

对全国复测水准网平差的几点探讨*

薄志鹏 刘国辉 汪晓庆

摘 要

本文讨论复测水准网平差中的几个实际问题,即平差方法的选择,定权的必要精度和验后估计的必要多余观测数等。通过理论分析与实际试算得出了一些有益的结论。

【关键词】 精度增益; 定权误差

我国一等水准网外业布测工作从1975年开始至1984年完成,1986年又完成了国家一等水准网平差。二等水准网的外业布测工作自1985年开始至今亦已完成。为了进一步改善我国高程控制网,研究地壳垂直运动、平均海水面及其变化,大地水准面形状等科学问题的需要,新的一期精密水准测量复测工作将于1991年开始。对此,国家测绘局下达“精密水准复测技术方案研究”课题,以系统工程方式组织有关单位协同研究。本文主要探讨方案中有关水准网静态平差的几个实际问题。

1 平差方法的选择

现代平差计算不仅要求定平差参数的最佳估值,还要获取有关控制网的多种信息,以便作出建立在计算结果基础上的各种论断。平差时要充分、合理地利用已有的各种观测数据,以期获得最佳结果。1986年国家一等水准网平差,基于当时的具体条件,是按条件平差完成的。因此,除了求得点的高程平差值和单位权中误差外,只计算了19个结点的高程中误差。二等水准网将按强制拟合的方法纳入一等网内。因此复测水准网平差方案制定时不宜再采用传统的逐级平差法,而应采用一二等水准网按间接平差一次整体解算的联合平差法。

(1) 逐级平差方法本身是近似的,强制拟合将使二等网受到歪曲和损害。

设二等观测值的平差值为 \hat{L} ,按条件平差有

$$\hat{L} = L + V = L - P^{-1}A^T N^{-1}W \quad (1)$$

$$W = AL + A^0 L^0 \quad (2)$$

收稿日期: 91-01-15

* 国家测绘局“七五”重点科技项目基金资助项目

式中 A^0 是起始数据系数阵， L^0 为起始数据向量。当 L^0 与 L 不相关时，得

$$D(\hat{L}) = \underbrace{(I-Z)D(L)(I-Z)^T}_{D_1(\hat{L})} + \underbrace{Z_0D(L^0)Z_0^T}_{D_2(\hat{L})} \quad (3)$$

其中 $Z = P^{-1}A^T N^{-1}A$ ， $Z_0 = P^{-1}A^T N^{-1}A^0$ ； $D(L)$ 是二等观测值 L 的协方差阵， $D(L^0)$ 是起始数据向量的协方差阵。 $D_1(\hat{L})$ 是观测值误差对平差值精度的影响， $D_2(\hat{L})$ 是起始数据的影响。采用逐级平差时，由于略去了式(3)中的第二项，故得到的是虚假精度。 $D_2(\hat{L})$ 取决于起始数据的精度及其在网中的分布状况。

计算表明，当一二等水准观测值的权比为4:1，3:1和2:1时， $D(\hat{L})$ 中起始数据影响部分与观测误差影响之比分别为60%，80%和120%。鉴于近二十年来测量技术的进步，一二等水准测量的精度级差已明显缩小，因此逐级平差不可取。

(2) 逐级平差将失去利用二等观测值改善一等网精度的机会

设一、二等水准观测值及其权阵为 $L^T = (L_1^T \ L_2^T)$ 和 $P = \text{diag}(P_1 \ P_2)$ ，误差方程为：

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= B_{11}\delta\hat{X}_1 + l_1, & P_1 \\ V_2 &= B_{21}\delta\hat{X}_1 + B_{22}\delta\hat{X}_2 + l_2, & P_2 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

