

地壳垂直形变模型的研究*

刘 权 威

摘 要

本文重点研究了建立整个形变区域的形变速率曲面和形变加速度曲面,同时也研究了求这两种曲面的方法(基于多元逐步回归分析的间接法和直接法),从而使我们对整个形变区域有一个形变的整体概念,也使我们能方便地得出形变区任何一个已知其平面位置的点在任一观测期内的形变量。

【关键词】 动态平差; 速率曲面; 加速度曲面

1 前 言

以点的高程速率建立地壳垂直形变模型的缺点是,经过数据处理以后,只能得出已测点的形变值,而无法求出大量未测点的形变值。

本文的方法是将点的形变与各点的平面坐标联系起来,将点的形变速率与形变加速度表示成平面坐标的函数 $\lambda(x, y)$ 和 $\gamma(x, y)$ 。利用已有的信息,通过数据处理,建立适用于整个测区的 $\lambda(x, y)$ 和 $\gamma(x, y)$ 的具体函数形式,并以其表达整个测区的形变规律。有了 $\lambda(x, y)$ 和 $\gamma(x, y)$,只要已知点的坐标,就可求得它的形变速率及形变加速度。若再考虑时间因子,就可求得形变量。

确定 $\lambda(x, y)$, $\gamma(x, y)$ 函数形式的方法有:

(1) 先按动态平差法求出各已测点的形变速率值 λ_i 及形变加速度值 γ_i ,再按多元逐步回归分析法确定 $\lambda(x, y)$, $\gamma(x, y)$ 的具体形式。即

$$\lambda(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy + a_4x^2 + a_5y^2$$

$$\gamma(x, y) = b_0 + b_1x + b_2y + b_3xy + b_4x^2 + b_5y^2$$

此法称为间接法。

(2) 在观测方程中,直接引入 $\lambda(x, y)$, $\gamma(x, y)$ 的函数,经过整体平差,直接求出待定系数 a_i , b_i ,从而确定形变速率曲面 $\lambda(x, y)$ 和形变加速度曲面 $\gamma(x, y)$,此法称为直

收稿日期:1989-05-19

* 本文是国家自然科学基金资助项目,也是硕士论文的一部分,指导教师是於宗涛教授、于正林副教授。

接法。

2 间接法确定速率曲面

多期复测水准网动态平差法确定已测点的形变速率值，其平差函数模型为：

$$E(L) = B_x X + B_\lambda \lambda \quad (1)$$

式中， X 表示某一中心时刻 T^0 时的水准点高程参数， λ 是水准点高程速率参数。

对于起点为 i ，终点为 j 的第 k 期高差观测值 $h_{ij,k}$ ，其误差方程为：

$$V_{ij,k} = -\hat{x}_i + \hat{x}_j - \Delta t_{ij,k} \hat{\lambda}_i + \Delta t_{ij,k} \hat{\lambda}_j - f_{ij,k} \quad (2)$$

式中 $\Delta t_{ij,k} = t_{ij,k} + T^0$

列出所有观测高差的误差方程，经整体平差后，即可求出每一水准点的垂直形变速率值 $\hat{\lambda}_i$ 。

设任一水准点的平面位置坐标为 (x, y) ，其高程运动速率 λ 与之对应，即有：

$$\lambda = \lambda(x, y) \quad (3)$$

为了计算上的方便，将(3)式在点 $(0, 0)$ 处用泰勒公式展开，取至二次项得：

$$\lambda(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy + a_4 x^2 + a_5 y^2 \quad (4)$$

由已测点的平面坐标 (x, y) 和其速率平差值 $\hat{\lambda}$ ，求(3)式中各系数 $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ ，这实际上是一个多项式的回归问题。

(3)式中各系数是否都有显著作用，在回归之前是无法知道的。因此本文没有采用一般的多元线性回归法，而是采用了具有逐步检验作用的多元线性逐步回归分析法，从而保证了所选入的各个 a_i 的显著性。

