DOI:10.13203/j.whugis1991.03.009

第16卷 第3期　武 汉 测 绘 科 技 大 学 学 报　Vol.16 No.3
1991年 9月　Journal of Wuhan Technical University of Surveying and Mapping　Sep. 1991

三维基线向量与大地坐标差间的微分公式及其应用

刘 经 南

摘　　要

本文导出了以直角坐标差表示的三维基线向量 $(\Delta Y\ X\Delta\ \Delta Z)^T$ 与其两端点之间的大地坐标差 $(\Delta B\ \Delta L\ \Delta H)^T$ 间的微分公式。讨论了这一公式在处理GPS基线向量的坐标系统转换，某些量间的微分结构研究，误差传播，以及GPS基线向量的协方差阵到高斯平面二维向量的协方差阵转换上的应用。

【关键词】 三维基线向量；微分公式

1 引　　言

高精度GPS相对定位得到的都是两点间的基线向量，即WGS-84系统中的地心坐标差。而常规上应用的又大多是某一参考系统下的大地坐标差，因而存在一个直角坐标差表示的基线向量与大地坐标差之间的直接转换方式问题。此外，在误差分析，方差-协方差结构分析与传播方式的研究方面，也都需要知道二者之间的微分关系。本文针对这一实用的需要，探讨基线向量与大地坐标差之间微分公式的级数形式及应用。

2 三維基线向量关于大地坐标差的级数展开

文献〔1〕直接写出了三维基线向量 $(\Delta X\ \Delta Y\ \Delta Z)^T$ 与椭圆面上二维大地坐标差 $(\Delta B\ \Delta L)^T$ 略去了三阶项的级数公式。由于该转换公式是降维的，因而不能得到唯一的，可逆的三维形式的微分公式。为了导出微分公式的需要，本文把这一级数式扩充为完全三维的形式。并顾及到不含偏心率平方项的三阶项。

设基线起点号为0，终点号为i，则任意一条基线向量与两端点大地坐标差关系可表示为：

收稿日期：1990—09—06

$$\begin{pmatrix}\Delta X\\ \Delta Y\\ \Delta Z\end{pmatrix}_{0i}=\begin{pmatrix}(N_i+H_i)\cos B_i\cos L_i\\ (N_i+H_i)\cos B_i\sin L_i\\ (N_i(1-e^2)+H_i)\sin B_i\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}(N_0+H_0)\cos B_0\cos L_0\\ (N_0+H_0)\cos B_0\sin L_0\\ (N_0(1-e^2)+H_0)\sin B_0\end{pmatrix} \quad (1)$$

由于零子午线是人为定义的，有一定随意性，为方便讨论，不妨设$L_0=0°$，则$L_i=L_i-L_0=\Delta l_i$，上式变为：

$$\begin{pmatrix}\Delta X\\ \Delta Y\\ \Delta Z\end{pmatrix}_{0i}=\begin{pmatrix}(N_i+H_i)\cos B_i\cos\Delta l_i\\ (N_i+H_i)\cos B_i\sin\Delta l_i\\ (N_i(1-e^2)+H_i)\sin B_i\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}(N_0+H_0)\cos B_0\\ 0\\ (N_0(1-e^2)+H_0)\sin B_0\end{pmatrix} \quad (2)$$

为了把上式展开成（ΔB_i Δl_i ΔH_i）的级数形式，我们利用以下级数公式：

$$\left.\begin{aligned}\sin B&=\sin B_0+\cos B_0\Delta B-\frac{1}{2}\sin B_0\Delta B^2-\frac{1}{6}\cos B_0\Delta B^3+\cdots\\ \cos B&=\cos B_0-\sin B_0\Delta B-\frac{1}{2}\cos B_0\Delta B^2+\frac{1}{6}\sin B_0\Delta B^3+\cdots\\ \sin\Delta l&=\Delta l-\frac{1}{6}\Delta l^3+\cdots\\ \cos\Delta l&=1-\frac{1}{2}\Delta l^2+\frac{1}{24}\Delta l^4+\cdots\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

同时，顾及到

$$\frac{\partial N}{\partial B}=\frac{Ne^2}{w^2}\sin B\cos B;\quad \frac{\partial^2 N}{\partial B^2}=\frac{Ne^2}{w^2}(1-2\sin B)+\frac{2Ne^4\sin^2 B\cos^2 B}{w^4}$$

并令$S_0=\sin B_0$，$C_0=\cos B_0$可将N展开为：

$$N=N_0\left(1+\frac{e^2}{w_0^2}S_0C_0\Delta B+\left(\frac{e^2}{2w_0^2}(1-2S_0^2)+\frac{e^4}{w_0^4}S_0^2C_0^2\right)\Delta B^2+\cdots\right) \quad (4)$$