其中 $\delta\hat{X}_1$ 和 $\delta\hat{X}_2$ 分别为一二等水准点的高程未知数。设一等网单独平差未知数的协因数阵为 Q'_{x_1} ，一、二等联合平差后一等点未知数的协因数阵为 Q_{x_1} ，不加推导可写出^{[1][3]}

$$Q_{x_1} = Q'_{x_1} + \Delta Q_{x_1} \quad (5)$$

$$\Delta Q_{x_1} = Q'_{x_1} B_{21}^T P_2 (I - B_{22} Q_{x_2} B_{22}^T P_2) B_{21} Q'_{x_1} \quad (6)$$

其中， ΔQ_{x_1} 称为精度增益，它主要取决于二等观测值的精度。试算表明，联合平差可以使一等水准测量成果获得约10%的精度增益。考虑到最小二乘平差的平均精度增益为25~30%，所以联合平差所获得的精度增益是显著的。

(3) 联合平差可以降低可发现粗差的下限值

由粗差检测理论知

$$R = Q_x P = (I - B Q_x B^T P) = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$r_{ii} = 1 - b_i Q_x b_i^T p_i \quad (8)$$

其中 b_i 为 B 的第 i 个行向量。可发现粗差的下限值 $\nabla_0 l_i$ 为

$$\nabla_0 l_i = \sigma_{0.1} \sqrt{\frac{\delta}{r_{ii}}} = c(p_i r_{ii})^{-1/2} \quad (9)$$

其中 δ 为非中心化参数， $c = \delta \sigma_0$ 。当某观测值的权 p_i 变化 Δp_i ，相应的 r_{ii} 和 $\nabla_0 l_i$ 变化 Δr_{ii} 和 $\delta(\nabla_0 l_i)$ 。由式(8)和(9)得^[2]

$$\Delta r_{ii} = -r_{ii} b_i Q_x b_i^T \Delta p_i \quad (10)$$

$$\delta(\nabla_0 l_i) = -\frac{c}{2} [p_i^{-3/2} r_{ii}^{-1/2} - p_i^{-1/2} r_{ii}^{-3/2} b_i N^{-1} b_i^T] \Delta p_i = -\frac{c}{2} a^{-1/2} q_{vi} \Delta p_i \quad (11)$$

其中 $\alpha = t/n$ (t 未知数个数, n 为观测量数)。式(11)表明, 增加观测值的权将使相应观测值可发现粗差的下界值降低。联合平差时网孔缩小, 一等点间水准路线的长度大幅度缩短, 有利于粗差检测。计算表明, 采取联合平差可以使一等水准路线的可发现粗差下界值下降22%。

(4) 按间接平差可获得全部的精度信息, 并易于实施粗差检测, 方差分量估计等计算。

2 关于水准网平差时观测值定权的必要精度

研究定权的必要精度不仅涉及定权误差对平差结果的影响, 而且对定权方法和定权公式的选择等都有着十分重要的意义。

设 P 是正确的权阵, 实际平差时使用的权为 $\bar{P} = P + \Delta P$, 其中 ΔP 是定权误差。 ΔP 对参数估计的影响为^[1]

$$\Delta X = Q_x B^T \Delta P R V \quad (12)$$

或

$$\Delta x_i = \sum_{u=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{j=-j}^i (q_{ij} b_{kj}) r_{ku} \Delta p_u v_u \quad (13)$$

ΔP 对改正数 V 的影响为

$$\Delta V = \alpha G R V \quad (14)$$

其中

$$G = Q \Delta P = \text{diag}(g_1, g_2, \dots, g_n) = \text{diag}(\Delta p_1/p_1, \Delta p_2/p_2, \dots, \Delta p_n/p_n)$$

或用纯量表示为

$$\Delta v_i = \alpha g_i \sum_{j=1}^n r_{ij} v_j \quad (15)$$

关于 ΔP 对 Q_x 与 σ_0 的影响可参见文献^[3]。

确定定权的必要精度就是要从整体上了解和掌握 ΔP 的限值, 使之对平差结果的影响可以略去不计。这一精度要求是以 ΔP 对平差结果(X, L, Q_x 和 σ_0)所产生的最大影响为依据而确定的。鉴于水准网平差的主要目的是求改正数, 平差结果最终应用的是加入改正数之后的高程值。因此, 考虑权的设定对平差结果的影响如何, 主要应看它对平差改正数影响的大小^[4]。另一方面在水准网平差中, 近似高程的改正数是水准路线观测高差改正数之和, 因此只要把 ΔP 对 ΔV 的影响限制在一定范围内, 就可以确保 ΔP 对 X 的影响不致过大。

