

几种地形校正方法的研究

张克非

摘 要

本文推证了三种典型的地形校正方法(局部地形改正(C), 剩余地形改正(RTM) 爱黎-海斯卡宁型地形均衡改正(t_c))之间的数学关系, 对其特性进行了分析比较; 讨论了它们实现的途径(数据处理方法)及其计算特征; 最后还应用某地区的实测地形高数据进行了实际计算, 得出了一些有益的结论。

【关键词】 局部地形改正; 剩余地形改正; 地形均衡改正; 地形校正

1 前 言

空间技术的发展及国防建设和经济建设迫切需要我们了解重力场的精细结构(如: 大地水准面的精化、(地形及其均衡)垂线偏差的确定、平均重力异常的求定、空间飞行器的发射及其定位等)。而重力场的精化, 必须顾及大地水准面外部地形质量的影响, 即地形质量的调整问题。到目前为止, 已有许多种地形质量的调整方法, 尽管各种方法的出发点可能不同, 但它们都试图准确地描述地球重力场。本文则对三种典型的地形调整方法进行了比较和研究, 描述了它们各自的特点、计算特性及其实现的途径和相互间的关系。在应用实测数据进行实际计算的基础上, 得到了一些有益的结论和建议。

2 三种地形校正方法及其关系

局部地形改正就是移去计算点平面之外的质量并填补其不足部分, 即现代理论中莫洛金斯级数解里的 G_1 项, 可以用来求定点的高程异常。此项改正对于我国米级大地水准面的求定具有重要意义。

剩余地形改正则是把地形的起伏看作重力场的噪声, 认为在地球表面上有一平滑面, 地形相对于这一平滑面的起伏就是重力场的噪声。在选定某一平滑面后, 通过计算消除此面外

收稿日期: 1989-10-19

* 本文为硕士学位论文的一部分, 指导教师为宁津生教授。

的质量并填补其不足部分，就得到了剩余地形改正值。

爱黎-海斯卡宁型地形均衡改正则是把大地水准面外部质量移去并填补大陆的“根”。均衡深度和莫霍密度差由地壳的地球物理结构决定。一般认为：补偿深度 $D = 24$ 或 32km ，莫霍密度差相应为 $\Delta\rho = -0.6$ 或 -0.4g/cm^3 ，均衡补偿一般是全球性的，至少是区域性。

三种地形校正方法对地壳的调整情况如图1所示：

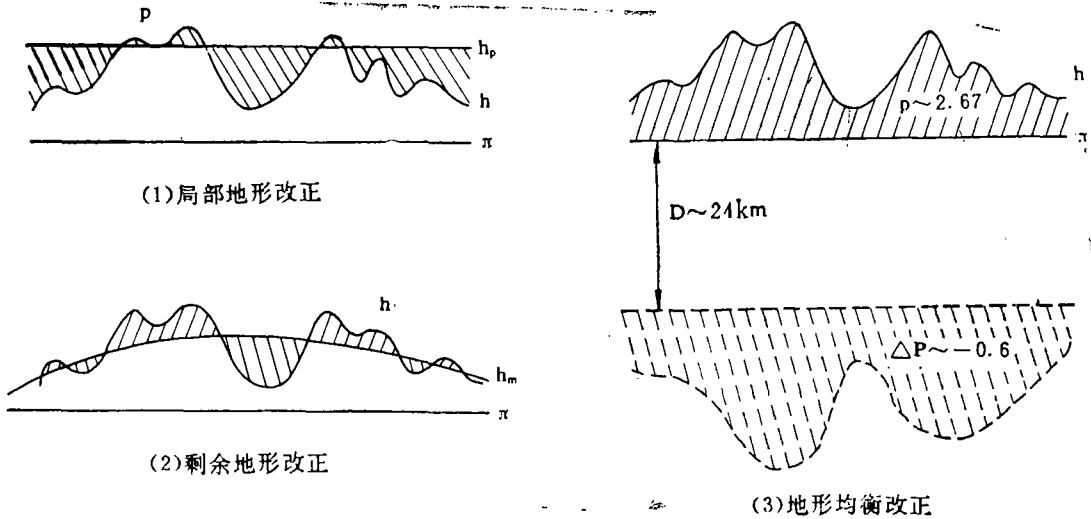


图 1 三种地形校正方法对地壳的调整情况

当剩余地形改正的平均高面 h_m 取：

$$h_m(p) = \frac{D \cdot R^2}{2\pi} \iint \frac{h(Q)}{(r^2 + D^2)^{3/2}} d\sigma \quad r \text{ 为 } P, Q \text{ 两点间距离}$$