3 直接法确定速率曲面

观测高差法确定速率曲面。

平差函数模型

$$E(L) = B_x X + B_A x_A \quad (5)$$

式中， X 表示中心时刻高程参数， x_A 表示速率曲面系数。令 $\hat{X} = X^0 + \hat{x}$ ，则有：

$$V = B_x \hat{x} + B_A \hat{x}_A - f \quad (6)$$

式中， $-f = B_x X^0 - L$ ， L 为观测高差向量。

设 i, j 水准点在中心时刻 T^0 时的高程参数分别为 X_i, X_j ，速率参数分别为 λ_i, λ_j ，第 k 期中第 ij 测段的观测时间为 t_{ij} 。其观测高差 h_{ij} 的误差方程为

$$V_{ij} = -\hat{x}_i + \hat{x}_j + \Delta t_{ij}(x_j - x_i)a_1 + \Delta t_{ij}(y_j - y_i)a_2 + \Delta t_{ij}(x_j y_i - x_i y_j)a_3 + \Delta t_{ij}(x_j^2 - x_i^2)a_4 + \Delta t_{ij}(y_j^2 - y_i^2)a_5 - f_{ij} \quad (7)$$

式中 $-f_{ij} = -X_i^0 + X_j^0 - h_{ij}$

由(7)式即可组成第 k 期观测高差向量 L_k 的误差方程：

$$V_k = B_{x_k} \hat{x} + B_{A_k} \hat{x}_A - f_k$$

令 $\hat{y}^T = (\hat{x}^T \hat{x}_A^T)$, $B_k = (B_{x_k} \ B_{A_k})$, 则有

$$V_k = B_k \hat{y} - f_k, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (8)$$

由 V_k , 不难得出 m 期复测水准网平差时的总体误差方程:

$$V = B \hat{y} - f \quad (9)$$

由 (9) 式可组成法方程

$$N \hat{y} - f_c = 0 \quad (10)$$

式中: $N = B^T P B$, $f_c = B^T P f$ 。

如采用无起始数据的自由网平差, 则设计矩阵 B 为列不满秩阵, B 亏秩, N 是奇异方阵, 因而 (10) 式有最小范数解:

$$\hat{y} = N^+ f_c = ((GG^T + N)^{-1} - GG^T) f_c \quad (11)$$

附加阵 G 为

$$G^T = \frac{1}{\sqrt{u}} (1 \ 1 \ \dots \ 1) \quad (12)$$

因

$$\hat{y} = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{x}_A \end{pmatrix} = N^+ f_c = N^+ B^T P f$$

所以

$$Q_{\hat{y}} = \begin{pmatrix} Q_{\hat{x}} & Q_{\hat{x} \hat{x}_A} \\ Q_{\hat{x}_A \hat{x}} & Q_{\hat{x}_A} \end{pmatrix} = N^+ N N^+ = N^+ \quad (13)$$

又 $\lambda(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy + a_4 x^2 + a_5 y^2 = a_0 + B_0 \hat{x}_A$

其中, $B_0 = [x \ y \ xy \ x^2 \ y^2]$, 所以

$$Q_{\hat{\lambda}} = B_0 Q_{\hat{x}_A} B_0^T \quad (14)$$

上式即为各点速率值的协因数阵。

单位权方差估值 $\hat{\sigma}_0^2$ 为

$$\hat{\sigma}_0^2 = V^T P V / (n - u - 4) \quad (15)$$

n 是观测高差总个数。

值得注意的是, 在由 (4) 式列出 (7) 式时, $\lambda(x, y)$ 中的常数项 a_0 被抵消了。一般该值应通过验潮资料求得。在无这方面资料的情况下, 应通过别的途径求得。

在 (4) 式中, 如果令 $(x, y) = (0, 0)$, 则可得 $\lambda(0, 0) = a_0$, 也就是说 a_0 表示在平面坐标原点处的速率值。因此, 如果我们能够通过其它一些手段, 如地质、水文、地面施工状况等分析后, 知某点基本保持稳定, 再结合别的一些数据分析法如动态平差结果综合分析后确认该点速率值很小, 我们就可令该点为平面坐标原点, 此时 $a_0 = 0$; 如果我们通过别的一些手段, 知某点速率值为 λ_0 , 且保持恒值, 则也可选此点为平面坐标原点, 而此时 $a_0 = \lambda_0$ 。

4 非线性运动时的垂直形变模型

如果我们综合利用水准点平面位置信息和观测时间信息，且取时间的二次项，则可得到如下的非线性运动垂直形变模型。

水准点 (x, y) 在观测时间 $(t - t_0)$ 内的垂直形变量为：

$$\begin{aligned} \Delta = & (a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy + a_4x^2 + a_5y^2)(t - t_0) \\ & + \frac{1}{2}(b_0 + b_1x + b_2y + b_3xy + b_4x^2 + b_5y^2)(t - t_0)^2 \end{aligned} \quad (16)$$

