

变形监测网的可区分性分析*

赵 少 荣

摘 要

本文首先借助于Gauss-Markov模型下两个多维备选假设检验的理论,将变形监测网单个备选假设下的灵敏度,在顾及模型误差的情况下,扩展成监测网的可区分性理论,提出了监测网的可区分性和区分可靠性概念;其次,对于监测网在三种典型变形模型(单点移动,错动和均匀应变)下变形与粗差的可区分性进行了讨论,获得了一些有益的结论。

【关键词】 变形监测网; 可靠性; 灵敏度; 可区分性

1 引 言

布设监测网的主要目的是为了探测该区域内存在的变形。监测网探测变形的能力如何是衡量监测网质量的一个重要指标。因此,研究如何布设一个监测网,最佳区分变形与粗差及对一固定的监测网检验其对变形与粗差的区分能力,以及在此基础上进行粗差的统计检验和监测网的优化设计,具有重要的意义。

文献〔1〕曾给出了一个在变形分析中将粗差当作变形的实例,该例已表明,一旦粗差进入变形分析中,就可能导致变形分析的失败。因此,在变形分析中,一个十分重要的前提就是这种所要研究的变形是否能与可能出现的粗差相区分。

本文借助于Gauss-Markov模型下两个多维备选假设检验理论,将监测网的灵敏度扩展成变形监测网的可区分性。

2 监测网的可区分性

对于高斯-马尔柯夫模型 $l \sim N(AX, \sigma_0^2 P^{-1})$,由最小二乘原理可得坐标未知数向量和单位权方差的估值:

收稿日期:1990-02-15

*国家自然科学基金资助项目

$$\left. \begin{aligned} \hat{X} &= Q_{xx}A^TPl \\ \sigma_0^2 &= V^T PV/f \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

设 \hat{X}_I, \hat{X}_{II} 分别为监测网两期网的平差值, 相应的 (消去附加参数后的) 法方程系数阵为 N_1, N_2 。位移向量:

$$d = M \cdot C \quad (2)$$

式中, C 为变形参数向量, M 为其系数矩阵。当位移向量 d 中的独立位移量的个数多于变形参数 C 中的个数时, (2) 式为矛盾方程, 应按最小二乘法求解:

$$d + V_d = M \cdot \hat{C} \quad (3)$$

$$P_d = N_1(N_1 + N_2)^{-1}N_2$$

$$\hat{C} = (M^T P_d M)^{-1} M^T P_d \cdot d$$

$$Q_{\hat{C}} = (M^T P_d M)^{-1}$$

式中, N_1, N_2 为同一坐标系中二期观测对应的法方程系数矩阵; P_d 是矩阵的平行加。

设 d 和 Q_d 均由内制约法自由网平差获得, 且: $P_d = N_1(N_1 + N_2)^{-1}N_2 = Q_d^+$, 这样求得的变形参数 \hat{C} 及协因数阵 $Q_{\hat{C}}$ 是唯一的, 与基准无关^[2]。若假设二期观测具有不变设计, 即: $N_1 = N_2 = N$, 则有: $P_d = N/2$ 。

根据可靠性理论, 控制网中不可发现的粗差对点位坐标的影响为:

$$\nabla X(s) = N^+ A^T P H \nabla s \quad (4)$$

其中, ∇S 为模型误差 (粗差或系统误差) 向量; H 为其系数矩阵。

若令: $M_2 = N^+ A^T P H$, $c_2 = \nabla s$, 可得 (4) 式的另一形式为:

$$\nabla X(s) = M_2 \cdot \nabla s \quad (5)$$

或:
$$\nabla X(s) = M_2 \cdot C_2 \quad (6)$$

当监测网由于观测值粗差而引起模型误差时, 必须进行统计检验位移 d 是变形还是模型误差。考虑二期观测中, 其中一期观测值中含有粗差, 顾及 (3) 和 (5) 二式, 设:

$$\left. \begin{aligned} d + V_{d1} &= M_1 \cdot \hat{C} \\ d + V_{d2} &= M_2 \cdot \hat{\nabla s} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

