

GPS网可靠性强度分析*

吴素芹

摘 要

本文对 GPS 基线向量网的可靠性进行了探讨,提出了作为相关观测值的单个基线向量的可靠性指标和粗差检验方法,并通过对实测网和模拟网的计算与分析,得出了一些有关 GPS 基线向量网可靠性设计的建议和结论。

【关键词】可靠性强度;粗差检验;内可靠性;外可靠性;多余观测分量

1 引 言

GPS 基线向量网的数据的平差处理由两个阶段组成,一是对相位观测值进行基线向量解算,二是以基线向量为观测值进行全网平差计算。第一阶段,可靠性研究侧重于如何通过残差分析剔除劣质相位观测值,包括消除小的周跳,确定好整周模糊度的偏差值等。第二阶段,主要研究以基线向量为观测值的可靠性问题。

常规控制网的可靠性分析,已有许多文章发表,理论趋于成熟,并已付之于应用,但有关 GPS 网的可靠性强度分析的讨论尚属鲜见。本文依照可靠性理论,借常规控制网可靠性强度分析的方法,移植和扩充并以基线向量为观测值的 GPS 网,将进行较全面的讨论。其内容主要是:一个基线向量的粗差检验方法;基线向量可靠性指标;通过模拟网和实测网进行了可靠性强度分析;最后通过本文的讨论和试验,对 GPS 网的设计应如何考虑可靠性强度方面提出了一些建议。

2 一个基线向量的粗差检验

GPS 基线向量的粗差观测值有两个特点:第一,当一个基线向量观测值 $\vec{b} = (\Delta x \quad \Delta y \quad \Delta z)^T$ 中的任意一个分量含有粗差时,这一基线向量 \vec{b} 就含有粗差。针对这一特点,可以通

收文日期:1992-02-04

* 本文是硕士论文的一部分,指导教师为刘经南副教授。

过对三个坐标分量单独检验来判断一个基线向量是否含有粗差。由于这种检验方法与常规独立观测值的粗差检验方法相同，在此不必赘述。第二，当一个基线向量的三个分量经过上述单独检验后虽然全部通过，但若其中部分分量接近于临界值，这时，此基线向量仍可能含有粗差，因此在这种情况下还应对此基线向量作进一步检验，此时，可将三个分量视为一个整体，在顾及它们之间的误差相关性的基础上进行粗差检验。

假设某一基线向量 \vec{b}_i 含有粗差，则平差模型为

$$\bar{V} = A \bar{X} + H \nabla \hat{S} - l \quad (1)$$

式中：

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3n \times 3} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ E \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{3 \times 3} \rightarrow \text{第 } i \text{ 个基线向量}$$

$$\nabla S = \begin{pmatrix} \nabla_{x_i} \\ \nabla_{y_i} \\ \nabla_{z_i} \end{pmatrix}_{3 \times 1}$$

由最小二乘法解得

$$\begin{aligned} \nabla \hat{S} &= - (H^T P Q_{\bar{V}} P H)^{-1} (H^T P Q_{\bar{V}} P l) \\ &= - P_{\bar{S}}^{-1} H^T P V = - Q_{S_S} H^T P V \end{aligned} \quad (2)$$

式中 V 为不顾及粗差 $\hat{\Delta S}$ 时的改正数，由 $V = AX - l$ 算得。 $Q_{S_S} = (H^T P Q_{\bar{V}} P H)^{-1} = P_{\bar{S}}^{-1}$ ，为粗差向量 $\nabla \hat{S}$ 的协因数阵。