由式(15), 当仅顾及相邻观测值的 r_{ij} (j 是与观测值 i 相邻的观测值的编号)时, 有^[1]

$$g_i = \Delta u_i / \alpha r_{ii} (1 + \sum_{j \neq i}^{\text{相邻}} |r_{ij}| / r_{ii}) u_m \quad (16)$$

式中 u_m 是 $|u|$ 的平均值, 由我国东北、中部地区一等水准网及德国一等水准网V区计算结果得 $u_m = 0.576 \sim 0.532 \sigma_0$, 一般可取 $u_m = 0.5 \sigma_0$ 。若要求 Δp 对 u 的影响小于该水准路线观测高差中误差 σ_0 的 $1/k$, 则对全网而言定权的平核相对精度要求 $g_m = (\Delta p/p)_m$ 可按下式计算

$$g_m = [0.50 \alpha k (1 + \sum_{j \neq i}^{\text{相邻}} |r_{ij}| / r_{ii})_m r_m]^{-1} \quad (17)$$

其中 r_m 为全网观测值多余观测分量的平均值, 由上述三个实测网计算结果统计得:

$$r_m = 0.37, \quad \alpha = 0.64, \quad (|r_{ij}|/r_{ii})_m = 1.67$$

由此可算得表 1。必须指出, 由于相邻观测值的 r_{ij} 均为正的可解性很小, 故表列数据偏严格, 一般而言 $(\Delta p/p)_m$ 为 25~30% 时, Δu 不会大于高差测量中误差的十分之一。

表 1 观测值定权的平均相对精度要求

k \ r_m	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
5	78%	67%	58%	52%	47%
7	56%	48%	42%	37%	33%
10	39%	33%	29%	26%	23%

为了验证上述结论, 全面分析 ΔP 对平差结果的影响, 利用我国内蒙及东北地区一等水准网和中部地区一等水准网 (见图 1) 的观测资料进行试算。计算包括:

- (1) 按 $P = 1/S$ 进行网平差, 所得结果作为正确值;
- (2) 令 $\Delta p/p$ 在 $\pm 35\%$ 范围内随机变化, 构成权 $\bar{P} = P + \Delta P$ 重新进行平差;
- (3) 令 $|\Delta p/p| \equiv 15\%$ 和 20% , ΔP 的符号随机变化;
- (4) 模拟定权有系统偏差, 令 $|\Delta p/p| \equiv 15\%$ 和 20% , ΔP 的符号连续 5 个相同 (为正或负), 交替变化 (对一等水准而言这相当于 1500km 长的水准路线定权有系统性偏差)。