由最小二乘法可得:

$$\hat{C} = (M_1^T P_d M_1)^{-1} M_1^T P_d \cdot d, \quad Q_{\hat{C}} = (M_1^T P_d M_1)^{-1} \quad (8)$$

$$\hat{\nabla s} = (M_2^T P_d M_2)^{-1} M_2^T P_d \cdot d, \quad Q_{\hat{\nabla s}} = (M_2^T P_d M_2)^{-1} \quad (9)$$

对变形模型参数 c 和粗差向量 ∇s 进行统计检验: 零假设 $H_0: E(\hat{C}) = 0, E(\hat{\nabla s}) = 0$, 即无变形, 无粗差。

相对立的两个备选假设:

$$H_{a1}: E(\hat{C}/H_{a1}) = \tilde{C} \quad \text{存在变形}$$

$$H_{a2}: E(\hat{\nabla s}/H_{a2}) = \tilde{\nabla s} \quad \text{存在粗差}$$

式中, 上标 \sim 表示其真值。

在已知或未知单位权方差时, 上述检验对应的检验量为:

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \frac{\hat{c}^T Q_{\hat{c}}^{-1} \hat{c}}{\hat{\sigma}_0^2} \sim \chi'^2(\text{rk}(Q_{\hat{c}}), \delta_1^2) \\ T_2 &= \frac{\hat{\nabla}s^T Q_{\hat{\nabla}s}^{-1} \hat{\nabla}s}{\hat{\sigma}_0^2} \sim \chi'^2(\text{rk}(Q_{\hat{\nabla}s}), \delta_2^2) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

或:

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \frac{\hat{c}^T Q_{\hat{c}}^{-1} \hat{c}}{\hat{\sigma}_0^2 \text{rk}(Q_{\hat{c}}^{-1})} \sim F(\text{rk}(Q_{\hat{c}}), f_1 + f_2, \delta_1^2) \\ T_2 &= \frac{\hat{\nabla}s^T Q_{\hat{\nabla}s}^{-1} \hat{\nabla}s}{\hat{\sigma}_0^2 \text{rk}(Q_{\hat{\nabla}s}^{-1})} \sim F(\text{rk}(Q_{\hat{\nabla}s}), f_1 + f_2, \delta_2^2) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

其中, $\hat{\sigma}_0^2$ 是 σ_0^2 的估值; $f_1 + f_2$ 为 $\hat{\sigma}_0^2$ 的自由度; $\delta_i^2 (i=1, 2)$ 为非中心化参数, 且:

$$\delta_1^2 = \frac{\tilde{c}^T Q_{\tilde{c}}^{-1} \tilde{c}}{\sigma_0^2}, \quad \delta_2^2 = \frac{\tilde{\nabla}s^T Q_{\tilde{\nabla}s}^{-1} \tilde{\nabla}s}{\sigma_0^2} \quad (12)$$

根据两个多维备选假设检验理论, 选定某一显著水平 α_0 , 检验的结果可能有三种:

(1) 当 $T_1 < F_{1-\alpha_0}(\text{rk}(Q_{\hat{c}}), f_1 + f_2)$, $T_2 < F_{1-\alpha_0}(\text{rk}(Q_{\hat{\nabla}s}), f_1 + f_2)$ 时, 接受 H_0 假设, 即无粗差也无变形。

(2) 当 $T_1 > T_2$ 且 $T_1 > F_{1-\alpha_0}(\text{rk}(Q_{\hat{c}}), f_1 + f_2)$ 时, 接受 H_{a_1} 假设, 即认为该区域内存在变形模型 c_0 。

(3) 当 $T_2 > T_1$ 且 $T_2 > F_{1-\alpha_0}(\text{rk}(Q_{\hat{\nabla}s}), f_1 + f_2)$ 时, 接受 H_{a_2} 假设, 即认为存在粗差向量 ∇s 。