时剩余地形改正与均衡深度为 D 的爱黎-海斯卡宁型地形均衡改正等价(近似)，证明如下：

设地形均衡改正的补偿深度为 D (见图2)，由于 $D \ll H$ ，因此补偿质量对大地水准面上某一点 P_0 的引力可以近似地看成由球半径为 $R-D$ 、面密度为 $-\rho h$ 的球层产生的影响，补偿质量在 P_0 点的引力位 V_c 和引力 A_c 为：

$$V_c = G\rho \iiint \frac{1}{l_c} dv$$

$$A_c = -\frac{\partial V_c}{\partial r_{P_0}} = -G\rho \iiint \frac{r^2 - r_{P_0}^2}{2r_{P_0} l_c^3} dv + G\rho \iiint \frac{1}{2r_{P_0} l_c} dv$$

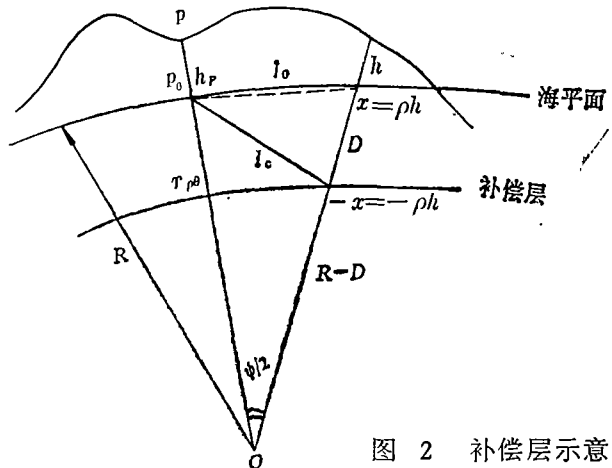


图 2 补偿层示意图

其中, G 为引力常数, ρ 为柱体的密度, 其它相关符号见图 2 所示。

取近似: $r_{p_0} = R, r - r_{p_0} = -D, r_{p_0} + r = 2R$, 同时顾及 $dv = R^1 d\sigma dz$ 有:

$$A_c = -G\rho R^2 D \iint_{\sigma} \frac{h}{l_c^3} d\sigma + \frac{1}{2R} v_c \quad (1)$$

根据文献[3], 地形改正为

$$A_t = 2\pi G\rho h_p - C + \frac{1}{2R} v_t \quad (2)$$

其中, $C = 1/2G\rho R^2 \iint_{\sigma} \frac{(h - h_p)^2}{l_0^3} d\sigma$ 为局部地形改正, $l_0 = 2R \sin \psi / 2$, 带脚标 t, c, t_c 的量分

别表示与地形、均衡补偿、地形均衡补偿相关的量。

(2) 式减去 (1) 式得地形均衡改正, 为

$$\begin{aligned} \Delta g_{t_c} &= A_t - A_c \\ &= 2\pi G\rho \left(h_p - \frac{R^2 D}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{h}{l_c^3} d\sigma \right) - C + \frac{1}{2R} (v_t - v_c) \end{aligned}$$

由于 $\frac{1}{2R} (v_t - v_c)$ 一般很小 ($< 1 \text{ mgal}$), 所以忽略不计。

$$\Delta g_{t_c} \approx 2\pi G\rho \left(h_p - \frac{R^2 D}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{h}{l_c^3} d\sigma \right) - C \quad (3)$$

而剩余地形改正 Δg_{RTM} 与局部地形改正 C 的关系为^[3]:

$$\Delta g_{\text{RTM}} = 2\pi G\rho (h_p - h_m) - C \quad (4)$$

h_m 为平均高。比较 (3) 和 (4) 式且取:

$$h_m = \frac{R^2 D}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{h}{l_c^3} d\sigma$$

时剩余地形改正与地形均衡改正等价 (近似), 即

$$\Delta g_{t_c} = \Delta g_{\text{RTM}} \quad (5)$$

3 柱体积分原理

三种地形校正的计算都采用离散积分方法, 积分的单元块就是单元柱体。现推导单元柱体的积分公式如下:

