

递归型自适应数字滤波器研究 的状态空间法探讨

廖明生

摘要

本文将状态空间法用于递归型自适应数字滤波器的研究,引入滤波器系数灵敏度的概念作为性能评价的依据,并从低灵敏度的角度提出了平衡形和对称形两种新的自适应滤波器结构,实验结果显示了它们的优越性能。

【关键词】 数字滤波器;状态空间;灵敏度;自适应算法

1 概述

针对最佳滤波理论中维纳滤波器和卡尔曼滤波器的缺点所提出的自适应数字滤波器(Adaptive Digital Filter 以下简称 ADF)的特点是:可以根据环境条件变化自动地调节其自身的参数,而在设计时只需要很少的或者根本不需要任何关于信号和噪声的先验统计知识。因此,ADF 在近十几年来发展迅速,在通信、雷达、自动控制和时间序列分析等领域得到广泛应用^[1]。

仅对零点自适应调整的非递归型 ADF 的研究趋于成熟的同时,能够调整极点的递归型 ADF 的优越性引人注目,但收敛速度和稳定性等问题尚待解决,为此国内外学者提出了一些 ADF 的改进结构来改善这些性能。实际上,一个滤波器可以由许许多多的状态空间结构来实现,但不同的结构所表现出的性能可能有很大差异。本文在文献[2]、[3]所提出的状态空间 ADF 的基础上引入系数灵敏度的概念评价 ADF 的性能,并在此基础上提出平衡形和对称形两种新方案,最后给出的实验结果显示了新方案的优越性。

2 状态空间 ADF 原理

基本的 ADF 模型如图 1 所示,输入—输出关系表现为时变差分方程

收稿日期:1990—06—25

• 本文的一部分工作是在日本东北大学完成的,谨在此对给予指导和大力支持的竹田宏教授、川又政征助教授和邓天波博士表示感谢。

$$y(n) = \sum_{i=0}^N b_i(n)u(n-i) + \sum_{j=1}^M a_j(n)y(n-j) \quad (1)$$

或者

$$H(z, n) = \frac{\sum_{i=0}^N b_i(n)Z^{-i}}{1 + \sum_{j=1}^M a_j(n)Z^{-j}} \quad (2)$$

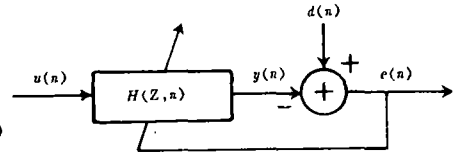


图 1

系数 a_i, b_i 根据最小均方(LMS)算法调整,使得 ADF 的输出 $y(n)$ 逐渐接近参考信号 $d(n)$,而误差信号 $e(n)$ 收敛至近似为零的最小值。

滤波器的状态方程表示为

$$\begin{cases} X(n+1) = AX(n) + Bu(n) \\ y(n) = C^T X(n) + Du(n) \end{cases} \quad (3)$$

这里 A, B, C, D 分别为 $N \times N, N \times 1, N \times 1, 1 \times 1$ 的矩阵, $X(n)$ 是状态向量, C^T 是 C 的转置矩阵, 状态方程与传递函数有如下关系式:

$$H(Z) = C^T(ZI - A)^{-1}B + D \quad (4)$$

文献[2]、[3]提供了状态空间 ADF 方案(如图 2 所示),通过调整状态方程的系数来获得所需的滤波特性。即有

$$\begin{cases} X(n+1) = A(n)X(n) + B(n)u(n) \\ y(n) = C^T(n)X(n) + D(n)u(n) \end{cases} \quad (5)$$

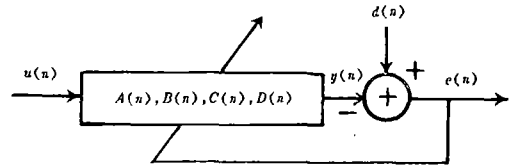


图 2

相应的 LMS 自适应算法为

$$\begin{cases} A_{ij}(n+1) = A_{ij}(n) + 2\mu e(n) \frac{\partial y(n)}{\partial A_{ij}(n)} \\ B_i(n+1) = B_i(n) + 2\mu e(n) \frac{\partial y(n)}{\partial B_i(n)} \\ C_i(n+1) = C_i(n) + 2\mu e(n) \frac{\partial y(n)}{\partial C_i(n)} \\ D(n+1) = D(n) + 2\mu e(n) \frac{\partial y(n)}{\partial D(n)} \end{cases} \quad (6)$$