在上述检验中除了犯第 I 类错误的概率外, 还存在着犯第 III 类统计错误的概率。由于犯第 III 类错误的概率与两个备选假设的相关系数有关, 下面推导计算相关系数的一般表达式。

令: $c_1 = c$, $c_2 = \nabla s$, 将 (8) 和 (9) 式代入 (10) 式后得:

$$T_i = d^T P_d M_i (M_i^T P_d M_i)^{-1} M_i^T P_d d / \sigma_0^2 \quad (i=1, 2)$$

在 H_0 假设下, $d \sim N(0, \sigma_0^2 \cdot P_d^+)$, 由二次型协方差定理得:

$$\begin{aligned} \text{cov}(T_1, T_2) &= 2 \cdot \text{tr}((M_1^T P_d M_1)^{-1} M_1^T P_d M_2 (M_2^T P_d M_2)^{-1} \cdot M_2^T P_d M_1) \\ &= 2 \cdot \text{tr}(Q_{\hat{c}_1} \cdot Q_{\hat{c}_1 \hat{c}_2}^{-1} \cdot Q_{\hat{c}_2} \cdot Q_{\hat{c}_2 \hat{c}_1}^{-1}) \end{aligned}$$

$$\text{令: } M_{12} = Q_{\hat{c}_1} Q_{\hat{c}_1 \hat{c}_2}^{-1} \cdot Q_{\hat{c}_2} Q_{\hat{c}_2 \hat{c}_1}^{-1} \quad (13)$$

其中: $Q_{\hat{c}_1 \hat{c}_2}^{-1} = M_1^T P_d M_2 = \frac{1}{2} M_1^T N N^+ A^T P H$

$$Q_{\hat{c}_2 \hat{c}_1}^{-1} = M_2^T P_d M_1 = \frac{1}{2} H^T P A N^+ N M_1$$

$$Q_{\hat{c}_1} = 2(M_1^T N M_1)^{-1}$$

$$Q_{\hat{c}_2} = 2(H^T P A N^{-1} A^T P H)^{-1}$$

由此可得:

$$\rho_{T_1 T_2} = \frac{\text{cov}(T_1, T_2)}{\sqrt{\text{Var}(T_1)} \cdot \sqrt{\text{Var}(T_2)}} = \frac{\text{tr}(M_{12})}{\sqrt{\text{rk}(Q_{\hat{c}_1})} \cdot \sqrt{\text{rk}(Q_{\hat{c}_2})}} \quad (14)$$

$$\text{总体相关系数: } \rho_G = \sqrt{\rho_{T_1 T_2}} \quad (15)$$

$$\text{最大相关系数: } (\rho_{c_1 c_2})_{\max} = \sqrt{\lambda_{\max}(M_{12})} \quad (16)$$

式中 $\lambda_{\max}(M_{12})$ 为矩阵 M_{12} 的最大特征根。

由上面的推导过程可看出, 相关系数与观测结果无关。若在(7)式中, 将 ∇s 增大 k 倍, 即将 $k \cdot \nabla s$ 代入上述公式中, 其相关系数不变, 这表明粗差的大小对相关系数无影响(设 $\nabla s \neq 0$)。

在已知相关系数后, 由选定的显著水平 α_0 和非中心化参数 δ_0^2 , 即可查表求得两个备选假设联合检验时犯第Ⅲ类错误的概率 ν_0^2 及区分可能性 $1-\nu_0^2$ 。由于相关性的影响, 非中心化参数 $\delta_{0,p}$ 总是大于或等于单个备选假设检验时的非中心化参数的临界值 δ_0^2 , 定义:

$$K_p = \delta_{0,p} / \delta_0 \quad (17)$$

为可区分性放大倍数。

设变形模型参数在 g 方向与粗差向量 ∇s 在 s 方向上的相关系数为 $\rho_{(g,s)}$ 。我们常常对粗差在变形方向 g 上的影响向量感兴趣, 不妨令: $s=g$, 及 $\rho_{(g)} = \rho_{(g,s)}$ 。若要求变形模型参数 c 以一定的功效被检验出来, 且以一定的区分能力与粗差向量 ∇s 相区分, 则只须下式成立:

$$\frac{\tilde{c}^T Q_c^{-1} \tilde{c}}{\sigma_0^2} > \delta_{0,p(g)}^2 \quad (18)$$