如图 3, 设计算点 $p_0(x_0, y_0, z_0)$ 和单元柱体位于图 3 所示的坐标系中, 柱体在 p_0 点产生的引力 F 为:

$$F = \begin{pmatrix} F_u \\ F_v \\ F_w \end{pmatrix} = G\rho \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \arctg \left(\begin{pmatrix} vw/u \\ uw/v \\ uv/w \end{pmatrix} \bar{W}^{-1} \right) - \begin{pmatrix} v \\ w \\ u \end{pmatrix} \ln \left(\begin{pmatrix} w \\ u \\ v \end{pmatrix} + \bar{W} \right)$$

$$- \int_{u,v,w} \left[\begin{matrix} w \\ u \\ v \end{matrix} \right] \ln \left(\begin{matrix} v \\ w \\ u \end{matrix} + \bar{W} \right) \Bigg|_{uvw} \quad (6)$$

其中, $\int_{u,v,w}$ 表示积分变量为 u, v, w 的三重积分, 代入积分上下限后就得到积分结果。此外,

$$\bar{W} = (u^2 + v^2 + w^2)^{\frac{1}{2}}, \quad u = x - x_0, \\ v = y - y_0, \quad w = z - z_0.$$

如果 P_0 与 O 点重合, 即选 P_0 点为坐标原点, 则引力 F_z 为:

$$F_z = -G\rho \left[x \ln(y+r) + y \ln(x+r) \right. \\ \left. - z \operatorname{arctg} \frac{xy}{zr} \right] \Bigg|_{xyz} \quad (7)$$

位引力 T 为:

$$T = \sum_{i,j,k=1}^2 (-1)^{(i+j+k)} T_{ijk}$$

$$T_{ijk} = G\rho [xy \ln(z+r) + xz \ln(y+r) + yz \ln(x+r) \\ - \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{yz}{xr} \right) - \frac{y^2}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{xz}{yr} \right) - \frac{z^2}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{xy}{zr} \right)] \quad (8)$$

把(8)式展开为Macmillan级数形式为:

$$T = G\rho \Delta x \Delta y \Delta z \left\{ \frac{1}{r} + \frac{1}{25r^5} [(2\Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2)x^2 \right. \\ \left. + (-\Delta x^2 + 2\Delta y^2)y^2 + (-\Delta x^2 - y^2 + 2\Delta z^2)z^3] + \dots \right\} \quad (9)$$

$$F_z = G\rho(z_2 - z_1) [x \ln(y+r_m) + y \ln(x+r_m) \\ - z_m \operatorname{arctg} \frac{xy}{z_m r_m}] \Bigg|_{xy} \quad (10)$$

(10) 式就是把柱体看成为质平面时的单元柱体引力, $z_m = (z_1 + z_2)/2$, $r_m^2 = x^2 + y^2 + z_m^2$ 。

当把柱体单元看成质点时的近似公式为:

$$T = G\rho \Delta x \Delta y \Delta z / r \quad (10)$$

$$F_z = -G\rho z \Delta x \Delta y \Delta z / r^{3/2} \quad (12)$$

当取单元柱体的底面为 $1 \text{ km} \times 1 \text{ km}$ 的正方形时级数公式(8)、(9)式和点质量公式(11)、(12)式的百分比近似误差曲线如图4(为 r, h 的函数)。根据它可估计计算精度或选计算模型(公式)。