上式截去含ΔB^3以上的高阶项，在纬度$B=45°$最不利的情况下，当ΔB、Δl不超过54公里（相当于纬差、经差各30′）时，最大误差约为0.2毫米。

令$H_i=H_0+\Delta H_i$，把（3）（4）两式代入（2）式，截去含e^2项系数的ΔB，Δl，ΔH的三阶以上高阶项，略去复杂的推导过程，可得到在起点展开，以大地坐标差表示的基线向量完全三维的级数展开式：

$$\left.\begin{aligned}\Delta X_{0i}&=\sum_{p,q,r=0}^{3}X_{p,q,r}\cdot\Delta B_i^p\cdot\Delta l_i^q\cdot\Delta H_i^r\\ \Delta Y_{0i}&=\sum_{p,q,r=0}^{3}Y_{p,q,r}\cdot\Delta B_i^p\cdot\Delta l_i^q\cdot\Delta H_i^r\\ \Delta Z_{0i}&=\sum_{p,q,r=0}^{3}Z_{p,q,r}\cdot\Delta B_i^p\cdot\Delta l_i^q\cdot\Delta H_i^r\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

式中，$p+q+r\leqslant 3$，各系数具体表示如下：

$$
\left.
\begin{aligned}
&x_{000}=x_{010}=x_{011}=x_{012}=x_{002}=x_{003}=x_{030}=0\\
&x_{001}=C_0\\
&x_{020}=-\frac{1}{2}(N_0+H_0)C_0\\
&x_{021}=-\frac{1}{2}C_0\\
&x_{100}=\frac{N_0e^2}{w_0^2}S_0C_0^2-(N_0+H_0)S_0\\
&x_{110}=x_{102}=x_{111}=0\\
&x_{101}=-S_0\\
&x_{120}=\frac{1}{2}(N_0+H_0)S_0\\
&x_{200}=\frac{N_0e^2}{2w_0^2}(1-4S_0^2)C_0+\frac{N_0e^4}{w_0^4}S_0^2C_0^3-\frac{1}{2}(N_0+H_0)C_0\\
&x_{210}=0\\
&x_{201}=-\frac{C_0}{2}\\
&x_{300}=-\frac{1}{6}(N_0+H_0)C_0
\end{aligned}
\right\}
\tag{5a}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&y_{000}=y_{001}=y_{020}=y_{002}=y_{003}=y_{012}={}_{021}=0\\
&y_{010}=(N_0+H_0)C_0\\
&y_{011}=C_0\\
&y_{030}=-\frac{1}{6}(N_0+H_0)C_0\\
&y_{100}=y_{101}=y_{120}={}_{102}=0\\
&y_{110}=\frac{N_0e^2}{w_0^2}S_0C_0^2-(N_0+H_0)S_0\\
&y_{111}=-S_0\\
&y_{200}=y_{201}=y_{300}\\
&y_{210}=-\frac{1}{2}(N_0+H_0)C_0
\end{aligned}
\right\}
\tag{5b}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&Z_{000}=Z_{010}=Z_{020}=Z_{002}=Z_{030}=Z_{003}=0\\
&Z_{001}=S_0\\
&Z_{011}=Z_{012}=Z_{021}\\
&Z_{100}=(N_0(1-e^2)+H_0)C_0+\frac{N_0e^2}{w_0^2}S_0^2C_0(1-e^2)\\
&Z_{101}=C_0\\
&Z_{110}=Z_{120}={}_{102}=Z_{111}=0\\
&Z_{200}=\frac{N_0e^2}{w_0^2}(1-e^2)S_0\left(\frac{1-2S_0^2+2C_0^2}{2}+\frac{e^2}{w_0^2}S_0^2C_0^2\right.\\
&\qquad-\frac{1}{2}(N_0(1-e^2)+H_0)S_0\\
&Z_{201}=-\frac{1}{2}S_0\\
&Z_{210}=0\\
&Z_{300}=\frac{1}{6}(N_0(1-e^2)+H_0)S_0
\end{aligned}\right\}\qquad(5c)
$$

以上诸式中，若$\Delta B\leqslant30'$（约54公里）$\Delta l\leqslant30'$（约54公里），$\Delta H=3000$米，则舍去含e^2的ΔB、Δl三阶次和舍去ΔB、Δl、ΔH的四阶项引起的直角坐标差分量的误差在最不利情况如下表所示：