这里 A_{ij}, B_i, C_i, D 分别是矩阵 A, B, C, D 的元素, μ 为收敛因子,通常由实验确定, $e(n)$ 是时刻 n 的误差信号。

在反复进行的系数调整过程中,如果计算矩阵 A, B, C, D 的所有元素,工作量是很大的。为此文献[2]提出了一种简化算法:只计算 A 的一列和 C 共 $2N$ 个元素也能收敛,且性能仍比基于差分方程的算法优越。此时取

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1(n) \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_2(n) \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_N(n) \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad C^T = \begin{bmatrix} C_1(n) \\ C_2(n) \\ \vdots \\ C_N(n) \end{bmatrix} \quad (7)$$

但是这种结构以信号处理的观点看并不合适,下面我们就此问题作进一步讨论。

3 系数灵敏度与 ADF 性能

滤波器的系数灵敏度作为衡量滤波器结构的参数之一,已广泛地应用于数字滤波器的分析、综合等方面,其定义为 $\partial H(Z)/\partial A_{ij}, \partial H(Z)/\partial B_i, \partial H(Z)/\partial C_i, \partial H(Z)/\partial D$, 测度通常定义为

$$s = \left[\sum_{i,j=1}^N \left| \frac{\partial H(Z)}{\partial A_{ij}} \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \left[\sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial H(Z)}{\partial B_i} \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \left[\sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial H(Z)}{\partial C_i} \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \left| \frac{\partial H(Z)}{\partial D} \right|$$

$$= [\text{tr}(W) + 1][\text{tr}(K) + 1] \quad (8)$$

K 和 W 分别是可控制性矩阵和可观测性矩阵。

从(6)式可以看到:关于系数的梯度 $\partial y(n)/\partial A_{ij}, \partial y(n)/\partial B_i, \dots$ 等对 ADF 的影响很大,自适应调整是根据梯度进行的。而梯度是与系数灵敏度密切联系的,即

$$\begin{cases} \frac{\partial Y(Z)}{\partial A_{ij}} = \frac{\partial H(Z)}{\partial A_{ij}} U(Z) \\ \frac{\partial Y(Z)}{\partial B_i} = \frac{\partial H(Z)}{\partial B_i} U(Z) \\ \frac{\partial Y(Z)}{\partial C_i} = \frac{\partial H(Z)}{\partial C_i} U(Z) \\ \frac{\partial Y(Z)}{\partial D} = \frac{\partial H(Z)}{\partial D} U(Z) \end{cases} \quad (9)$$

这里 $U(Z)$ 是输入信号 $u(n)$ 的 Z 变换。由(9)式可见灵敏度直接关系到 ADF 的性能。

从信号处理的观点来分析^[4,5],一方面灵敏度大,系数的微小变化就会对 ADF 输出 $y(n)$ 产生大的影响,自适应调整至参考信号 $d(n)$ 更为困难。特别在误差 $e(n)$ 比较小时容易产生“过调整”现象^[6]。而灵敏度低则梯度值的变化幅度较小,系数比较平滑地进行调整,改善稳定性的同时,加快了收敛速度。

另一方面,灵敏度小对于梯度计算中误差的敏感性也减低,这对滤波器的性能也有影响^[5]。因此,笔者提出了将系数灵敏度作为选择 ADF 结构的一个依据。

4 平衡形 ADF 和对称形 ADF

一个滤波器,给定传递函数 $H(Z)$ 后,可以由许多种结构来实现^[4]。如果用状态方程(如(3)式所示)来描述,是在状态空间中作状态向量的等价变换,得到新的结构。在这些结构中可控制标准形,可观测标准形系数灵敏度很大,以往提出的串联形、并联形和格子形等性能较好的 ADF,灵敏度都比较低。进一步地,灵敏度最小结构是平衡形,系统的结构越接近于平衡形,灵敏度越低。(7)式给出的结构实际上仍是可观测标准形,基于上述讨论,完全可用更好的结构来取代。因此,笔者首先提出平衡形 ADF 的方案。

