

# 超定边值问题的差分法

晁定波 边少锋

## 摘要

物理大地测量面临着越来越多的数据,高程异常、垂线偏差、重力异常、重力梯度等,因此出现了超定边值问题,本文采用求解偏微分方程最简单而又最常用的差分法,对这一问题进行了初步的研究。

**【关键词】** 超定边值问题,偏微分方程,差分法

## 1 拉普拉斯方程在地形面上的差分逼近

扰动位满足的 Laplace 方程及地面边值条件为:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 & (1) \\ \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{2T}{\rho} = -\Delta g & (2) \end{cases}$$

式中:  $\rho = R + z$ ,  $z$  为地形高  $h$ ,  $R$  为地球半径。

由于空间应用时,除地面外其它边界条件难以精确给定,并且当差分网格较细时,要解算极其庞大的线性方程组,应用有一定困难,所以可应用积分法降维后在地形面上求解,由(2)式可得

$$\frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{2T}{\rho} - \Delta g$$

因此

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} &= -\frac{\partial}{\partial z} \left( \Delta g + \frac{2T}{\rho} \right) = -\frac{\partial \Delta g}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{2T}{\rho} \right) \\ &= -\frac{\partial \Delta g}{\partial z} - \frac{2}{\rho} \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{2T}{\rho^2} \\ &= -\frac{\partial \Delta g}{\partial z} + \frac{2\Delta g}{\rho} + \frac{6T}{\rho^2} \end{aligned}$$

由(H. Moritz, 1980)知

$$\frac{\partial \Delta g}{\partial z} = \frac{\Delta g_p}{\rho} + \frac{\rho^2}{2\pi} \iint \frac{\Delta g - \Delta g_p}{r^3} d\sigma \quad (3)$$

式中,  $\Delta g_p$  为计算点处的重力异常;  $\Delta g$  为流动点处的重力异常。

(3)式是球近似,更严格的关系应考虑地形的影响,此处略。(3)式由于积分核随  $1/r^3$  衰减,只需在较小的范围内积分即可。

记:

$$L_1(\Delta g) = \frac{\rho^2}{2\pi} \iint \frac{\Delta g - \Delta g_p}{r^3} d\sigma$$

则

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -L_1(\Delta g) + \frac{3\Delta g}{\rho} + \frac{6T}{\rho^2}$$

如有重力梯度观测值,  $\partial^2 T / \partial z^2$  已知,上式无需计算。

最后一式可变形为

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = L_1(\Delta g) - \frac{3\Delta g}{\rho} - \frac{6T}{\rho^2} \quad (4)$$

为推导方便,记

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$f(x, y) = L_1(\Delta g) - \frac{3\Delta g}{\rho} - \frac{6T}{\rho^2}$$

$f(x, y)$  最后一项  $6T/\rho^2$  含有未知量  $T$ ,但由于  $6T/\rho^2$  数值很小,用  $T$  的近代值代入即可。此时(4)式可改写为

$$\Delta T = f(x, y) \quad (4a)$$

(4a)在给定一定边界条件后,是二维椭圆形偏微分方程。

如图 1 所示,在作格网剖分后,用差商近似代替导数可得

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{T_{i+1,j} - 2T_{ij} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \approx \frac{T_{i,j+1} - 2T_{ij} + T_{i,j-1}}{\Delta y^2} \end{cases} \quad (5)$$

式中  $\Delta x, \Delta y$  分别为  $x, y$  轴方向格网间距。(5)式是导出地形面上差分格式的基础。为此考察地形剖面(例如  $x$  方向)不外乎图 2 三种情况。

为求出地形面上相应的差分格式,如图 2 所示,过  $T_i$  作水平线,设  $T_{i+1}, T_{i-1}$  在水平线上的垂足为  $T'_{i+1}, T'_{i-1}$ ,作泰勒展开取至一