为估计粗差向量 $\nabla \hat{S}$ 的显著性，作如下原假设：

$$H_0: E(\nabla \hat{S}) = 0$$

和备择假设： $H_1: E(\nabla \hat{S}) \neq 0$ 。

$$\text{令 } \Omega = \bar{V}^T P \bar{V}$$

$$R = \hat{\Delta S}^T P_{S_S} \hat{\Delta S}$$

则统计量

$$F = \frac{R/3}{\Omega/(n-t-3)} \Big|_{H_0} \sim F(3, n-t-3) \quad (3)$$

拒绝域为 $F > F_{1-\alpha, 3, n-t-3}$ ， t 为必要观测数。

若统计量 F 落在拒绝域内，则认为此基线向量的粗差是显著的，应予以剔除。

3 GPS基线向量的可靠性指标

3.1 内可靠性指标

内可靠性是指一个平差系统发现和区分不同的模型误差的能力，一般用可发现的最小粗差值作为内可靠性的指标。

假设平差线性模型为

$$l + V = A \hat{X}$$

设 $H_0: E(l/H_0) = A \tilde{X}$

$$H_1: E(l/H_1) = A \tilde{X} + H \nabla \tilde{S}$$

式中 $H \nabla \tilde{S}$ 表示由 $P \times 1$ 阶参数向量 $\nabla \tilde{S}$ 所决定的模型误差， H 为已知的 $n \times P$ 系数阵，有 $R(H) = P$ 。

令 $\nabla \tilde{S} = \|\nabla \tilde{S}\| \cdot S$

式中 $\|\nabla \tilde{S}\|$ 为 $\nabla \tilde{S}$ 的模， S 为 $\nabla \tilde{S}$ 的单位向量。

由文献(1)可知，在有多组粗差情况下，能以一定的检验功效 $\beta_0(S)$ ，通过显著水平为 α 的统计检验可发现的 S 方向的多个粗差下界域是

$$\nabla_0 S = S \cdot \sigma_0 \cdot \delta_0(S) / \sqrt{S^T P_{SS} S} \quad (4)$$

或者表示 S 方向可发现粗差的下界值是

$$\|\nabla_0 S\| = \sigma_0 \cdot \delta_0(S) / \sqrt{S^T P_{SS} S} \quad (5)$$

式中 σ_0 是单位权中误差， $\delta_0(S)$ 是非中心化参数， $P_{SS} = H^T P Q_{\nu} P H$ 。若设 $\delta_0(S) = \delta_0$ 与方向无关，则对于三维以上向量为下界值超椭球。

针对以基线向量为观测值的 GPS 网，设 \vec{b} 的粗差向量的单位向量部分为：

$$\begin{aligned} S_{\Delta x} &= (1 \quad 0 \quad 0)^T, & S_{\Delta y} &= (0 \quad 1 \quad 0)^T, \\ S_{\Delta z} &= (0 \quad 0 \quad 1)^T \end{aligned}$$

需要指出的是，本文讨论的是单基线的可靠性问题，其特点是各个单基线向量之间不相关，而一个基线的三个分量之间相关。因此，GPS 基线向量网的观测量的权阵是一个拟对角阵。根据这一特点，对于 GPS 基线向量网，不难得到：

$$P_{SS} = H^T P Q_{\nu} P H = P_i Q_{\nu_i} P_i \quad (6)$$

式中 P_i 和 Q_{ν_i} 分别是权阵和 Q_{ν} 阵的第 i 个三阶主子块。由(5)式可求得一个基线向量的三个坐标分量方向上的内可靠性指标为

$$\begin{cases} \nabla_{0lx} = \sigma_0 \cdot \delta_0 / \sqrt{S_{\Delta x}^T P_{SS} S_{\Delta x}} \\ \nabla_{0ly} = \sigma_0 \cdot \delta_0 / \sqrt{S_{\Delta y}^T P_{SS} S_{\Delta y}} \\ \nabla_{0lz} = \sigma_0 \cdot \delta_0 / \sqrt{S_{\Delta z}^T P_{SS} S_{\Delta z}} \end{cases} \quad (7)$$

令 $S_{\Delta x}^T P_{SS} S_{\Delta x} = r_{\Delta x}'$, $S_{\Delta y}^T P_{SS} S_{\Delta y} = r_{\Delta y}'$, $S_{\Delta z}^T P_{SS} S_{\Delta z} = r_{\Delta z}'$