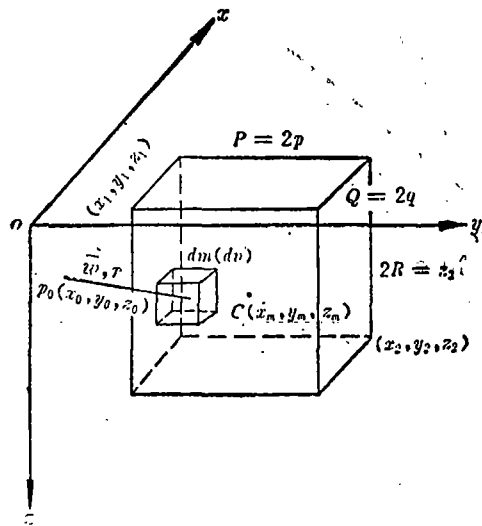


图 3 单元柱体示意图

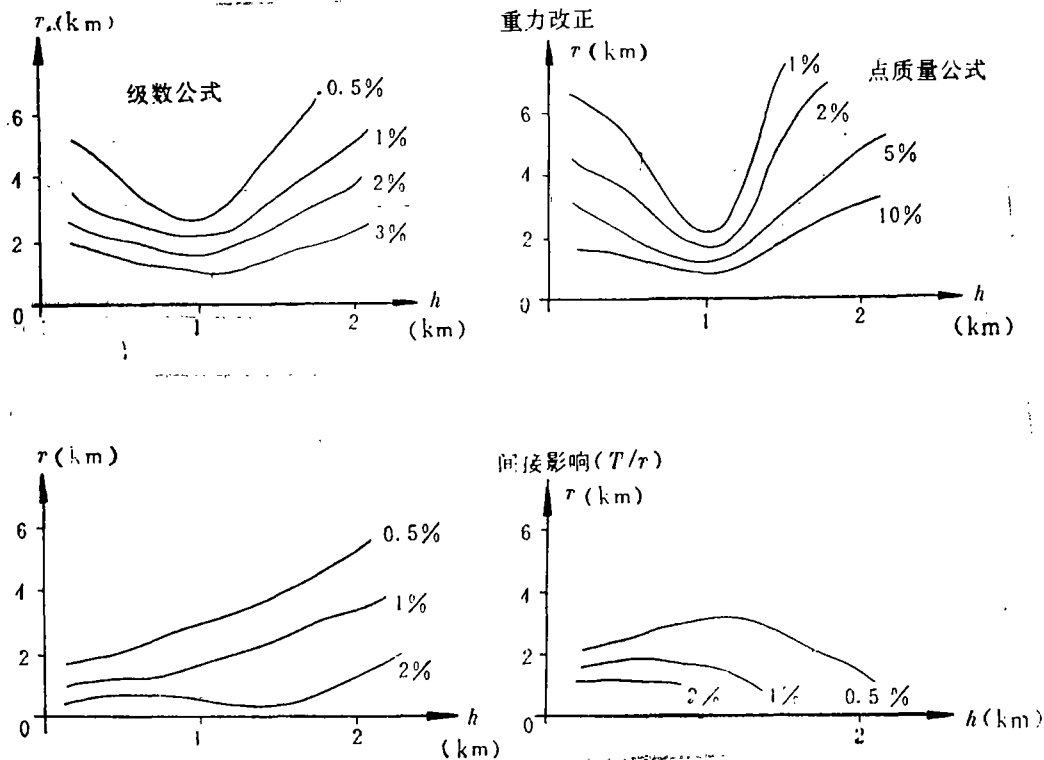


图4 单位柱体底面时 (1km × 1km) 级数公式和点质量公式百分比误差曲线

4 三种地形校正的实际计算

为了研究三种方法各自的特点。计算特性和实现的途径(以及进一步研究重力场的精化, 见文[2], 笔者利用某地区的实测地形高数据进行了实际计算, 使用的地形高数据如下:

——内区 $1.5^{\circ} \times 1.5^{\circ}$ 范围内的 32 400 个 $0.5' \times 0.5'$ 平均地形高数据。

——外区 $8^{\circ} \times 8^{\circ}$ 范围内的 9 216 个 $5' \times 5'$ 平均地形高数据。

地形位于某盆地的边缘, 地形高最大值为 5 023m, 最小值为 2 670m, 地形高的标准离差为 $551m^2$ 。

4.1 柱体积分的处理

在柱体积分计算中, 关键是如何提高计算速度和处理中央区域的奇异积分两个问题。

(1) 计算时把(7)及(8)式进行分项简化。如(7)式第一项 $x \ln(y+r) \parallel_{x,z}$ 的三重积分值需 8 次对数计算, 现简化为:

$$\sum_{i=1}^3 x_i \ln \left\{ \frac{[(y_2 + r(x_i, y_2, z_2))(y_1 + r(x_i, y_1, z_1))]}{[(y_2 + r(x_i, y_2, z_1))(y_1 + r(x_i, y_1, z_2))]} \right\}$$

其中, $r(x_i, y_j, z_k) = (x_i^2 + y_j^2 + z_k^2)^{1/2}$ 使得原来的 8 次对数计算变为二次对数计算, 运算速度可提高近 4 倍, 其它类似项可同样处理。