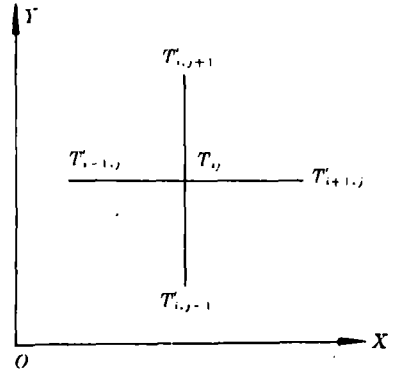


图 1

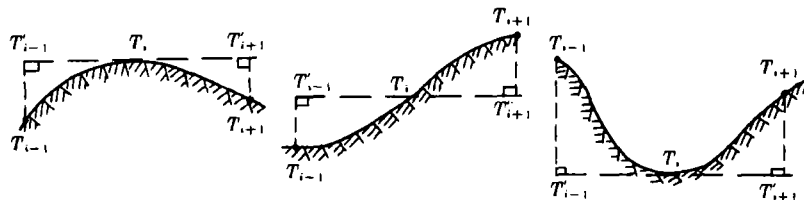


图 2

次项近似有

$$\begin{cases} T_{i+1} = T_{i+1} + \frac{\partial T}{\partial z}(h_i - h_{i+1}) \\ T_{i-1} = T_{i-1} + \frac{\partial T}{\partial z}(h_i - h_{i-1}) \end{cases} \quad (6)$$

由位理论知,质体引力在通过质体表面是连续的,故(6)式成立。

增写  $y$  方向下标,将(6)式代入(5)式,有:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1,j} + \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{i+1,j} (h_{ij} - h_{i+1,j}) - 2T_{ij} + T_{i-1,j} + \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{i-1,j} (h_{ij} - h_{i-1,j})}{\Delta x^2} \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{T_{i,j+1} + \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{i,j+1} (h_{ij} - h_{i,j+1}) - 2T_{ij} + T_{i,j-1} + \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{i,j-1} (h_{ij} - h_{i,j-1})}{\Delta y^2} \quad (8)$$

由位理论知,质体引力位二阶导数在通过质体表面时并不连续,因此(7)式、(8)式对山谷和山坡比  $T_i$  较高的  $T_{i+1}$  并不一定成立,但我们认为这种误差比较小,因为

- (1)  $T_{i-1}, T_{i+1}$  只是虚拟的延拓点,并非真正的质体在该点的位。
- (2) 当格网划分很细时,高差  $\Delta h$  并不会很大。
- (3) 此种误差可视为随机误差,采用最小二乘法能削弱其影响。

将(7)、(8)两式代入(4a)式,我们有:

$$\begin{aligned} & \frac{T_{i+1,j} + \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{i+1,j} (h_{ij} - h_{i+1,j}) - 2T_{ij} + T_{i-1,j} + \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{i-1,j} (h_{ij} - h_{i-1,j})}{\Delta x^2} \\ & + \frac{T_{i,j+1} + \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{i,j+1} (h_{ij} - h_{i,j+1}) - 2T_{ij} + T_{i,j-1} + \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{i,j-1} (h_{ij} - h_{i,j-1})}{\Delta y^2} = f(x_i, y_j) \end{aligned} \quad (9)$$

整理并移项可得:

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta y^2}\right)T_{ij} &= (T_{i+1,j} + T_{i-1,j})/\Delta x^2 + (T_{i,j+1} + T_{i,j-1})/\Delta y^2 \\ &+ \left[\frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{i+1,j} (h_{ij} - h_{i+1,j}) + \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{i-1,j} (h_{ij} - h_{i-1,j})\right]/\Delta x^2 \\ &+ \left[\frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{i,j+1} (h_{ij} - h_{i,j+1}) + \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{i,j-1} (h_{ij} - h_{i,j-1})\right]/\Delta y^2 - f(x_i, y_j) \end{aligned}$$

考虑到  $\Delta h/\Delta x^2 \ll 1, \Delta h/\Delta y^2 \ll 1$ , 相应的改正量并不会很大,近似用中点的  $\frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{ij}$  代替上式中的各  $\frac{\partial T}{\partial z}$ , 我们有:

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta y^2}\right)T_{ij} &= (T_{i+1,j} + T_{i-1,j})/\Delta x^2 + (T_{i,j+1} + T_{i,j-1})/\Delta y^2 \\ &- \left(\frac{h_{i+1,j} - 2h_{ij} + h_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{h_{i,j+1} - 2h_{ij} + h_{i,j-1}}{\Delta y^2}\right) \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{ij} \\ &- f(x_i, y_i) \end{aligned} \quad (10)$$