表 1 单位：mm

坐标差 / 间距	ΔX	ΔY	ΔZ
ΔB Δe ≤30′	5.0	4.0	2.0
ΔB Δe ≤20′	1.4	1.2	0.6
ΔB Δe ≤10′	0.2	0	0

由上表可以看出，当基线向量长在40公里以下时，对于一般地形条件地区，上述级数展开式都能满足1毫米左右的精度。

3 基线向量与大地坐标差间的微分公式

从（5）及（5a）（5b）和（5c）诸式出发，分别对上述的级数展开式中含ΔB，ΔB^2，ΔB^3，Δl，Δl^2，Δl^3和ΔH等各项求偏导数，顾及到系数x_{pqr}、y_{pqr}、z_{pqr}中某些值为零以及对ΔB求导时，ΔH，Δl可看成常数等原则，可得各偏导数如下：

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \Delta X}{\partial \Delta B}=a_b=x_{100}+x_{101}\Delta H+\frac{1}{2}x_{200}\Delta B+x_{120}\Delta l^2+\frac{1}{2}x_{201}\Delta B\Delta H\\
&+\frac{1}{3}x_{300}\Delta B^2\\
&\frac{\partial \Delta X}{2\Delta l}=a_l=\frac{1}{2}x_{020}\Delta l+\frac{1}{2}x_{120}\Delta B\Delta l+\frac{1}{2}x_{021}\Delta l\Delta H\\
&\frac{\partial \Delta X}{\partial \Delta H}=a_h=x_{001}+x_{101}\Delta B+x_{201}\Delta B^2+x_{021}\Delta l^2\\
&\frac{\partial \Delta Y}{\partial \Delta B}=b_b=y_{110}\Delta l+\frac{1}{2}y_{210}\Delta B\Delta l+y_{111}\Delta l\Delta H\\
&\frac{\partial \Delta Y}{\partial \Delta l}=b_l=y_{010}+y_{110}\Delta B+y_{011}\Delta H+y_{210}\Delta B^2+y_{111}\Delta B\Delta H\\
&\qquad+\frac{1}{3}y_{030}\Delta l^2\\
&\frac{\partial \Delta Y}{\partial \Delta H}=b_h=y_{011}\Delta l+y_{111}\Delta B\Delta l\\
&\frac{\partial \Delta Z}{\partial \Delta B}=C_b=Z_{100}+\frac{1}{2}Z_{200}\Delta B+Z_{101}\Delta H+\frac{1}{3}Z_{300}\Delta B^2+\frac{1}{2}Z_{201}\Delta B\Delta H\\
&\frac{\partial \Delta Z}{\partial \Delta l}=C_l=0\\
&\frac{\partial \Delta Z}{\partial \Delta H}=C_h=Z_{001}+Z_{101}\Delta B+Z_{201}\Delta B^2
\end{aligned}\right\}\tag{6}
$$

因地，三维基线向量关于大地坐标差的微分公式可写为：

$$\mathrm{d}\Delta X=A\mathrm{d}\Delta E \tag{7}$$

其中

$$\mathrm{d}\Delta X=(\mathrm{d}\Delta X\ \ \mathrm{d}\Delta Y\ \ \mathrm{d}\Delta Z)^{\mathrm{T}}$$

$$\mathrm{d}\Delta E=(\mathrm{d}\Delta B\ \ \mathrm{d}\Delta l\ \ \mathrm{d}\Delta H)^{\mathrm{T}}$$

$$A=\begin{pmatrix} a_b & a_l & a_h\\ b_b & b_l & b_h\\ c_b & c_l & c_h\end{pmatrix}$$

由于空间直角坐标差（$\Delta X\ \ \Delta Y\ \ \Delta Z$）$^{\mathrm{T}}$与椭球大地坐标间的映射是一一对应的，因 此 A 是可逆阵。于是从这种三维微分公式可唯一地得到大地坐标标差关于直角坐标差的微分关系式：

$$\mathrm{d}\Delta E=A^{-1}\mathrm{d}\Delta X=B\mathrm{d}\Delta X,\quad (B=A^{-1}) \tag{8}$$