另外，根据流动点至计算点之间的距离 r 选择计算公式。当 $r \leq 20\text{km}$ 时，采用精确公式；当 $20\text{km} < r \leq 50\text{km}$ 时采用级数公式；当 $r \geq 50\text{km}$ 时，则采用点质量公式。估计这样做的近似误差不超过0.5%（见图4）。因而大大地提高了运算速度。

(2) 由于在计算点附近（称为中央区域）积分核陡峭，地形影响较大，并且当流动点接近于计算点时积分奇异。计算点附近地形影响情况见表1：

表1 半径为 r 的环内地形均衡改正情况（单位：mgal）

点号 \ r	200 m	500 m	1000 m	5000 m	1000 km
1	10.6	19.8	41.3	79.7	174.9
2	9.7	16.5	38.0	65.3	125.5
3	4.9	9.5	29.1	49.3	88.5
4	1.4	2.2	3.0	5.1	12.5

由于计算点附近地形影响甚大，因此需对中央区域地形高数据进行加密处理。计算时将包围计算点的 3×3 个网格做为中央区域，采用如下的双三次样条加密：

$$H_{\rho_{11}, \rho_{22}}^{i,j}(x, y) = \sum_{k=0}^3 \sum_{l=0}^3 a_{kl}^{i,j} (x-x_i)^k (y-y_i)^l$$

$$x_i \leq x \leq x_i + 1; \quad y_i \leq y \leq y_i + 1$$

样条函数加密前后的结果见表2（模拟计算）：

表2 样条加密前后的结果（单位：mgal）

点号	不加密	样条加密	理论值
1	168.7	175.1	175.3
2	119.5	125.6	125.7
3	84.9	88.5	88.5
4	11.8	12.4	12.4

4.2 地球弯曲的影响

一般来说，地形改正及其地形均衡改正绝对值较大，这时远区域的影响较大，地球弯曲影响可多达5~10mgal，因此需加入地球弯曲改正。本文则在 $r > 30\text{km}$ 时加入了此项改正。

4.3 平滑平均高面的选择

剩余地形改正的平均高面以选择高阶次的地形高调和数据分析数据为佳，但由于高阶次的地

形高调和开展数据无法获得，因此在计算时做了如下尝试：应用双线性拟合法对 $5' \times 5'$ 地形高数据进行了平滑，并把平滑后的平滑面做为平均高面，其优点在于：（1）充分体现了局部重力场的短波长特性。（2）由于剩余地形改正对平均高面的选择较敏感（见表3），这样做能克服由于大间隔的地形高数据不准而引起的平滑平均高面大范围内与地形离差较大的不足。（3）使得地形与平均高面的离差较小，远区域的影响亦较小，积分只需计算到离开计算点的较小的距离，从而节省了计算时间。（4）引起的大地水准面变形较小。计算结果表明，最大不超过 0.6m （在试验区）。

5 计算结果

图5为局部地形改正的等值线图，其统计特性为：最大为 28.3mgal ，最小为 0.0mgal ，平均 3.5mgal 。（图5的起伏情况与该地区的地形起伏很相似）。