如果考虑到  $(i+1, j), (i-1, j), (i, j+1), (i, j-1)$  左右上下对称,这样得出的误差是  $\Delta x, \Delta y$  的二阶小量。

如果  $x$  方向、 $y$  方向格网间距相等 ( $\Delta x = \Delta y = h$ ), 则(10)式变形为:

$$T_{ij} = \frac{1}{4}(T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1}) - \frac{1}{4}(h_{i+1,j} + h_{i-1,j} + h_{i,j+1} + h_{i,j-1} - 4h_{ij}) \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{ij} - f(x_i, y_j) h^2 \quad (11)$$

引入逼近 Laplace 方程五点菱形格式的记法

$$\diamond f = f_{i+1,j} + f_{i-1,j} + f_{i,j+1} + f_{i,j-1}$$

(11)式可进一步简记为:

$$T_{ij} = \frac{1}{4} \diamond T + (h_{ij} - \frac{1}{4} \diamond h) \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{ij} - f(x_i, y_j) h^2 \quad (11a)$$

以上推导的地形面上的差分格式,不宜在地形起伏较大的地区使用,因为重力梯度受局部地形的影响比较大,而本文公式只考虑了球近似,地形起伏较大时将导致较大误差。

## 2 超定边值问题

随着卫星测高、卫星重力梯度技术的出现产生了超定边值问题,全球范围的超定边值问题目前许多学者都进行了讨论(R. Rummel, 1989; E. W. Grafarend and B. Schaffrin, 1986)。本文主要讨论了局部小范围内如何综合利用重力异常、高程异常、垂线偏差等资料来确定高程异常(大地水准面)。

(10)式是内点满足的差分方程,如果在边界上给出相应的  $T$  或  $\frac{\partial T}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial T}{\partial y}$ , 则差分方程可解,使用迭代法可求出各内点相应的  $T$ ,这是一般意义上的差分法。这样做有一个缺陷就是只能利用  $\Delta g$  数据,其它数据例如高程异常、垂线偏差等都无法利用。为了利用上述数据,我们转而考虑如下最小二乘问题。设偏微分方程及边值条件为:

$$\begin{cases} LT = f & (x, y) \in D \\ A_l T = \psi_l & (x_l, y_l) \in D, \quad l = 1, 2, \dots, n \\ B_r T = g_r & (x, y) \in \partial D_r, \quad r = 1, 2, \dots, k \\ \Delta_p T = \varphi_p & p \in D, \quad q \in D \end{cases} \quad (12)$$

式中,  $L, A_l, B_r$  为偏微分算子或单位算子;  $\Delta_p T = T_p - T_q$ ,  $p, q$  为  $D$  内任意两点;  $D$  为求解区域;  $\partial D$  为  $D$  的边界。作混合型泛函

$$J(T) = \iint_D \alpha (LT - f)^2 d\delta + \sum_{l=1}^n \beta_l (A_l T - \psi_l)^2 + \sum_{r=1}^k \gamma_r \int_{\partial D_r} (B_r T - g_r)^2 ds + \sum_p \lambda_p (\Delta_p T - \varphi_p)^2 \quad (13)$$

式中,  $d\sigma$  为积分面元;  $ds$  为边界的弧长微分;  $\alpha, \beta_l, \gamma_r, \lambda_p$  是各观测值的权并使(13)式量纲统一。

(13)式用于求连续型泛函,作基函数  $\psi_i, i=1, 2, \dots, m$  的线性组合

$$T = \sum_{i=1}^m C_i \psi_i \quad (14)$$

代入(13)式,令

$$\frac{\partial J}{\partial C_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (15)$$

即可求出满足  $J(T)$  = 极小的泛函。

本文为方便使用了离散形式的差分法,为此将(13)式变形为

$$J(T) = \sum_i \sum_j a V_{ij}^2 + \sum_{r=1}^n \beta_r V_{r1}^2 + \sum_{r=1}^n \gamma_r V_{r2}^2 + \sum_m \lambda_m V_{2r_m}^2 \quad (16)$$