4 公式应用

4.1 在研究微分结构方面的应用

例如：类似于文献〔1〕第四章讨论，我们可以给出空间基线弦长与两端点大地坐标差之间的部分关系式。设D_{0i}表示基线向量$\Delta X_{0i}^{T}=(\Delta X\ \ \Delta Y\ \ \Delta Z)$的弦长，则弦长与直角坐标差的微分关系为：

$$dD_{0i}=\frac{\Delta X_{0i}^{T}}{D_{0i}}d\Delta X_{0i} \tag{9}$$

用（7）式代入上式，即得到弦长与两端点大地坐标差的微分公式：

$$dD_{0i}=\frac{\Delta X_{0i}^{T}}{D_{0i}}A_0 dE_{0i} \tag{10}$$

这里，A_0中的下标“0”表示在基线端点0计算A中各元素的值。这一公式可用于只能得到大地坐标差的误差时其与弦长误差的种种关系讨论。

4.2 在坐标系统转换中的应用

设卫星观测得到的基线向量为$\Delta X_S=(\Delta X\ \ \Delta Y\ \ \Delta Z)^T$，相应的大地坐标差为$\Delta E_S=(\Delta B\ \ \Delta L\ \ \Delta H)^T$；卫星大地系统到某一参考大地系统的基线向量型转换参数矩阵为

$$T=\begin{pmatrix} dK & \varepsilon_z & -\varepsilon_Y \\ -\varepsilon_z & dK & \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y & -\varepsilon_X & dK \end{pmatrix} \tag{11}$$

这里dK是两系统的尺度差，ε_X、ε_Y、ε_Z为两系统坐标轴之间的欧拉角，由于是基线向量的转换，转换矩阵中的平移参数有关项消失了。于是相应的地方参考大地系统的基线向量ΔX_G可表示为

$$\Delta X_G=\Delta X_s+T\Delta X_S \tag{12}$$

令$d\Delta X_S=T\Delta X_S$，即可得到转换至参考大地系统中的大地坐标差

$$\Delta E_G=\Delta E_S+d\Delta E_S \tag{13}$$

这里

$$d\Delta E_S=Bd\Delta X_S=A^{-1}T\Delta X_S \tag{14}$$

下表给出了当$dK=-0.6\times10^{-6}$，$\varepsilon_X=\varepsilon_Y=0$，$\varepsilon_z=-0.554''$时，不同长度的基线向量按本文所导微分公式和按布尔莎公式先作单点转换再求大地坐标差的两种转换方法的结果比较。

表 2

方　　法	ΔB (° ′ ″)	ΔL (° ′ ″)	ΔH (m)	距离 / 纬度
布尔莎模型	.0125.3745	−.0203.6107	12.937	≈ 5km
微分公式法	.0125.3745	−.0203.6105	12.935	22°
布尔莎模型	.0446.3819	−.0411.0767	225.290	≈ 10km
微分公式法	.0446.3819	−.0411.0765	225.286	23°
布尔莎模型	.0043.1223	.1154.9511	−34.149	≈ 21km
微分公式法	.0043.1221	.1154.9508	−34.143	22°

由上表可得到的大致结论是：在弦长小于20公里的情况下，用微分公式转换可得到5毫米左右的精度。

4.3 不同坐标系之间的精度转换

在不同坐标系之间基线向量协方差阵的转换中，不妨设转换参数的误差暂时可忽略不计，即有

$$d\Delta X_G = d\Delta X_S$$

令直角坐标差表示的基线向量协方差阵为$D_{\Delta X}$，椭球坐标差表示的协方差阵为$D_{\Delta E}$。则由微分公式不难直接得到不同坐标系之间直角坐标差与大地坐标差的协方差转换公式为

$$(D_{\Delta E})_G = BD_{\Delta X}B^T = A^{-1}D_{\Delta Z}(A^{-1})^T \tag{15}$$

相应的还有

$$(D_{\Delta Z})_S = AD_{\Delta E}A^T \tag{16}$$

根据大地坐标系与直角坐标系均属三维正交坐标系的特点以及弦长不变性原理，可以得到实际计算中的检核公式：

$$\mathrm{tr}(D_{\Delta X}) = \mathrm{tr}(D_{\Delta E}) \tag{17}$$

即

$$\sigma_{\Delta X}^2 + \sigma_{\Delta Y}^2 + \sigma_{\Delta Z}^2 = \sigma_{\Delta B}^2 + \sigma_{\Delta L}^2 + \sigma_{\Delta H}^2 \tag{18}$$

下表列出了不同基线长度的协方差阵转换实例中的方差项和检核结果。

表 3

距离 纬度	$\sigma^2(\Delta x)$ $\sigma^2(\Delta b)$	$\sigma^2(\Delta y)$ $\sigma^2(\Delta l)$	$\sigma^2(\Delta z)$ $\sigma^2(\Delta h)$	$\mathrm{tr}(D\Delta x)$ $\mathrm{tr}(D\Delta e)$
≈ 5km 22°	.000138 .000055	.000129 .000129	.000036 .000118	.000303 .000303
≈ 10km 23°	.000994 .000345	.000821 .000820	.000203 .000853	.002018 .002018
≈ 21km 22°	.002529 .001090	.002225 .002237	.000750 .002185	.005504 .005512