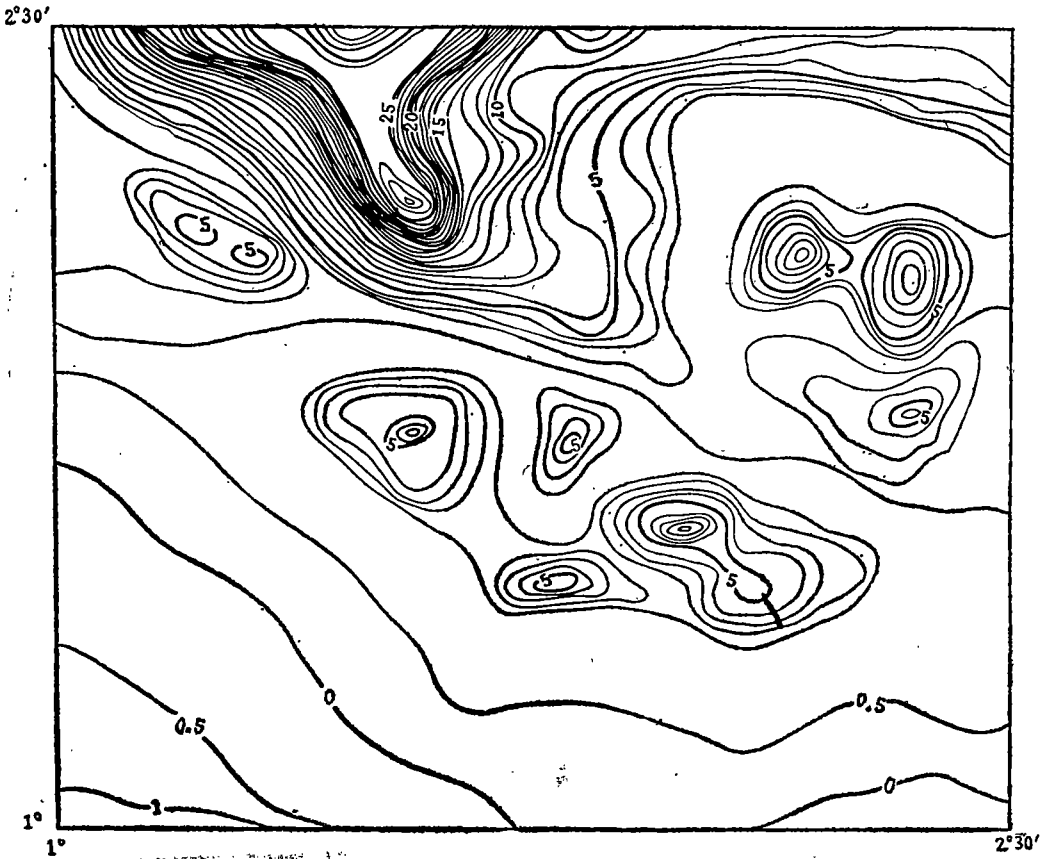


图5 局部地形改正的等值线图(单位：mgal)

剩余地形改正的统计结果列于表3

局部地形改正和剩余地形改正的改正数较小；一般积分只需计算到离开计算点的某一较

表 3 各种平均高面的 RTM 统计结果

平均高面 (双线性拟合)	重力改正 (mgal)				间接影响 (m)				最小半径 (km)
	最大	最小	平均	均方差	最大	最小	平均	均方差	
5' × 5' 网格	89.4	-77.0	4.33	8.67	-0.60	0	0.01	0.05	100
30' × 30' 网格	121.0	-58.8	12.37	15.4	1.45	-1.30	-0.10	0.62	150

小距离即可(表 3 最后一列)。由表 3 知剩余地形改正的结果对平均高面的选择较敏感(见平均值栏)。

地形均衡改正的数值较大,数值积分需计算到离开计算点的较大范围;表 4 列出了地形均衡改正与计算半径的关系(以 4 点为例)。

表 4 地形均衡改正随计算半径的变化关系 (单位: mgal)

点号	r					180km 以外 的影响
	150	180	250	450	1000	
1	109.26	96.66	82.38	68.56	67.93	28.73
2	146.31	134.19	119.83	106.20	105.50	28.69
3	180.08	167.55	158.40	139.73	138.99	28.56
4	172.04	159.98	145.73	132.18	131.40	28.58

根据表 4,地形均衡改正需计算到很大的范围(当 $r > 500\text{km}$ 时才基本上稳定)。但是地形均衡改正的远区域影响表现为长波长特性,变化很平缓,在某一范围内(如在 $1^\circ \times 1^\circ$ 的范围内),180km 以外的影响基本上为一常数(见表 4 最后一列,此常数为 -26.7mgal)。因此在计算地形均衡改正时,可以先构造“地形均衡改正图”(即远区域影响图),地形均衡改正的实际计算只需计算到某一距离即可(如 150km, 180km 等),然后在地形均衡改正图上查取相应改正数。均衡深度为 32km 和 24km 时的地形均衡改正结果的统计特性见表 5。

表 5 各种地形均衡参数的统计结果 (R=180 km)

均衡 参数	地形均衡改正 (mgal)				间接影响 (m)			
	最大	最小	平均	均方差	最大	最小	平均	均方差
$T = 24\text{ km}$ $\Delta\rho = -0.6\text{ g/cm}^3$	168.6	9.8	50.6	34.3	15.15	10.13	12.05	1.45
$T = 32\text{ km}$ $\Delta\rho = -0.4\text{ g/cm}^3$	178.8	16.2	64.9	36.5	17.69	12.12	14.31	1.57