如果我们从物理意义上去解释上式，其前半部分可理解为由运动速率引起的形变，而后半部分则可理解为由运动加速率引起的形变。相应地

$$\lambda(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy + a_4x^2 + a_5y^2 \quad (17)$$

$$\gamma(x, y) = b_0 + b_1x + b_2y + b_3xy + b_4x^2 + b_5y^2 \quad (18)$$

可分别理解为运动速率曲面和加速率曲面。

下面我们就导出观测高差法确定速率曲面和加速率曲面模型。

该法的误差方程为

$$\begin{aligned} V_{ij} = & -\hat{x}_i + \hat{x}_j + \Delta t_{ij}(x_i - x_j)a_1 + \Delta t_{ij}(y_i - y_j)a_2 \\ & + \Delta t_{ij}(x_i y_j - x_j y_i)a_3 + \Delta t_{ij}(x_i^2 - x_j^2)a_4 + \Delta t_{ij}(y_i^2 - y_j^2)a_5 \\ & + \frac{\Delta t_{ij}^2}{2}(x_i - x_j)b_1 + \frac{\Delta t_{ij}^2}{2}(y_i - y_j)b_2 + \frac{\Delta t_{ij}}{2}(x_i y_j - x_j y_i)b_3 \\ & + \frac{\Delta t_{ij}^2}{2}(x_i^2 - x_j^2)b_4 + \frac{\Delta t_{ij}^2}{2}(y_i^2 - y_j^2)b_5 - f_{ij} \end{aligned} \quad (19)$$

式中， (x_i, y_i) 表示水准点 i 的平面坐标， a_i, b_i 表示水准点 i 的速率曲面系数和加速率曲面系数， h_{ij} 是 ij 测段的观测高差， t_{ij} 是 ij 测段的观测时间， $\Delta t_{ij} = t_{ij} - T^0$ ， T^0 是某中心时刻。

该模型的解算及精度评定从略。

5 参数的统计假设检验

前面各部分中介绍的由各种模型求得的速率曲面及加速率曲面函数中各系数 a_i, b_i 是否作用显著，即其是否能真正用来组成速率曲面和加速率曲面，需经过统计假设检验。

对 $C^T = (a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ b_1 \ b_2 \ b_3 \ b_4 \ b_5)$ 中各系数 C_i 组成统计量 $t = C_i/m_{C_i}$ 。其中 m_{C_i} 为 C_i 的中误差， t 服从 $t(f)$ 分布， f 为平差中多余观测个数。

因此，可用 t 检验，对各系数 C_i 作检验。零假设 $H_0: C_i = 0$
统计量 $t = C_i/m_{C_i}$

当检验结果接受零假设时，则认为该系数无显著作用，将其从(17)或(18)式中剔除，而当检验结果拒绝零假设时，则认为该系数有显著作用。

本文介绍的所有模型都进行了上述检验，从而保证了所求得的速率曲面和加速率曲面的

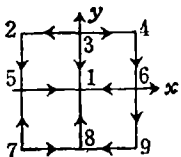
正确性。

6 模拟网实测网试算结果、分析和结论

6.1 模拟网试算

为了验证及试算本文所讨论的各种垂直形变模型,作者用FORTURN语言在西门子-7570-C计算机上对所有模型都编制了通用计算程序。对所有的模型都用模拟网进行了试算,现仅列出用三种“观测高差法确定速率曲面”模型所进行的模拟网计算结果,见表1。

表1 模拟网观测高差法确定速率曲面结果

系数序号 k	速率曲面系数 $C(k)$	速率曲面系数协因素 $Q(c)$	速率点号 No.	计算速率值 V (mm/年)	与理论速率值之差 $V-V_0$	网的基本情况
1	0.418 29	0.046 1	1	0.000 0	0.00	<p>网形</p> 
2	2.987 20	0.046 1	2	4.055 84	0.10	
3	-1.503 60	0.046 1	3	1.347 52	0.00	
4	1.623 00	0.046 1	4	1.885 26	0.09	
5	-1.639 70	0.046 1	5	1.204 74	0.04	
单位权中误差:			6	2.041 32	0.15	
$\hat{\sigma}_0 = \pm 1.008 6\text{mm}$			7	-4.925 70	-0.06	
			8	-4.626 86	-0.04	
			9	-1.081 96	0.16	