将 \tilde{c} 限定在 g 方向, 令: $\tilde{c} = L \cdot g$, 并将其代入(18)式后得:

$$L > \sigma_0 \cdot \delta_{0,p(g)} / \sqrt{g^T Q_c^{-1} g} \quad (19)$$

$$\text{令: } L_0 = \sigma_0 \cdot \delta_{0,p(g)} / \sqrt{g^T Q_c^{-1} g} \quad (20)$$

则 L_0 为变形监测网的可区分性数值。由此可得监测网的可区分性下界域为:

$$\begin{aligned} \nabla c(g) &= g \cdot \sigma_0 \cdot \delta_{0,p(g)} / \sqrt{g^T Q_c^{-1} g} \\ &= g \cdot \sigma_0 \cdot K_{p(g)} \cdot \sigma_0 / \sqrt{g^T Q_c^{-1} g} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\text{令: } \nabla_0 c(g) = g \cdot \sigma_0 / \sqrt{g^T Q_c^{-1} g} \quad (22)$$

$$\text{则: } \nabla c(g) = K_{p(g)} \cdot \nabla_0 c(g) \quad (23)$$

其中, $\nabla_0 c(g)$ 为监测网的灵敏度, 与之对应的 $\nabla c(g)$ 称为监测网的可区分性。因此, 变形监测网在 g 方向上的可区分性数值为其灵敏度数值的 $K_{p(g)}$ 倍。

至此, 我们在顾及模型误差的情况下, 已将单个备选假设下监测网的灵敏度, 扩展成与粗差相区分的可区分性数值。

与最大相关系数 $(\rho_{c_1 c_2})_{\max}$ 相对应, 定义最大可区分性放大倍数:

$$K_{(\rho_{c_1 c_2})_{\max}} = K_{p_{\max}} \quad (24)$$

这时有:

$$\nabla c(g)_{\max} = \nabla_0 c(g) \cdot K_{\rho_{\max}} \quad (25)$$

称 $\nabla c(g)_{\max}$ 为监测网在 g 方向上的充分可区分性数值。

对于同样给定的 α_0 , β_0 和 δ_0 , 可获得监测网在 g 方向可发现且能与变形相区分的粗差下界值为:

$$\nabla_0 S = \sigma_0 \cdot K_{\rho(g)} \cdot \delta_0 / \sqrt{g^T Q_{\nabla_0}^{-1} g} \quad (26)$$

相对应的粗差下界域为:

$$\nabla S = \nabla_0 S \cdot g = g \cdot \sigma_0 K_{\rho(g)} \cdot \delta_0 \sqrt{g^T Q_{\nabla_0}^{-1} g} \quad (27)$$

对应的影响向量为:

$$\nabla x(g) = N^+ A^T P H g \cdot \sigma_0 \cdot K_{\rho(g)} \cdot \delta_0 / \sqrt{g^T Q_{\nabla_0}^{-1} g} \quad (28)$$

若固定 δ_0 , 则 ∇S 对二维向量为下界值椭圆, 对三维向量为下界值椭球, 当参数落入这个区域内, 它不能用统计检验以 β_0 的功效被发现。我们将(27)和(28)式中的 ∇S 和 $\nabla x(g)$ 分别称为监测网的内、外区分可靠性, 或统称为监测网的区分可靠性。与一般的控制网内、外可靠性相比较, (27)和(28)式中多了一项可区分性放大倍数 K_{ρ} 。