式中:  $V_{ij}$  为差分点误差;  $V_r$  为  $T$  (高程异常) 型观测值误差;  $V_{r_m}^2$  为  $\frac{\partial T}{\partial n}$  (垂线偏差) 型观测值误差, 视情况取值为  $\frac{\partial T}{\partial x}$  或  $\frac{\partial T}{\partial y}$ ;  $V_{2r}$  为  $\Delta T$  (高程异常差) 型观测值误差;  $\alpha, \beta, \gamma, \lambda_m$  分别为相应观测值的权, 应使 (16) 式量纲一致。原则上,  $\alpha$  可根据  $\Delta g$  的精度和差分格式的精度给定,  $\beta$  可根据高程异常的精度给定,  $\gamma$  可根据垂线偏差的精度给定,  $\lambda_m$  可根据高程异常差的精度给定, 但如何最佳地确定权, 有待进一步研究, 必要时可采用方差分量估计方法。

下文导出了超定边值问题的误差方程, 为方便采用  $x, y$  方向等距格网  $\Delta x = \Delta y = h$ 。

(1) 内点误差方程, 改写 (11a) 为

$$V_{ij} = T_{ij} - \frac{1}{4} \diamond T - (h_{ij} - \frac{1}{4} \diamond h) \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{ij} + f(x_i, y_j) h^2 \quad (17)$$

(2) 边界节点误差方程

a. 对第一边值问题, 可直接写出

$$V_{r1} = T_r - T_0^0 \quad (18)$$

式中带“0”的量表示相应观测值(下同)。

与边界毗邻的点  $P$ , 可采用线性插值近似给出, 如图 3, 令  $\delta = pq$ , 则

$$T_p = \frac{1}{h + \delta} (h T_q + \delta T_r)$$

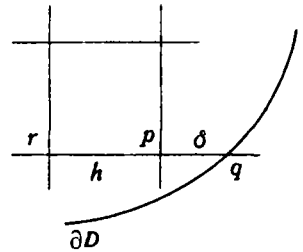


图 3

考虑地形影响

$$T_q = T_q + \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_q (h_r - h_q)$$

$$T_r = T_r + \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_r (h_r - h_r)$$

代入有

$$T_p = \frac{1}{h + \delta} (h T_q + \delta T_r) + \frac{1}{h + \delta} \left[ \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_q (h_r - h_q) h + \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_r (h_r - h_r) \delta \right] \quad (19)$$

考虑误差影响时有

$$V_{r1} = T_p - (h T_q + \delta T_r) / (h + \delta) - \left[ \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_q (h_r - h_q) h + \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_r (h_r - h_r) \delta \right] / (h + \delta) \quad (20)$$

(20) 式赋权时应注意, 此时  $V_{r1}$  是差分点误差方程而不是观测值误差方程。

b. 对第二边值问题  $\partial T / \partial n = \varphi(x, y)$ , 如图 4 设  $H$  为靠近边界的格网点, 由  $H$  向  $\partial D$  作垂线交边界于  $Q$ , 记垂线与  $x$  方向的夹角为  $\alpha$ , 则有

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial n} &= - \frac{\partial T}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial T}{\partial y} \sin \alpha \\ &\approx - \frac{T_0 - T_H}{h} \cos \alpha + \frac{T_H - T_r}{h} \sin \alpha \\ &= (\sin \alpha + \cos \alpha) T_H / h - (T_0 \cos \alpha + T_r \sin \alpha) / h \end{aligned}$$

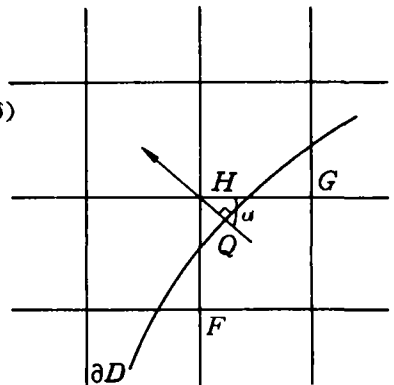


图 4

考虑地形影响

$$T_o = T_o + \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_o (h_H - h_o)$$

$$T_r = T_r + \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_r (h_H - h_r)$$