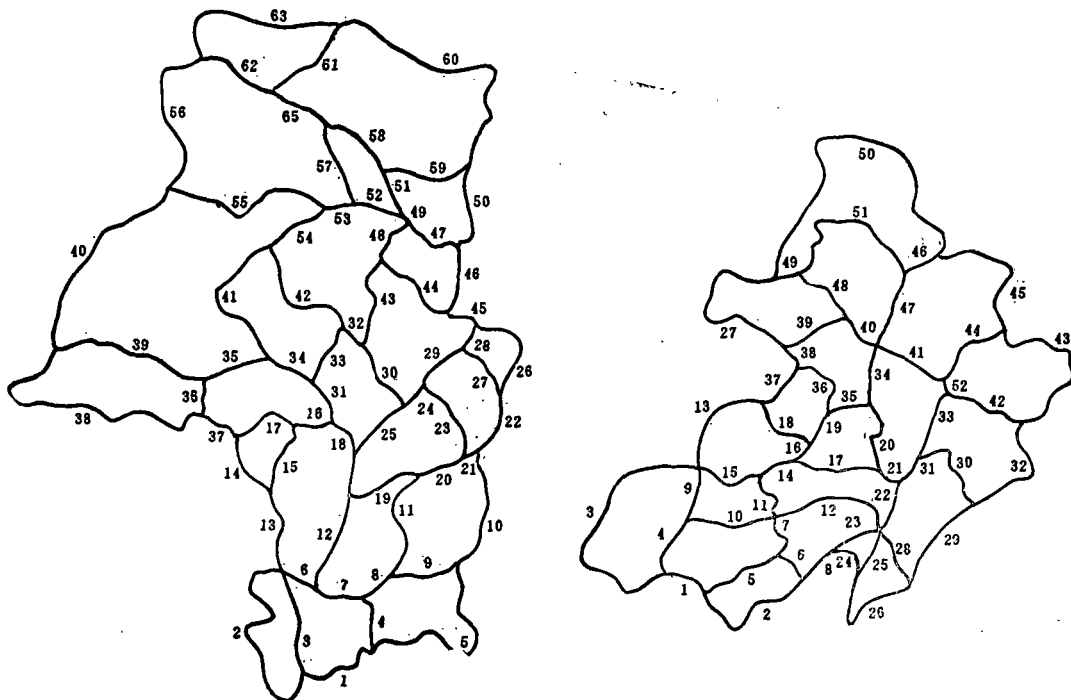


图 1

全部计算包括48次网平差,表2仅列出内蒙及东北地区一等水准网试算的综合结果,中部地区的计算结果十分相似,在此不再列出。由表可知,尽管 $\Delta p/p$ 变化幅度达 $\pm 35\%$,绝大多数的 Δu 小于3毫米,仅有一个达5毫米。两种模拟定权有系统偏差的计算结果表明,即使在这样不利的情况下, ΔV 仍小于相应路线高差观测中误差的十分之一。全部算例表明,在各种情况下权的变化对 X 的影响不大,对精度评定的影响也很小。所以,对水准网平差而言,权不是一个敏感量,定权误差有较大的宽容度,一般可取 $g \leq 25\%$,显然这一要求不难达到。

表2 内蒙及东北一等水准网计算综合成果

项 目	$-35\% < \frac{\Delta p}{p} > 35\%$ 随机变化	Δp 的符号随机变化		Δp 的符号连续5个相同交替变化	
		$\Delta p/p \equiv 15\%$	$\Delta p/p \equiv 20\%$	$\Delta p/p \equiv 15\%$	$\Delta p/p \equiv 20\%$
实验次数	10	5	5	2	2
$ \Delta V _m$	0.91mm	1.02mm	1.14mm	0.84mm	1.17mm
$ \Delta V _m/\sigma_m$	1/18.2	1/16.2	1/14.6	1/19.8	1/14.2
$\Delta V < 2\text{mm}$	91.0%	88.5%	70.4%	90.4%	85.6%
$2\text{mm} < \Delta V \leq 3\text{mm}$	5.8%	10.0%	20.0%	7.7%	7.7%
$3 < \Delta V \leq 4$	3.1%	1.5%	7.7%	1.9%	4.8%
$4 < \Delta V \leq 5$	0	0	1.9%	0	1.9%
$ \Delta V _{\max}$	5.0mm(0.4%)	3.7mm	4.1mm	3.7mm	5.0mm
$ \Delta X _{\text{mm}}$	0.9mm	1.0mm	1.4mm	1.1mm	1.5mm
$ \Delta X _m/m_x$	1/22.6	1/19.4	1/13.8	1/17.2	1/13.1
$\Delta X \leq 2\text{mm}$	93.8%	89.1%	81.3%	97.0%	80.0%
$2 < \Delta X \leq 4$	6.2%	10.9%	18.7%	3.0%	20.0%
$ \Delta X _{\max}$	3.0mm	3.0mm	3.7mm	3.0mm	4.0mm
$ \Delta Q_x _m$	20.2	11.4	17.0	24.6	34.2
$ \Delta Q_x _m/Q_{xm}$	1/21.3	1/37.7	1/25.3	1/17.5	1/12.6
$ \Delta Q_x _{\max}$	78.9	45.0	66.6	75.1	108.0
$\Delta m_{\text{max}}^2/m_x$	1/15.6	1/23.7	1/16.9	1/18.5	1/12.3
σ_0	0.947				
$\sigma'_{0\max}$	0.963	0.949	0.963	0.940	0.947
$\sigma'_{0\min}$	0.900	0.941	0.919	0.927	0.929