下面我们来讨论两种特殊情况。

若在(7)式中, 考虑 $\nabla S = 0$, 即无粗差, 这时有: $\rho_{T_1, T_2} = 0$, $\delta_{0, \rho(g)} = \delta_0$, $K_{\rho} = 1$, 由(23)式得:

$$\nabla C(g) = \nabla_0 C(g) = g \cdot \sigma_0 \cdot \delta_0 \cdot \sqrt{g^T Q_{\nabla_0}^{-1} g} \quad (29)$$

即当粗差不存在时, 监测网的可区分性退化为监测网的灵敏度。

若在(7)式中, 考虑 $c = 0$, 即该区域内无变形, 这时有: $\rho_{T_1, T_2} = 0$, $\delta_{0, \rho(g)} = \delta_0$, $K_{\rho} = 1$, (27)和(28)二式变为:

$$\nabla S = g \cdot \sigma_0 \cdot \delta_0 \sqrt{g^T Q_{\nabla_0}^{-1} g} \quad (30)$$

$$\nabla X(g) = N^+ A^T P H g \cdot \sigma_0 \cdot \delta_0 / \sqrt{g^T Q_{\nabla_0}^{-1} g} \quad (31)$$

即当无变形时, 区分可靠性退化为熟知的控制网内、外可靠性。

上述讨论表明, 监测网的灵敏度和可靠性分别是监测网的可区分性和区分可靠性在 $c = 0$ 和 $\nabla S = 0$ 时的两种特殊形式。所以, 监测网的可区分性和区分可靠性实质是监测网灵敏度和可靠性的扩展形式。

3 几种典型变形模型与粗差的可区分性分析

3.1 单点移动模型

设 i 为监测网中任意一点, j 为网中任一观测值, 并假设第 j 个观测值中含有粗差。若要判断位移量是由于 i 点的变形, 还是由于第 j 个观测值的粗差引起的, 则相应的两个备选假设为:

$$\left. \begin{aligned} H_{s1}: E(d) &= M_1 \hat{c} \\ H_{s2}: E(d) &= M_2 \hat{\nabla} s \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

其中:
$$M_i^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_2 = N^+ A^T P H_j$$

$$H_j = (0 \dots 0 \dots 0 \underset{j}{1} 0 \dots 0 0)^T$$

$$\hat{C}^T = (dx_i \ dy_i)$$

由此可计算总体相关系数:

$$\rho_{G(i, j)} = \left[\frac{1}{2} \text{tr}(M_{ij}) \right]^{1/2} \quad (33)$$

最大相关系数:

$$(\rho_{(i, j)})_{\max} = \sqrt{\lambda_{\max}(M_{ij})} \quad (34)$$

在 (34) 式中, 当 i 固定, j 取遍网中所有观测值, 则对每一个 j 都可得一最大相关系数 $(\rho_{(i, j)})_{\max}$, 定义:

$$(\rho_i)_{\max} = \max\{(\rho_{(i, j)})_{\max}\} \quad (35)$$

为第 i 点与网中观测值的最大相关系数。

下面以 Turkey 境内监测地壳形变的 Ismetpasa 网 (图 1) 为例, 求出了该网在测边网 (表 1) 方向网 (表 2) 和边角网 (表 3) 三种情况下, 网中各点与各观测值之间的相关系数

表 1

| 边号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | $(P_i)_{\max}$ | |
|----|---|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|----------------|------|
| 点号 | 1 | 0.85 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.87 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.74 | 0.00 | 0.00 | 0.75 | 0.00 | 0.71 | 0.87 |
| | 2 | 0.92 | 0.86 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.86 | 0.86 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.92 |
| | 3 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.73 | 0.80 | 0.00 | 0.00 | 0.74 | 0.00 | 0.92 | 0.85 | 0.92 |
| | 4 | 0.00 | 0.73 | 0.86 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.80 | 0.78 | 0.84 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.86 |
| | 5 | 0.00 | 0.00 | 0.90 | 0.91 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.78 | 0.82 | 0.00 | 0.00 | 0.91 |
| | 6 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.81 | 0.80 | 0.74 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.75 | 0.00 | 0.00 | 0.67 | 0.00 | 0.81 |