代入  $\frac{\partial T}{\partial n}$  的表达式且两边同乘  $h$  后可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial n} h &= (\sin\alpha + \cos\alpha)T_H - T_o \cos\alpha - T_r \sin\alpha \\ &\quad - \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_o (h_H - h_o) \cos\alpha - \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_r (h_H - h_r) \sin\alpha \end{aligned} \quad (21)$$

考虑误差影响时

$$\begin{aligned} V_{\frac{\partial T}{\partial n}} &= (\sin\alpha + \cos\alpha)T_H - T_o \cos\alpha - T_r \sin\alpha \\ &\quad - \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_o (h_H - h_o) \cos\alpha - \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_r (h_H - h_r) \sin\alpha - \frac{\partial T^0}{\partial n} \cdot h \end{aligned} \quad (22)$$

(3) 观测误差方程

a. 高程异常观测方程。由  $\zeta = T/\gamma$  可得  $T = \zeta\gamma$  ( $\gamma$  为正常重力)。

由 Green 公式知

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma = \oint_{\partial D} P(x, y) dx + Q(x, y) dy \quad (23)$$

可得：

$$\begin{aligned} \iint_D \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) dx dy &= \iint_D \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] dx dy \\ &= \oint_{\partial D} \frac{\partial T}{\partial x} dy - \frac{\partial T}{\partial y} dx = \oint_{\partial D} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \frac{dx}{ds} - \frac{\partial T}{\partial y} \frac{dy}{ds} \right) ds \\ &= \oint_{\partial D} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial T}{\partial y} \sin\alpha \right) ds = \oint_{\partial D} \frac{\partial T}{\partial n} ds \end{aligned}$$

如图 5 所示，令  $p$  点观测值为  $T_p$ ， $D$  为  $q_1 q_2 q_3 q_4$  所围面积，

$\partial D = q_1 q_2 + q_2 q_3 + q_3 q_4 + q_4 q_1$ ，则

$$\begin{aligned} \int_D \Delta T d\sigma &= \int_{\partial D} \frac{\partial T}{\partial n} ds = \left( \int_{q_1 q_2} + \int_{q_2 q_3} + \int_{q_3 q_4} + \int_{q_4 q_1} \right) \frac{\partial T}{\partial n} ds \\ &\approx \frac{T_{ij} - T_p}{l_1} q_1 q_2 + \frac{T_{i+1,j} - T_p}{l_2} q_2 q_3 + \frac{T_{i+1,j+1} - T_p}{l_3} q_3 q_4 \\ &\quad + \frac{T_{i,j+1} - T_p}{l_4} q_4 q_1 \end{aligned}$$

(法向导数近似代替法向导数)

式中， $l_i$  为  $T_p$  至各顶点距离； $m_i$  为各距离之中点； $q_i$  为过  $m_i$  各垂线之交点。

由 (4a) 又知

$$\iint_D \Delta T d\sigma = \iint_D f(x, y) d\sigma$$

由于四边形  $q_1 q_2 q_3 q_4$  面积  $D$  在差分格网间距较小时，面积很小，近似取

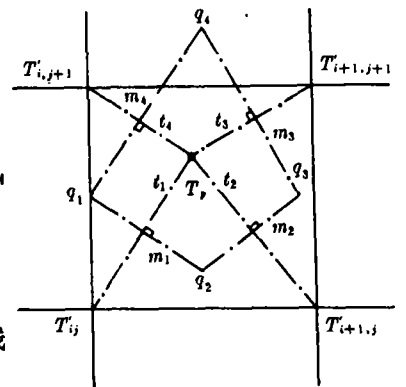


图 5

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = f(x, y) \cdot D$$

因此有

$$(T_{i,j} - T_j) \frac{q_1 q_2}{l_1} + (T_{i-1,j} - T_j) \frac{q_2 q_3}{l_2} + (T_{i+1,j+1} - T_j) \frac{q_3 q_4}{l_3} + (T_{i,j+1} - T_j) \frac{q_1 q_4}{l_4} = f(x, y) \cdot D$$

即

$$T_j = (T_{i,j} q_1 q_2 / l_1 + T_{i-1,j} q_2 q_3 / l_2 + T_{i+1,j+1} q_3 q_4 / l_3 + T_{i,j+1} q_1 q_4 / l_4 - f(x, y) \cdot D) / (q_1 q_2 / l_1 + q_2 q_3 / l_2 + q_3 q_4 / l_3 + q_1 q_4 / l_4) \quad (21)$$