则

$$r_{\Delta x}' = [1 \ 0 \ 0] \cdot P_i \cdot Q_{\cdot i} P_i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{K=\Delta x}^{\Delta z} (P_{\Delta x K})_i (R_{K \Delta x})_i$$

$$r_{\Delta y}' = \sum_{K=\Delta x}^{\Delta z} (P_{\Delta y K})_i (R_{K \Delta y})_i$$

$$r_{\Delta z}' = \sum_{K=\Delta x}^{\Delta z} (P_{\Delta z K})_i (R_{K \Delta z})_i$$

上式中的 R_i 为第 i 个基线三个坐标分量的多余分量主子块。则

$$\begin{cases} \nabla_{0ix} = \sigma_0 \delta_0 / \sqrt{r_{\Delta x}'} \\ \nabla_{0iy} = \sigma_0 \delta_0 / \sqrt{r_{\Delta y}'} \\ \nabla_{0iz} = \sigma_0 \delta_0 / \sqrt{r_{\Delta z}'} \end{cases} \quad (8)$$

在无需顾及方向的前提下，可按下式定义单个基线向量可发现粗差的下界值

$$\nabla_{0i\vec{b}} = \sqrt{\nabla_{0ix}^2 + \nabla_{0iy}^2 + \nabla_{0iz}^2} \quad (9)$$

它是一种平均意义下的定义，假设某一基线向量在空间各个方向上可发现的粗差下界值都相等，因此单个基线向量可发现的粗差下界域被定义为一个球形域。

3.2 外可靠性指标

外可靠性是指不可发现的最大模型误差对平差结果的影响，一般将这种模型误差对平差未知数的影响向量长度定义为外可靠性指标。

由文献(1)可知，外可靠性指标计算公式如下：

$$\overline{\delta_0}(S) = |\nabla_0 X(S)| = \delta_0(S) \cdot \sqrt{\frac{S^T (\overline{P}_{SS} - P_{SS}) S}{S^T P_{SS} S}} \quad (10)$$

式中 $\overline{P}_{SS} = H^T P H$ 。

类似于内可靠性的讨论，取 $S_{\Delta x} = (1 \ 0 \ 0)^T$ ， $S_{\Delta y} = (0 \ 1 \ 0)^T$ ， $S_{\Delta z} = (0 \ 0 \ 1)^T$ ，则可求得一个基线向量在三个坐标分量方向上的外可靠性指标为

$$\begin{cases} \overline{\delta_{0x}} = \delta_0 \cdot \sqrt{\frac{P_{\Delta x \Delta x}}{r_{\Delta x}'} - 1} \\ \overline{\delta_{0y}} = \delta_0 \cdot \sqrt{\frac{P_{\Delta y \Delta y}}{r_{\Delta y}'} - 1} \\ \overline{\delta_{0z}} = \delta_0 \cdot \sqrt{\frac{P_{\Delta z \Delta z}}{r_{\Delta z}'} - 1} \end{cases} \quad (11)$$

式中 $P_{\Delta x \Delta x}$ 、 $P_{\Delta y \Delta y}$ 和 $P_{\Delta z \Delta z}$ 分别是此基线向量的权阵中的对角线元素。

同内可靠性一样，定义一个基线向量的外可靠性指标为

$$\overline{\delta_{0\vec{b}}} = \sqrt{\overline{\delta_{0x}}^2 + \overline{\delta_{0y}}^2 + \overline{\delta_{0z}}^2} \quad (12)$$

它也是平均意义下的指标。

3.3 多余观测分量

设第 i 个基线向量的多余观测分量主子块为 R_i ，则有

$$R_i = (Q_{vv} P_i)_{ii} = Q_{v_i v_i} P_i$$

那么 R_i 阵的三个对角元素就是此基线的三个坐标分量观测值的多余观测分量, 设它们分别是 $r_{\Delta x_i}$, $r_{\Delta y_i}$ 和 $r_{\Delta z_i}$, 定义

$$r_{\Delta \vec{b}_i} = -\frac{1}{3} \text{tr}(R_i) = \frac{1}{3} (r_{\Delta x_i} + r_{\Delta y_i} + r_{\Delta z_i}) \quad (13)$$