表 2

| 方 向 | 1 - 2 | 1 - 3 | 1 - 4 | 1 - 5 | 1 - 6 | ... | 6 - 1 | 6 - 2 | 6 - 3 | 6 - 4 | 6 - 5 | $(P_i)_{\max}$ | |
|--------|-------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------|-------------|-------------|-------------|-------------|----------------|-------------|
| 点 号 | 1 | 0.94 | 0.92 | 0.62 | 0.70 | 0.97 | ... | 0.18 | 0.22 | 0.08 | 0.05 | 0.62 | 0.97 |
| | 2 | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.06 | 0.00 | ... | 0.29 | 0.40 | 0.21 | 0.10 | 0.05 | 0.98 |
| | 3 | 0.26 | 0.19 | 0.23 | 0.29 | 0.05 | ... | 0.35 | 0.60 | 0.68 | 0.32 | 0.19 | 0.86 |
| | 4 | 0.16 | 0.24 | 0.37 | 0.36 | 0.08 | ... | 0.26 | 0.43 | 0.27 | 0.40 | 0.58 | 0.95 |
| | 5 | 0.08 | 0.09 | 0.13 | 0.20 | 0.07 | ... | 0.43 | 0.21 | 0.45 | 0.36 | 0.39 | 0.96 |
| | 6 | 0.48 | 0.68 | 0.81 | 0.26 | 0.71 | ... | 0.94 | 0.69 | 0.71 | 0.95 | 0.70 | 0.95 |

表 3

| 方 向 | 1 - 2 | 1 - 3 | 1 - 4 | 1 - 5 | 1 - 6 | ... | 6 - 1 | 6 - 2 | 6 - 3 | 6 - 4 | 6 - 5 | $(P_i)_{\max}$ | |
|--------|-------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------|-------------|-------------|-------------|-------------|----------------|-------------|
| 点 号 | 1 | 0.72 | 0.60 | 0.54 | 0.83 | 0.65 | ... | 0.05 | 0.07 | 0.03 | 0.02 | 0.13 | 0.85 |
| | 2 | 0.01 | 0.02 | 0.00 | 0.11 | 0.00 | ... | 0.27 | 0.24 | 0.17 | 0.07 | 0.18 | 0.76 |
| | 3 | 0.22 | 0.18 | 0.31 | 0.28 | 0.05 | ... | 0.27 | 0.52 | 0.46 | 0.19 | 0.30 | 0.85 |
| | 4 | 0.14 | 0.23 | 0.55 | 0.32 | 0.08 | ... | 0.24 | 0.46 | 0.30 | 0.33 | 0.44 | 0.78 |
| | 5 | 0.26 | 0.25 | 0.25 | 0.33 | 0.21 | ... | 0.28 | 0.43 | 0.33 | 0.33 | 0.58 | 0.64 |
| | 6 | 0.49 | 0.67 | 0.70 | 0.14 | 0.66 | ... | 0.75 | 0.56 | 0.83 | 0.87 | 0.49 | 0.87 |

$(\rho_{(i,j)})_{\max}$ 和 $(\rho_i)_{\max}$ 。

由表 1 可知, 测边网的最大相关系数为 0.92。

若取 $\alpha_0 = 5\%$, $\delta_0 = 2.8$, 可得 $v'_0 = 0.23$, 这表明对单点移动模型, 测边网区分变形与粗差的概率不小于 77%。此外, 对照表 1 和图 1 可以看出, 测边网中与变形点不连接的观测值相关系数均为零, 而与变形点相连接的观测值的相关系数不为零。这表明, 当与变形点不连接的观测值出现粗差时, 在统计意义下能够完全与所研究的变形相区分。

