.16	0.07	0.25	0.46	-0.10	-0.14	0.03	-0.03	-0.67	0.65	0.03	1.76	-1.68	
$\lambda_{18}$	-0.23	0.08	0.73	-0.10	0.65	0.31	0.41	0.23	1.12	-0.19	0.25	0.14	0.24	-1.18	0.27	1.42	0.81	1.71	

布图(图1)。根据上述图表可知:

1) 从表1可见,每一点模拟坐标真误差的符号有正有负,其正负号个数基本相同,这一趋势从全网多点情况来看,其规律越来越显著,说明模拟的坐标误差具有真误差的特性。

2) 由表2第二列可见,第一主元对应的各点真误差分量(即 $\lambda_{14}$ 所对应的特征向量求得的误差分量)为该网最不利的误差分布情况,即各点的 $\Delta S$ 均较大,其中以第10点(距起始点最远的点)其点位真误差也最大,它符合距起始点越远误差越大的统计规律。进一步比较表2的第2、5两列还可发现,第一主元对应的各点点位真误差的方向与误差椭圆的长半轴方向基本接近,因此,从这一点来看,用第一主元来评价网的质量与误差椭圆有同样的效果。

3) 由表2第2、3列的比较可以看出,第一主元尽管能反映出整个网中最不利的情况,但对于局部的某一点而言(如网中第11点),在第一主元的情况下,出现的真误差( $\Delta S = 0.92$ )并不是该点最不利的情况,而在其它三、四、五、六主元的情况下(表中仅列出第四主元)出现的真误差达 $1.12 \sim 2.52\text{cm}$ ,远大于第一主元出现的情况,从而说明:用多元分析法能更全面地觉察出点位真误差可能出现的最不利的而又正是第一主元未能反映的情况。

4) 比较表2中第2列和第5列的最后一栏可以发现,第一主元可能出现的真误差有时往往大于3倍中误差(如表2中8、9、10三点)。从精度估算的角度上考虑,它在给人们安全感的同时,又使人产生危机感,若以中误差作为精度衡量的标准,从满足精度要求的角度来考虑,这种危机感在于:在9个待定点的控制网中,将有3个点在某次观测时可能出现的真误差将大于它们的3倍点位中误差。因此,人们势必考虑提高设计精度,使点位真误差小于3倍中误差。实际上,纵观其余各元的计算结果,在绝大多数情况下,各点真误差均未出现上述情况。换句话说,仅用第一主元来分析,则有夸大真误差出现的可能性。因此,利用多元分析法进行全面地评定,可以减少上述危机感。

5) 在表2第4列中,列举了第一主元外的其余各元产生的各点最大真误差分布情况,它们均小于各点3倍的点位中误差,这一结果与第一主元对应的真误差相比更加符合真误差的一般规律;其误差方向与第一主元和各点误差椭圆的长轴方向也有差异,这对于对精度有方向性要求的情况下,用多元分析法更有助于全面的分析问题。

## 4 结束语

由上述讨论可以看出:控制网设计的多元分析法作为主元分析法的一种扩充,避免了主元分析法仅顾及控制网中最不利的情况,更利于对设计的控制网质量进行全面地分析和判定,以了解各点真误差分布的可能情况;在具体实施过程中,每对应一种设计方案,只要按上述方法进行一次计算就可求得各点对应的多组模拟真误差分布的信息,随着选取设计方案的增多,这种真误差的信息也将成倍增加,相对于数学模型扭曲法一次只能产生一组扭曲坐标值而言,该法将显示其优越性。

### 参 考 文 献

- 1 佩尔策·汉斯.现代工程测量控制网的理论和应用(中译本).北京:测绘出版社,

1989, 112~115

2 南京大学数学系计算数学专业编。线性代数。北京：科学出版社，1978，121~124

## A Method of Multivariate Analysis in Accuracy Design of Engineering Control Network

*Wu Dongcai*

### Abstract

This paper joins up with the method of main element analysis and the method of distorting mathematic model in modern designing of engineering control network. It puts forward multivariate analysis method in accuracy design of engineering control network based an spectral decomposition. In the article, the auther will introduce the fundamental principle of this method and illustrate its efficiency to judge the quality of control network d-esigning with example.

**【Key words】** main component analysis; multivariate analysis; imitate real error