为基线向量 \vec{b}_i 的多余观测分量。

设 $r_{\vec{b}}$ 为网的基线向量的多余观测数, 则有 $r_{\vec{b}} = \sum_{i=1}^n r_{\vec{b}_i}$, n 为基线向量观测个数。

4 算例及分析

本文通过实测网和模拟网的计算, 主要讨论以下几个方面的内容。

4.1 可靠性指标的一致性和可靠性分析应采用的指标

可靠性指标是指基线向量的多余观测分量 $R_{\vec{b}}$ 、内可靠性指标 $\nabla_{\vec{b}}$ 和外可靠性指标 $\overline{\delta_{\vec{b}}}$ 。从某实测的GPS基线向量网的计算结果(见表1)可知, 在一般情况下, $R_{\vec{b}}$ 较大的基线, 其 $\overline{\delta_{\vec{b}}}$ 较小, 反之亦然, 这说明 $R_{\vec{b}}$ 与 $\overline{\delta_{\vec{b}}}$ 有一致性趋势。而比较 $\nabla_{\vec{b}}$ 和上述两个指标, 可以看出它们之间没有什么规律性, 这是由于观测值的权不等造成的, 这一点也可从计算公式的定性分析中看出。

因此, 在可靠性强度分析中, 外可靠性指标可选用 $R_{\vec{b}}$ 和 $\overline{\delta_{\vec{b}}}$ 中的任何一个, 而内可靠性指标仍取 $\nabla_{\vec{b}}$ 。

表1 武汉网部分基线的三个指标

基线序号	$R_{\vec{b}}$	$\nabla_{\vec{b}}$	$\overline{\delta_{\vec{b}}}$
2	0.20	0.28	18.10
3	0.72	0.31	4.62
4	0.30	0.19	10.96
5	0.12	0.20	19.98
6	0.37	0.27	9.45

4.2 可靠性指标与观测精度及图形结构强度的关系

通过模拟网的计算可以看出, 在图形结构相同的情况下, 基线向量的观测权越大, 其内可靠性越高, 而其外可靠性越低; 而在等权的情况下, 图形结构越强, 其内外可靠性均越高, 反之亦然, 这些结论也可以通过原始公式中分析出来。

因此, 要改变控制网中各基线之间的可靠性指标分布情况, 只有通过改变网中某些基线的观测精度或改变网形结构的方法, 下面我们讨论采用这两种方法后, 网中所有基线的可靠性指标的变化情况。

4.2.1 提高某一基线观测精度对网中所有基线的可靠性指标的影响

当提高网中某一观测精度时，这一基线观测值本身的内外可靠性指标的变化情况：

取 R_i 作为一般观测值的外可靠性指标， ∇_{0_i} 为内可靠性指标，设第 i 个观测值的权 P_i 有增量 ΔP_i ，有

$$\frac{dR_i}{dP_i} < 0, \quad \frac{d\nabla_{0_i}}{dP_i} < 0$$

即 R_i 和 ∇_{0_i} 都是关于 P_i 的单减函数。这表明当提高网中某一观测精度时，其相应的 R 值减小，即外可靠性降低，而它的内可靠性却随之提高。

当提高网中某一基线观测精度时，网中其它观测值的可靠性指标的变化情况：

设 P_j 有增量 ΔP_j ，有

$$\frac{dR_i}{dP_j} > 0, \quad \frac{d\nabla_{0_i}}{dP_j} < 0$$

即 R_i 是 P_j 的单增函数，而 ∇_{0_i} 是 P_j 的单减函数。这表明当提高网中某观测精度时，网中其它观测值的内、外可靠性均有所提高。

下面我们通过模拟网的计算来讨论当提高某一基线向量的三个分量权时，所有基线向量的可靠性指标变化情况。

本文计算了由图 1 所示的由独立基线向量组成的 GPS 网的网形结构的可靠性指标，随着 1 号基线权的提高，所有基线的可靠性变化情况见表 2。各个基线的可靠性随 P_1 的增高的增益趋势，相应的增益图（图 2 和图 3）如下：