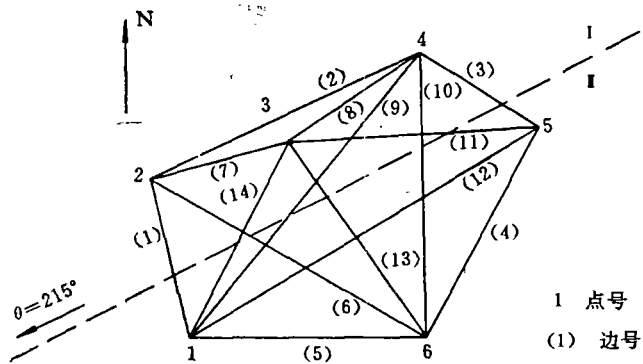


图 1 Ismetpasa 地壳变形监测网

表 2 列出了 Ismeipasa 方向网对应的相关系数。从表中可看出，方向网的最大相关系数为 0.98，因此，与测边网相比较，方向网中某些观测值的粗差与单点移动的区分更为困难些。仔细对照表 2 与图 1 后可发现，对于单点移动模型，方向网中在变形点上设站观测的那些方向值所对应的相关系数（表 2 中的黑体字数字）明显大于其它方向值对应的相关系数，这提示我们，在变形点上设站观测时更应设法避免观测值出现粗差；另一方面，当这些方向值中含有粗差时，其与该点移动模型的区分也将更为困难。

表 3 列出了 Ismetpasa 边角网中各点与各方向观测值的相关系数。

对于边角网中的方向值，与表 2 对应的方向网相比较，在变形点上观测的部分方向对应的相关系数减小（表 3 中的黑体字数字），而其它观测值对应的部分相关系数增大，从整体上来看，也基本上保持与方向网类似的分布，全网的最大相关系数由 0.98 减小到 0.87。

上述讨论表明，相关系数的大小与监测网中观测值的精度分布有关。改变监测网中观测值的精度分布，将改变其对应的相关系数值。

3.2 错动模型

在图 1 所示的 Ismetpasa 网中，研究表明^[6]，II 块可能相对 I 块发生错动。设 II 块运动的模型参数为 $c^T = (a, b)$ ，错动模型为：

$$\left. \begin{array}{l} dx_{1i} = 0 \\ dy_{1i} = 0 \end{array} \right\} i = 2, 3, 4; \quad \left. \begin{array}{l} dx_{2i} = a \\ dy_{2i} = b \end{array} \right\} i = 1, 5, 6$$

计算出该网测边 ($M_s = \pm 2\text{mm}$) 时错动模型与观测值粗差的相关系数 $(\rho_{c_i})_{\max}$ ，灵敏度椭圆及可区分性椭圆元素，列入表 4 中。

表 4

| 边号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | ρ_{\max} |
|-----------------------|----------------|------|---------|------|----------------|----------------|----------|---------|------|------|------|------|------|------|---------------|
| $(\rho_{c_i})_{\max}$ | 0.52 | 0.00 | 0.56 | 0.00 | 0.00 | 0.61 | 0.00 | 0.00 | 0.80 | 0.57 | 0.70 | 0.00 | 0.53 | 0.67 | 0.80 |
| 灵敏度椭圆元素 | | | | | | | 可区分性椭圆元素 | | | | | | | | |
| $E(\text{mm})$ | $F(\text{mm})$ | | A | | $E(\text{mm})$ | $F(\text{mm})$ | | A | | | | | | | |
| 4.45 | 3.60 | | 25° 15' | | 5.95 | 4.81 | | 25° 15' | | | | | | | |

(E: 椭圆长半轴; F: 椭圆短半轴; A: 长轴的方位角)

由表 5 可知，该错动模型与粗差的最大可区分性数值约为 6mm，并且： $v' = 0.14$ 。即当 II 块运动达到 6mm 左右时，监测网能以不小于 80% 的检验功效发现和不少于 86% 的概率与观测值的粗差相区分。