加入地形影响并近似认为  $\frac{\partial T}{\partial z} \Big|_p \approx \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{i,j}$ ,  $i' = i, i+1; j' = j, j+1$ 。(24)式变形为

$$T_j = \{ T_{i,j} q_1 q_2 / l_1 + T_{i+1,j} q_2 q_3 / l_2 + T_{i+1,j+1} q_3 q_4 / l_3 + T_{i,j+1} q_1 q_4 / l_4 - f(x, y) \cdot D + [(h_i - h_{i,j}) q_1 q_2 / l_1 + (h_i - h_{i+1,j}) q_2 q_3 / l_2 + (h_i - h_{i+1,j+1}) q_3 q_4 / l_3 + (h_i - h_{i,j+1}) q_1 q_4 / l_4] \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_p \} / (q_1 q_2 / l_1 + q_2 q_3 / l_2 + q_3 q_4 / l_3 + q_1 q_4 / l_4) \quad (25)$$

考虑误差时可改写为

$$V_T = T_j - T_j^0 \quad (26)$$

$T_j$  可由(25)式代入。

(25)式  $l_i, q_i$  及  $D$  可按解析几何的方法求出(此处从略)。上述推导告诉我们一个很重要的事实,即利用格林公式可列出各种不规则网(如三角网)的差分格式,这一点对大地测量尤其重要,因为我们需要的往往是离散三角点的有关量。

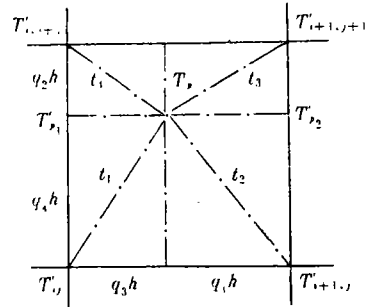


图 6

b. 垂线偏差观测方程。由垂线偏差  $\xi = \frac{\partial T}{\gamma \partial x}$ ,  $\eta = \frac{\partial T}{\gamma \partial y}$  ( $\gamma$  为正常重力)

可得  $\frac{\partial T}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial T}{\partial y}$ 。

如图 6 所示近似有

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_p \approx \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{h} q_2 + \frac{T_{i+1,j+1} - T_{i,j+1}}{h} q_4$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} \Big|_p \approx \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{h} q_1 + \frac{T_{i+1,j+1} - T_{i+1,j}}{h} q_3$$

加入地形影响后可得

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_p = (T_{i+1,j} - T_{i,j}) q_2 / h + (T_{i+1,j+1} - T_{i,j+1}) q_4 / h + [(h_{i,j} - h_{i+1,j}) q_2 / h + (h_{i,j} - h_{i+1,j+1}) q_4 / h] \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_p$$

两边同乘  $h$  后得

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_p h = (T_{i+1,j} - T_{i,j}) q_2 + (T_{i+1,j+1} - T_{i,j+1}) q_4 + [(h_{i,j} - h_{i+1,j}) q_2 + (h_{i,j+1} - h_{i+1,j+1}) q_4] \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_p \quad (27)$$

类似有

$$\frac{\partial T}{\partial y} \Big|_p = (T_{i,j+1} - T_{i,j}) q_1 + (T_{i+1,j+1} - T_{i+1,j}) q_3 + [(h_{i,j} - h_{i,j+1}) q_1 + (h_{i+1,j} - h_{i+1,j+1}) q_3] \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_p \quad (28)$$

考虑误差影响时,误差方程可写为

$$V_{\frac{\pi}{\partial x}}|_p = \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_h - \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_h^0 \quad (29)$$

$$V_{\frac{\pi}{\partial y}}|_p = \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_h - \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_h^0 \quad (30)$$

c. 高程异常差观测方程,由  $\zeta = T/\gamma$  可得  $\Delta T = \gamma \Delta \zeta$ , 变换(25)式下标为  $p, q$ , 相减得

$$\Delta T_{pq} = T_p - T_q \quad (31)$$

考虑误差时有

$$V_{pq} = T_p - T_q - \Delta T_{pq}^0 \quad (32)$$

式中  $T_p, T_q$  可由(25)式代入。

上面导出的各类观测方程,均写出了其条件方程和误差方程,如果观测值较少或精度非常高时(如 GPS+水准观测)可采用条件方程作为强制条件加入以加强控制。

列出上述误差方程后,可按通常的最小二乘法组成法方程,因为这一过程对大家都比较熟悉,此处略。

边界可用精度比较高的 GPS 基线作为控制,在沿海地区边界可按 GPS 基线、卫星测高资料作为控制,由于是“超定的”,只要域内有一定观测值控制,边界值并不一定要很精确,这一点与一般的差分法不同。