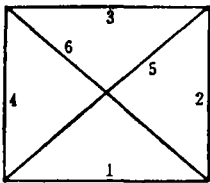


图 1

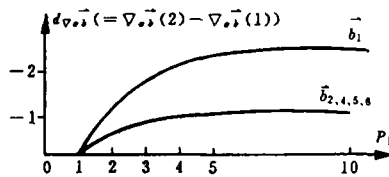


图 2 内可靠性随 P_1 变化的增益

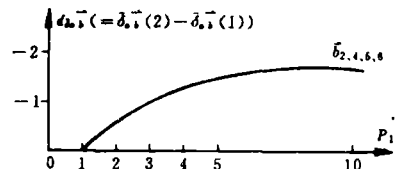


图 3 外可靠性随 P_1 变化的增益

表 2-1

边号	各坐标分量的权	$R_{\vec{b}}$	$\nabla_{0 \vec{b}}$	$\bar{\delta}_{0 \vec{b}}$
1 ~ 6	1	0.50	10.12	7.15

表 2-2

边号	各坐标分量的权	$R_{\vec{b}}$	$\nabla_{0 \vec{b}}$	$\bar{\delta}_{0 \vec{b}}$
1	2	0.33	8.76	10.12
2、4、5、6	1	0.54	9.72	6.58
3	1	0.50	10.12	7.15

表2-3

边号	各坐标分量的权	$R_{\vec{b}}$	$\nabla_{\vec{0}\vec{b}}$	$\overline{\delta_{\vec{0}\vec{b}}}$
1	3	0.25	8.25	12.45
2、4、5、6	1	0.56	9.53	6.30
3	1	0.50	10.12	7.15

表2-4

边号	各坐标分量的权	$R_{\vec{b}}$	$\nabla_{\vec{0}\vec{b}}$	$\overline{\delta_{\vec{0}\vec{b}}}$
1	5	0.17	7.84	16.00
2、4、5、6	1	0.58	9.37	6.05
3	1	0.50	10.12	7.15

表2-5

边号	各坐标分量的权	$R_{\vec{b}}$	$\nabla_{\vec{0}\vec{b}}$	$\overline{\delta_{\vec{0}\vec{b}}}$
1	10	0.09	7.50	22.62
2、4、5、6	1	0.60	9.22	5.81
3	1	0.50	10.12	7.15

从表2和相应的增益图2和3可以看出:

①随着 P_1 的增大, 2、4、5、6号基线的内、外可靠性均有提高, 但提高的幅度均不大。

②随着 P_1 的增大, 1号基线的内可靠性有所提高, 但其外可靠性却随之降低, 在坐标分量相关性不很大的情况下(大部分不超过对角元素), 其外可靠性降低的速度比其内可靠性提高的速度要快得多。

4.2.2 提高图形结构强度对控制网可靠性指标的影响

本文还计算了图4三个图形(图形结构强度依次由弱变强)的GPS网的各基线的可靠性指标。设各基线向量三个坐标分量的权均为1, 计算结果见表3。

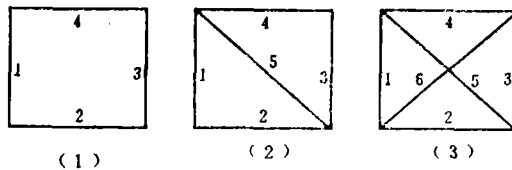


图 4

从表3可以看出, 提高网的图形结构强度可使网中1~4号基线的内、外可靠性均有较大幅度的提高(与提高某一观测精度时相比)。因此可以采用提高图形结构强度的方法来提

表3 1~4号基线的可靠性指标

	$R_{\vec{b}}$	$\nabla_{\vec{b}}$	$\overline{\delta_{\vec{b}}}$
图形(1)	0.25	14.31	12.39
图形(2)	0.38	11.68	9.23
图形(3)	0.50	10.12	7.15