4.4 空间基线向量到高斯平面直角坐标系统二维基线向量的精度转换

按（15）式把空间基线向量的协方差阵转换至实用的参考大地系统大地坐标差的协方差阵后，为了实用上的需要，往往还要转换成高斯平面直角坐标系的二维基线向量 $(\delta x\ \delta y)^T$ 的协方差阵。为此，这里先导出大地坐标差与直角坐标差之间的微分公式。

设高斯坐标的轴子午线过基线起点 0，投影时的参考原点也移至 0 。则另一端点的高斯坐标也同时表示了两点间的坐标差 $(\delta x_{0i}\ \delta y_{0i})$，这时高斯投影公式为[2]：

$$x_i = X_0 + N_0(1-\eta_0^2+\eta_0^4-\eta_0^6)\Delta B + \frac{3}{2}N_0t_0(\eta_0^2-2\eta_0^4)\Delta B^2 + \frac{1}{2}N_0t_0C_0^2\Delta l^2 + \cdots$$

$$y_i = N_0C_0\Delta l + N_0t_0C_0(-1+\eta_0^2-\eta_0^4+\eta_0^6)\Delta B\Delta l + \cdots \tag{19}$$

上式忽略了含$\Delta B\ \Delta l$三次以上的高阶项。对上式求全微分，得到

$$\begin{pmatrix} d\delta x_{0i} \\ d\delta y_{0i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx_i \\ dy_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_b & \alpha_l \\ \beta_b & \beta_l \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d\Delta B \\ d\Delta l \end{pmatrix} = \alpha de \tag{20}$$

这里，$de=(d\Delta B\ \ d\Delta l)^{T}$，且有：

$$\left.\begin{aligned}\alpha_b &= N_0(1-\eta_0^2+\eta_0^4-\eta_0^6)+3N_0t_0(\eta_0^4-2\eta_0^4)\Delta B\\ \alpha_l &= N_0t_0C_0^2\Delta l\\ \beta_b &= N_0t_0C_0(-1+\eta_0^2-\eta_0^4+\eta_0^6)\Delta l\\ \beta_l &= N_0C_0+N_0t_0C_0(-1+\eta_0^2-\eta_0^4+\eta_0^6)\Delta B\end{aligned}\right\} \tag{20a}$$

由此，可得到大地坐标差与直角坐标差之间协方差阵的转换公式为：

$$D_{\delta x}=\alpha D_{\delta e}\alpha^{T} \tag{21}$$

$$D_{\delta e}=\alpha^{-1}D_{\delta x}(\alpha^{-1})^{T} \tag{22}$$

综合公式（15）和（21），可以把三维空间基线向量的协方差阵转换成高斯平面直角坐标二维向量的协方差阵。这一方法在GPS数据的实用处理中，是经常需要用到的。同样，我们有以下检核公式

$$\mathrm{tr}(D_{\delta X})=\mathrm{tr}(D_{\delta e}) \tag{23}$$

表 4 列出了这一转换的算例和检核结果。

表 4

距离 纬度	$\sigma^2(\delta b)$ $\sigma^2(\delta x)$	$\sigma^2(\delta l)$ $\sigma^2(\delta y)$	tr(Dδe tr(Dδx
≈ 5km 22°	.000055 .0000554	.000129 .0001292	0.000184 0.0001846
≈ 10km 23°	.000345 .0003450	.000820 .0008196	0.001165 0.0011646
≈ 21km 22°	.001090 .0010932	.002237 .0022343	0.003327 0.0033275

参 考 文 献

［1］周忠谟．地面网与卫星网之间的转换的数学模型．测绘出版社，1984．

［2］武汉测绘科技大学大地测量教研组．大地测量学（中册）．中国工业出版社，1964．

The Formula Eetween 3-D Baseline Vector and Geodetic Coordinate D Ifferences and Its Application

Liu Jingnan

Abstract

The differential formula between the 3-D baseline vector $(\Delta X\ \Delta Y\ \Delta Z)^T$ and its corresponding geodetic coordinate difference $(\Delta B\ \Delta L\ \Delta H)^T$ has been derived in this paper. Its application to transformation of baseline vectors between coordinate systems, to studing of differential structure of some geodetic quantities, to studying of error propagation and to transformation of the covariance matrix of GPS baseline vector to the covariance matrix referring to the geodetic reference system or Gauss-Kruge plane coordinate system has also been discussed.

【Key words】 3-D baseline vector, differential formula