法方程的解算由于所得方程是一高阶稀疏带状方程组,使用直接法并不经济和方便,一般多使用迭代法。

严格讨论有关误差是比较困难的,我们只指出(E. Pearson, 1974; 复旦大学, 1979)证明了上述差分格式是稳定和收敛的,即在求解过程中有关误差至少不会被放大,同时当格网间距  $h \rightarrow 0$  时,差分收敛于真解。

### 3 结 论

综上所述作者认为:

(1) 超定边值问题由于产生了多余观测量,为最大限度地利用各类数据,解空间必然要在最小二乘意义下才能实现,使用最小二乘准则是不可避免的,为此本文建立的泛函

$$J(T) = \iint_D \alpha(LT - f)^2 d\sigma + \sum_{i=1}^k \beta_i (A_i T - \varphi_i)^2 \\ + \sum_{r=1}^l \gamma_r \int_{\partial D} (B_r T - g_r)^2 dS + \sum_{\pi} \lambda_{\pi} (\Delta_{\pi} T - \varphi_{\pi})^2$$

使解能够在最小二乘意义下实现。

(2) 由于地形面极其粗糙和复杂, Laplace 方程只能在一定随机意义下满足,本文建立的泛函可使其在最小二乘意义下满足 Laplace 方程,在高程异常、垂线偏差观测值比较少的情况下,通过

$\iint (LT - f)^2 d\sigma$  至少可在各点列出差分方程,从而为解算提供一个弱基准,另外由于  $L_1(\Delta g) = \frac{\rho^2}{2\pi}$

$\cdot \iint \frac{\Delta g - \Delta g_0}{r^3} d\sigma$  积分核随  $1/r^3$  衰减,只需利用求解区域  $D$  及  $D$  外的少量重力异常资料,从而可能为沿海地区或求解区域以外重力数据较少的地区提供一种确定高程异常(大地水准面)的方法。



最后指出的是以上方法,本文只进行了一定的理论推导,实际效果如何有待更进一步的研究和检验。

### 参 考 文 献

- [1] Moritz H. Advanced Physical Geodesy, H. Wichman Verlag, Karlsruhe, 1980.
- [2] 复旦大学数学系. 数学物理方程. 人民教育出版社, 1979.
- [3] Pearson E. Handbook of Applied Mathematics. Van Nostrand Reinhold Company, 1974. 1058~1101
- [4] Rummel R. Uniquely and Overdetermined Geodetic Boundary Value Problem by Least Squares. Bull. Geod. Vol. 13, 1989. 1~33
- [5] Grafarend E W, Schaffrin B. The Overdetermined Geodetic Boundary Value Problem. Proc. Int. Symp. Figure and Dynamics of the Earth, Moon and Planets, Prague, 1986.
- [6] Zhou Zhongmo, Chao Dingbo. Four Dimensional Model for Integrated. Presented to IUGG XIX General Assembly, Vancouver, 1987.
- [7] Chao Dingbo, Bian Shaofeng. Difference Method for the Determination of Disturbing Potential. Bollettino di Geodesia e Scienze Affini, No. 4, 1990.

## Difference Method for the Overdetermined Boundary Value Problem

*Chao Dingbo     Bian Shaofeng*

### Abstract

There are more and more data available to physical geodesy, e. g., gravimetric data, satellite altimetric data, satellite gradiometric data, GPS data and data of the deflection of the vertical. Thus arises the overdetermined boundary value problem. In view of this situation, the authors have made an investigation into the difference method for the overdetermined boundary value problem in this paper.

**【Key words】** overdetermined boundary value problem; partial differential equation; difference method