高网中某一局部基线的内、外可靠性。

5 关于GPS网的可靠性设计的几点建议

一般来说,一个可靠性较好的网应符合以下两个条件:①网的整体可靠性较高,通常可用所有观测值的内可靠性指标的平均值和外可靠性指标的平均值来衡量。②网中各基线的可靠性指标相差不应过于悬殊,即各基线的可靠性分布较为均匀。从这两点出发,通过算例的计算与分析,本文提出以下GPS控制网可靠性设计方面的建议。

①关于GPS基线向量网的内可靠性设计问题:提高部分或全部观测值的精度和提高网的图形结构强度都可使网的整体内可靠性提高,同时也可以缩小网的各局部基线向量之间的内可靠性差距。

②关于GPS基线向量网的外可靠性设计问题:提高网的图形结构强度可使整网的外可靠性提高,也可以缩小各局部基线向量之间的外可靠性差距。但当提高网中某一(部分)观测精度时,这一观测值的外可靠性却降低了,这和它的内可靠性提高是矛盾的,而且这时网的整体外可靠性并无提高,因为作为多余观测分量的 ΣR 是一定的。

因此,采用提高图形结构强度的方法来提高网的整体内、外可靠性和改善局部基线之间的可靠性差异比采用提高观测精度的方法更好。

③从同步GPS基线观测中挑选独立基线构成异步基线环的一些原则:对于GPS网,由于各个基线向量的观测时间相差不多,选星质量也无太大差异,所以基线向量的观测精度主要取决于基线向量长度,基线越短,精度越高,其内可靠性也越高。因此在网的平差阶段,从同步基线中选取独立基线组成网时,应尽量选取长度相差不太悬殊的短基线,而在网形设计上,应尽量使网形结构强度均匀,在可靠性较薄弱的区域,宁愿加测一些基线也比只提高某些基线的精度的效果要好得多。

另外,从第一阶段解算的同步基线中选取独立基线组成网时,有多种选法,除了注意以上几点外,还应注意所选的各期基线必须互相连接组成闭合图形,否则会使没有构成闭合图形的基线向量观测值的多余观测分量为零,这种基线完全没有抵抗粗差的能力,结果极不可靠。

参 考 文 献

- 1 李德仁. 误差处理和可靠性理论. 北京: 测绘出版社, 1988.

- 2 Baarda W. A testing procedure for use in geodetic networks. *Neth. Geod. Comm. New Series* 2, 5, Delft 1968.
- 3 Pelzer H. Hypothesentests in der Ingenierves messung, Vortrag auf der Arbeitstagung der Arbeitsgruppe Theoretische Geodäsic der DGK, Bonn 1980.
- 4 陶本藻. 测量数据的统计分析. 北京: 测绘出版社, 1992.
- 5 刘经南, 刘大杰, 崔希璋. 卫星网与地面网联合平差的理论和应用. 武汉测绘科技大学学报, 1987 (4)
- 6 王之卓. 摄影测量原理续篇. 北京: 测绘出版社, 1986.

The Reliability Strength Analysing of GPS Baseline Vector Network

Wu Suqin

Abstract

In this paper, the reliability of GPS baseline vector network is discussed. The reliability index and the method of inspecting of the appreciable gross error on a single baseline vector are put forward, Through calculation on practical surveyed network and simulated network, the some conclusions and suggestions on the reliability design of GPS baseline vector network are given.

【 Key words 】 strength of reliability, gross error inspecting, internal reliability, external reliability, components of abundant observation