3 平差随机模型验后估计的必要多余观测数

一、二等水准网联合平差需要估计不同等级观测值的方差因子。由于验前估算的方差因子不甚可靠，因此应采用验后估计的方法。通常可在全网中选择有代表性的地区进行方差分量估计计算，以节省工作量。问题是需要用多大区域的资料方可确保方差分量估计结果正确可靠。

取判别方差分量估值质量的指标为

$$m \hat{\sigma}_{0_i}^2 / \sigma_0^2 \leq 1/k \quad (18)$$

其中 $m \hat{\sigma}_{0_i}^2 = \sqrt{\text{Var}(\hat{\sigma}_{0_i}^2)}$ ， k 是一个选定常数。由方差分量估计的 Förstner 公式

$$\hat{\sigma}_{0_i}^2 = V_i^T P_i V_i / r_i \quad (19)$$

其中 $r_i = n_i - \text{tr}(N^{-1}N_i)$ ，一、二等水准网联合平差时 $r_1 + r_2 = r$ （全网的多余观测数），可得

$$\text{Var}(\hat{\sigma}_{0_i}^2) = 2\sigma_0^4 / r_i \quad (20)$$

由此得

$$m \hat{\sigma}_{0_i}^2 / \sigma_0^2 = \sqrt{\frac{2}{r_i}} \leq \frac{1}{k}$$

$$\text{和} \quad r_i \geq 2k^2 \quad (21)$$

$$r \geq 4k^2 \quad (22)$$

对上式取等号，并用 r_0 表示 r ，得

$$r_0 = 4k^2 \quad (23)$$

r_0 称为必要的多余观测数。由 (23) 式知： k 分别等于 2, 3, 4 时，相应的 r_0 为 16, 36 和 64。

一般取 $k = 3$ ，即要求 $m \hat{\sigma}_{0_i}^2 / \sigma_0^2 = 1/3$ ， $r_0 = 36$ 就可以了。

大量试算证实了上述估算公式是可靠的。

综上所述可以得出以下几点结论：

(1) 复测水准网应按间接平差采取一、二等水准网联合平差的方法，这不仅理论上严密而且实际效果要比逐级平差好得多。

(2) 水准网平差中权不是一个敏感量，定权误差有较大的宽容度，一般可要求 $g \leq 25\%$ 。

(3) 水准网平差随机模型验后估计可以选择有代表性的部分地区资料（36~40 个一等水准环区域）进行计算即可。

参 考 文 献

- [1] 武汉测绘科技大学(87—02—01)课题组. 一、二等水准网联合平差方法的研究. 1990(8).
- [2] 单杰. 多次计算可靠性矩阵 Q, P 的逐次递归快速算法. 测绘学报, vol. 17, No. 4.
- [3] 薄志鹏. 一等水准测量的实有精度和权的确定. 武测学报, 1983/2.
- [4] 梁振英. 关于水准网平差中权的估算问题的探讨. 测绘学报, Vol. 12, No. 1.

Several Problems on the Repeated National Levelling Network

Bo Zhipeng Liu Guohui wang Xiaoqing

Abstract

Several practical problems on the repeated levelling network have been investigated in this paper, including the choice of the adjustment model, the required accuracy for weighting, and the necessary abundant observations for postestimation.

Through the computation and analysis, some useful conclusions have been arrived.

【Key words】 weighting error, accuracy gain