4.1 平衡形 ADF

平衡形是由可控制性矩阵 K 和可观测性矩阵 W 所决定的一种结构, K 和 W 由下面的方程决定:

$$\begin{cases} K = AK A^T + BB^T \\ W = A^T W A + C^T C \end{cases} \quad (10)$$

对滤波器(A, B, C, D)选择适当的等价变换Q(Q由K, W共同决定)而得到新的滤波器(Q⁻¹AQ, Q⁻¹B, CQ, D), 变换后的可控制性矩阵K'和可观测性矩阵W'为

$$\begin{cases} K' = Q^{-1}KQ^{-T} \\ W' = Q^TWQ \end{cases}$$

此时若变换Q使K'和W'变成

$$K' = W' = \begin{bmatrix} \theta_1 & & & \\ & \theta_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \theta_N \end{bmatrix}$$

就使(8)式中的S达到最小, 变换后的滤波器结构就是平衡形结构。这里θ_i(i=1, ..., N)是矩阵乘积KW的特征值平方根。

平衡形ADF如图3所示来实现。利用(5)式对滤波器系数的各个元素调整以后, 得到新的系数A'(n), B'(n), C'(n), D'(n), 然后作等价变换, 即

$$\begin{aligned} A'(n) &= Q^{-1}A(n)Q \\ B'(n) &= Q^{-1}B(n) \\ C'(n) &= C(n)Q \\ D'(n) &= D(n) \end{aligned}$$

相应地

$$X'(n) = Q^{-1}X(n)$$

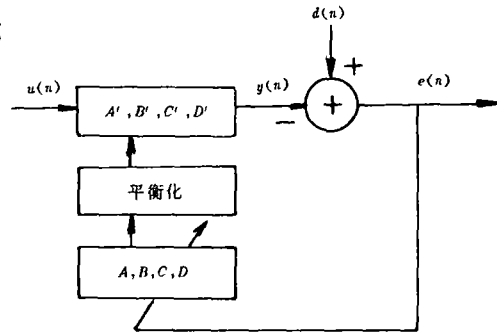


图 3

用变换后的系数矩阵(平衡形)计算ADF的输出y(n)

以及e(n)等, 接着再计算下一时刻滤波器系数等等。这样反复地进行系数的调整、等价变换、平衡形结构下的滤波即得到平衡形的ADF。

但从上面的过程看, 每一次调整系数后都要求K和W以及作平衡化, 所需要的计算量是相当大的, 难于实际应用。下面利用平衡形的特点提出一种近似平衡形结构——对称形。

4.2 对称形

平衡形的系数矩阵之间有一种对称性, 即元素的绝对值有下面的关系

$$\begin{aligned} |A_{ij}(n)| &= |A_{ji}(n)| \\ |B_i(n)| &= |C_i(n)| \end{aligned}$$

而且选择适当的初始值, 在系数调整过程中, 各元素的符号不会发生变化。具有这种对称性结构的滤波器虽然不一定是平衡形, 但是和平衡形是很接近的, 系数灵敏度较低。

对称形ADF方案是: 只对系数的初始值A(0), B(0), C(0), D(0)进行平衡化, 在自适应调整过程中, 不再进行平衡化, 而是保持A以及B和C的对称性。首先, 利用(6)式只调整A_{ij}(i ≤ j), 即A的大约一半元素, 剩余的部分由关系式|A_{ji}(n)| = |A_{ij}(n)|得到, 符号则和初始值的符号一致。另一方面, 在(6)式中由B_i(n)计算B_i(n+1), 需要进行卷积运算^[2], 因此我们自适应调整C_i(n), 然后利用对称性得到B_i(n), 进一步减少计算量。这样只需要对A的大约一半元素(N(N+1)/2)和C的N个元素进行自适应计算, 只要保持对称性而不作平衡化计算, 而系数灵敏度特性很接近于平衡形。