3.3 均匀应变模型

考虑图 1 所示的区域内存在着均匀应变^[6]。设均匀应变模型参数为 $c^T = (\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_{xy})$ ，

| 边号 | $(\rho_{c_i i})_{max}$ | 特征根(λ) | 特征向量(S) |
|----|------------------------|---|---------|
| 1 | 0.42 | 1.380×10^{-6} | -0.397 |
| 2 | 0.50 | | 0.817 |
| 3 | 0.33 | | -0.654 |
| 4 | 0.45 | 0.688×10^{-6} | -0.699 |
| 5 | 0.50 | | -0.297 |
| 6 | 0.80 | | 0.571 |
| 7 | 0.27 | 0.246×10^{-6} | 0.584 |
| 8 | 0.29 | | 0.403 |
| 9 | 0.72 | | 0.913 |
| 10 | 0.77 | $L_{0max} = \sigma_0 \cdot \sigma_0 \cdot \sqrt{\lambda_1}$ $= 6.579 \times 10^{-6} \text{ mm}$ | |
| 11 | 0.56 | | |
| 12 | 0.70 | | |
| 13 | 0.61 | | |
| 14 | 0.48 | | |

其均匀应变模型为:

$$\left. \begin{aligned} dx_i &= x_i \varepsilon_x + y_i \varepsilon_{xy} \\ dy_i &= x_i \varepsilon_{xy} + y_i \varepsilon_y \end{aligned} \right\} \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

由于假设监测网采用内制约法自由网平差, 这时, 旋转参数 $\omega = 0$ 。对于 Ismetpasy 测边网, 计算出均匀应变模型与各观测值粗差的相关系数, 并将谱分解的结果列入表 5 中。从表 5 中可以看出, 对于均匀应变模型, 最大相关系数为 0.80, 由此可得 $v' = 0.14$, 即该网区分均匀应变与观测值粗差的概率不小于 86%。

4 结束语

本文应用两种模型误差的可区分性理论将监测网的灵敏度扩展成为监测网的可区分性, 提出了监测网的可区分性和区分可靠性概念。研究表明, 监测网的灵敏度和可靠性是监测网的可区分性和区分可靠性分别在无粗差和无变形时的二种特殊形式。并且比较了测边网, 方向网及边角同测网中相关系数的变化情况。由上述研究获得的一些结论对于变形监测网的设计以及变形测量成果的分析具有重要的意义。

由于监测网的可区分性和区分可靠性与对应的灵敏度和可靠性数值仅仅相差一个可区分性放大倍数, 因此, 基于可区分性和区分可靠性准则的监测网优化设计, 可以直接沿用文献〔6〕中给出的方法。

参 考 文 献

- 〔 1 〕 李德仁. 误差处理和可靠性理论. 测绘出版社, 1988.
- 〔 2 〕 陈永奇. 测量工程个别问题. 武汉测绘科技大学讲义, 1984 (3) .
- 〔 3 〕 张正禄. 变形监测网的灵敏度分析. 武汉测绘科技大学学报, 1986 (3) .
- 〔 4 〕 卢 冈. 变形模型的可发现性和可区分性研究. 测绘学报, 1987 (4) .
- 〔 5 〕 Eren K. 利用大地测量作北安纳托利亚断层的应变分析, 武测译文, 1985 (1) .
- 〔 6 〕 赵少荣. 同时顾及灵敏度、精度和可靠性准则的监测网二类优化设计. 测绘学报, 1990 (3) .
- 〔 7 〕 Zhao Shaorong. On Separability for Deformations and Gross Errors. Bulletin Géodésique, 1990 (4) .

Analysis of Separability for Deformation Monitoring Networks

Zhao Shaorong

Abstract

According to the testing theory with two alternative hypotheses, the theory of sensitivity for a deformation Monitoring network has been extended to the theory of separability for deformations and gross errors. General formulas are established and the separability and the discernible-reliability for a monitoring network are introduced. The separability between deformations and gross errors for some typical deformation models(single point movement, block movement and homogeneous strain) is investigated and some important results are given.

【Key words】 deformation monitoring network, reliability, sensitivity, separability