6 结论和建议

- (1) 三种地形校正方法之间有着内在的联系。其计算内区都必须具有较详细的地形高数据,一般在包围计算点的10~50km内应具有较详细的地形高数据,中央区域更应如此。
- (2) 要恰当地处理中央区域的奇异积分,最好采用高次曲面的拟合加密(如双三次样条加密)。地形均衡改正必须顾及地球弯曲的影响,并且在算法上还需改进以提高计算速度。
- (3) 为适应科研和生产需要,最必要求定我国范围内的地形均衡远区域影响图。
- (4) 重力场精化,特别是我国米级大地水准面的求定必须顾及地形质量的影响。

参 考 文 献

- [1] 管泽霖, 宁津生. 地球形状及其外部重力场. 测绘出版社, 1982.
- [2] 张克非. 精确高程异常的确定. 武汉测绘科技大学学报1990(3).
- [3] Rene Forsberg. A Study of Terrain Reduction, Density Anomalies and Geophysical Inversion Methods in Gravity Field Approximation. *Osu. No. 355*, 1984.
- [4] Moritz. On the Use of Terrain Correction in Solving Molodensky's Problem. *Osu., No. 108*, 1968.
- [5] Forsberg, etc. The Use of Height Data in Gravity Field Approximation by Collocation. *J.G.R., 1981*.
- [6] Chugiat Wichiencharoen. The Indirect Effects on the Computation of Geoid Undulations. *Osu., No. 336*, 1982.
- [7] Jekeli C. Reducing the Error of Geoid Undulation Computations by Modifying Stokes Function. *Osu. No. 301*, 1980.
- [8] Wenzel H-G. Least Square Spectral Combination by Optimal Integral Kernels. *IAG. Tokyo, 1982*.

A Study of Some Terrain Reduction Methods

Zhang kefei

Abstract

The paper has evaluated the relationships among three terrain reduction procedures (terrain correction, isostatic reduction, residual terrain reduction (RTM) and given the methods of their data processing. The emphasis has been laid to speed the computation and deal with the singular integration properly. Our major conclusions are as follows:

— To the near zone of the computed point, or the 'innermost zone', the terrain heights have a critical effect on the terrain reduction results, and the discrete int-

(下转第53页)

- [6] Grafarend, E, Heck, B & Knick, E The Free Versus Fixed Geodetic Boundary Value Problem for Different Combination of Geodetic Observation. Bull. Geod. Vol.59. 1985(1). 11~32
- [7] 管泽霖, 宁津生. 地球形状及其外部重力场. 测绘出版社, 1981.
- [8] 方俊. 重力测量与地球形状学. 科学出版社, 1975.
- [9] 莫里茨. 高等物理大地测量学. 测绘出版社, 1984.
- [10] 海斯卡涅, 莫里茨. 物理大地测量学. 测绘出版社, 1979.
- [11] Pick M, Picha J & Vyskocil. Theory of the Earth's Gravity Field. Elsevier, Amsterdam, 1973.
- [12] Rdoif, Sigl. Introduction to Potential Theory. Abacus Press, 1985.

Various Formulations of Miltibody Space time Geodetic Boundary Value Problem and Their Solutions

Li Zuofa

Abstract

In this paper, various formulation of multibody space-time geodetic boundary value problems are presented, and the solutions to them are derived by taking spherical approximation and neglecting topographic effects. Some discussions are made to these Solutions, which take some known solutions as special cases.

【Key Words】 multibody space-time free boundary value problem; multibody space-time fixed boundary value problem; multibody space-time free-fixed boundary value problem; multibody space-time fixed-free boundary value problem

(上接第62页)

egration need to be done particularly. The (terrain) height data in the innermost zone must be densified to decrease discrete error, the best method is bicubic spline function.

— It is necessary to obtain detailed terrain height data in the innermost zone. (generally speaking, within 10~50km radius is enough).

— It is highly important to consider the speed of computation. If there are many terrain reduction points to be computed and the points are regular arranged, FFT algorithm is effective to save computer time.

【Key Words】 terrain correction; residual terrain model; isostatic reduction; terrain reduction