5 实 验

以上所提出的平衡形和对称形 ADF 方案,我们进行了一些仿真实验,以与文献[2]的方案作些比较。这里我们以一个对二阶传递函数作自适应调整的例子作一说明。如图 2 所示,输入信号 $u(n)$ 是 $N(0,1)$ 的白噪声,参考信号 $d(n)$ 是让 $u(n)$ 通过一个传递函数为

$$H(Z) = \frac{0.057}{1.0 - 1.625Z^{-1} + 0.9025Z^{-2}} \quad (11)$$

的双极点滤波器产生。理论上,将 ADF 的传递函数调整至 $H(Z)$,均方误差 $E[e^2(n)]$ 就收敛至零。这里极点 $p_{1,2} = 0.95e^{\pm j30^\circ}$,很接近于单位圆,即意味着容易引起过调整和不稳定,是收敛比较困难的例子。文献[2]的方案对应的状态方程为可观标准形(以下简称标准形),即

$$\begin{cases} X(n+1) = \begin{bmatrix} 0.0000 & -0.9025 \\ 1.0000 & 1.6450 \end{bmatrix} X(n) + \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 0.0000 \end{bmatrix} u(n) \\ y(n) = [0.0938 \quad 0.1028] X(n) + [0.0570] u(n) \end{cases} \quad (12)$$

相应的灵敏度测度为 $S=433.77$ 。

平衡形的状态方程为

$$\begin{cases} X(n+1) = \begin{bmatrix} 0.8430 & -0.4758 \\ 0.4758 & 0.6057 \end{bmatrix} X(n) + \begin{bmatrix} -0.0919 \\ -0.3197 \end{bmatrix} u(n) \\ y(n) = [0.0919 \quad -0.3197] X(n) + [0.057] u(n) \end{cases} \quad (13)$$

相应的 $S=2.41$ 。此例即可看出:尽管(12)式和(13)式对应的传递函数都是(11)式,但灵敏度特性差异很大。

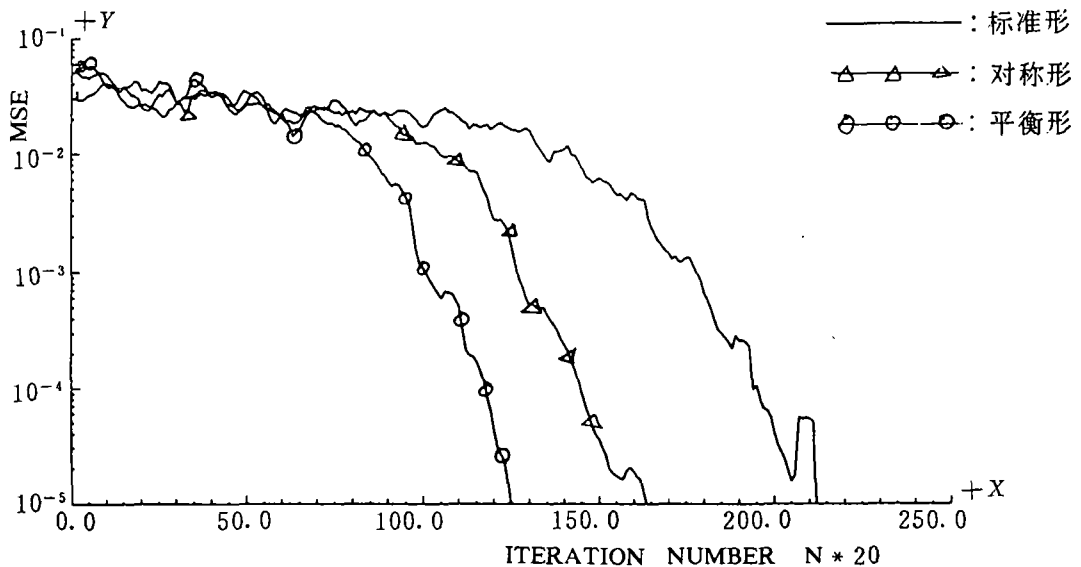


图 4

图 4 是标准形、对称形、平衡形三种结构作自适应滤波得到的均方误差 $E[e^2(n)]$ 的学习曲线(每种结构作 20 次实验,作 $e^2(n)$ 的估计)。图 5 是这三种结构对应的梯度值输出 $\partial y(n)/\partial A_{ij}$ 的一个样本曲线。这里 μ 取 0.01,迭代计算次数 $N=5000$ 。迭代起始点的状态方程为

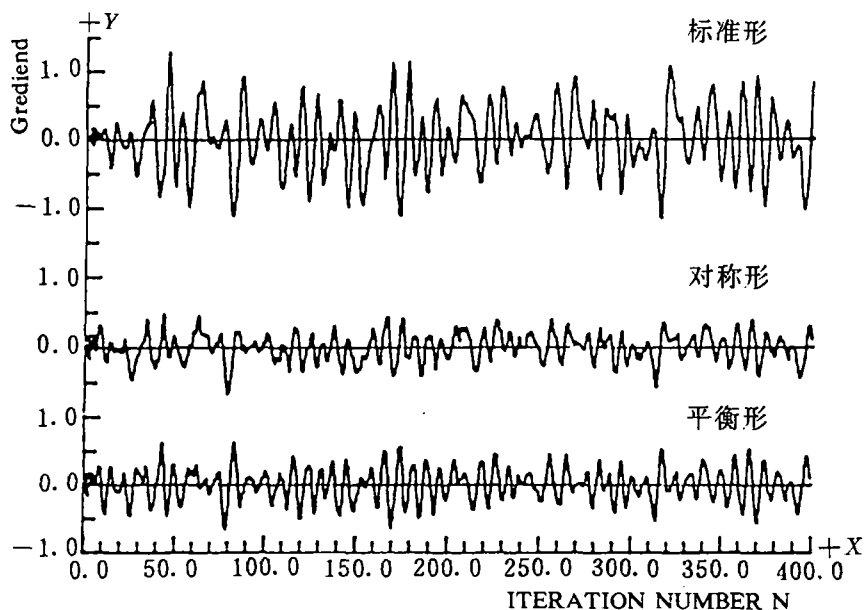


图 5

$$\begin{cases} X(n+1) = \begin{bmatrix} 0.0000 & -0.6400 \\ 1.0000 & 1.1312 \end{bmatrix} X(n) + \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 0.0000 \end{bmatrix} u(n) \\ y(n) = [0.1131 \quad 0.0640] X(n) + [0.1000] u(n) \end{cases} \quad (14)$$

平衡形状方程为

$$\begin{cases} X(n+1) = \begin{bmatrix} 0.6594 & -0.5735 \\ 0.5735 & 0.4718 \end{bmatrix} X(n) + \begin{bmatrix} -0.0277 \\ -0.3375 \end{bmatrix} u(n) \\ y(n) = [0.0277 \quad -0.3375] X(n) + [0.1000] u(n) \end{cases} \quad (15)$$

对称形起始点的状态方程也是(15)式。(14)式和(15)式的灵敏度测度 S 分别为 6.76 和 1.71。

从图 4 看,系数灵敏度最低的平衡形收敛得最快,依次是对称形、标准形。特别是标准形的学习曲线在收敛至接近 10^{-5} 时有一回升的尖峰,意味着出现了“过调整”。而平衡形和对称形没有明显的这种现象。考察图 5 则可以看到,平衡形的梯度值的变化幅度比较小,对称形的特性和平衡形很接近,这与前面的理论分析吻合。综合考虑收敛特性和计算量,对称形结构更有实用价值。

6 结 论

从以上的论述和实验结果来看,系数灵敏度可以作为选择 ADF 结构的重要依据,所提出的平衡形结构对理论上探讨很有价值,而对称形则有实用价值。同时也显示了状态空间法在自适应信号处理领域中的潜力。

参 考 文 献

- [1] Hoykin S. Introduction of Adaptive Filters. Macmillan Publishing Co., 1986.
- [2] Johns D A, Snelgreere W M, Sedra A S. State— Space Adaptive Recursive Filters. IEEE ISCAS'88, 1988.
- [3] Zhang J Y , Steenaart W. Realization and Implementation of Adaptive State— Space Recursive Filters. IEEE ICASSP'89, 1989.
- [4] Roberts R A and Mullis C T. Digital Signal Processing. Addison Wesley, 1989.
- [5] 川又, 植口. ティラタルシステム 制御における量子化误差. 計測と制御, Vol. 27, 1988(12).
- [6] Stearn S D. Error Surfaces of Recursive Adaptive Filter. IEEE Trans. On ASSP, June 1981.

A Study on the State-Space Method of Recursive Adaptive Digital Filter

Liao Mingsheng

Abstract

In this paper, the State-Space method is used in the study of recursive Adaptive Digital Filter(ADF). The coefficient sensitivity is introduced to evaluate the performance of ADF, and the balanced structure and symmetric structure ADF are proposed from the viewpoint of low sensitivity. The computer simulation is also presented.

【Key words】 digital filter; state-space; sensitivity; adaptive algorithm