按 I 等水准设计模拟复测水准网共 9 期

由表1可知,算得的单位权中误差 $\hat{\sigma}_0 = \pm 1.008 6\text{mm}$ 与理论设计中误差 $\sigma_0 = \pm 1.000 0\text{mm}$ 相符;经 t 检验,各点速率值均拒绝原假设 $\lambda_i = 0$,说明该模型求得的各点速率值作用显著,代表了点的运动;由求得的速率值与理论值相比,相差甚微,最大差值 $\max|\lambda_{计} - \lambda_{理}| = 0.16\text{mm}$,说明该模型正确反映了该模拟网的形变情况。

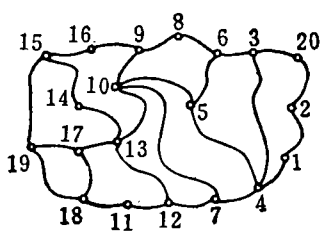
6.2 实测网试算

为了更进一步验证本文提出的各种模型的实用性,本文对某厂区九期观测水准资料进行了分析和计算。

首先,经过对实测地区情况及原始数据的分析,知该地区1981.0~1983.0年的垂直形变情况和1983.5~1985.0年的垂直形变情况很不一致,后四期观测时间中各点垂直形变较前五期观测时间中各点垂直形变符号相差太大。所以我们难以将这样的九期观测资料在一个模型之下进行整体平差。我们也做过九期整体平差的试算,发现用各种模型计算所得的单位权中误差都较大,这是模型误差所致,这也说明不能将九期观测资料一起平差。

为此，我们将九期观测资料分为两组进行分析，1981.0~1983.0五期观测资料分为第一组，而1983.5~1985.0四期观测资料分为第二组。前一组选点15为平面坐标原点，后一组选点10为平面坐标原点，用间接法及直接法确定速率曲面及加速率曲面的各种模型对这两组观测资料分别进行了计算。经过统计假设检验，加速率曲面参数均被拒绝，说明该厂区垂直形变过程较平缓，无显著加速形变存在，各种模型求得的速率曲面参数也较一致，现仅列出观测高差法确定速率曲面结果于表2和表3。

表2 实测网观测高差法确定速率曲面结果 (1981.0~1983.0)

系数序号 k	速率曲面系数 $C(k)$	速率曲面系数协因素 $Q(c)$	速率点号 No.	计算速率值 V (mm/年)	网的基本情况
1	-0.204 99	0.007 56	1	-0.221 836	<p>网形</p>  <p>观测时间: 1981.0, 1981.5, 1982.0, 1982.5, 1983.0.</p> <p>观测等级: I等</p> <p>水准线长: 28km</p> <p>观测场距: 1.8km</p> <p>复测期数: 5期</p>
2	-3.229 30	2.143 30	2	0.407 127	
3	0.000 00	0.000 00	3	2.001 590	
4	0.053 97	0.043 38	4	-0.907 408	
5	1.073 50	0.679 33	5	-0.967 467	
			6	-0.153 041	
			7	-1.692 370	
			8	0.138 776	
			9	-1.805 030	
			10	-1.782 950	
			11	-2.340 980	
			12	-2.407 280	
			13	-2.241 940	
			14	-0.825 830	
			15	0.000 00	
			16	-0.945 410	
			17	2.836 220	
			18	6.431 010	
			19	3.927 270	
			20	-1.672 070	

单位权中误差:

$$\hat{\sigma}_0 = \pm 1.244 0 \text{mm}$$

表 3 实测网观测高差法确定速率曲面结果 (1983.5~1985.0)

系 数 序 号 k	速 率 曲 面 系 数 C(k)	速 率 曲 面 系 数 协 因 数 Q(c)	速 率 点 号 No.	计 算 速 率 值 V(mm/年)	网 的 基 本 情 况
1	0.000 00	0.000 00	1	2.103 080	网 形 同 表 1 观测时间: 1983.5, 1984.0, 1984.5, 1985.0. 观测等级: I 等 水准路线长: 28km 观测场距: 1.8km 复测期数: 4 期
2	-0.544 48	0.254 90	2	2.467 420	
3	-0.668 13	0.342 56	3	4.739 350	
4	0.180 40	0.181 84	4	0.956 687	
5	1.433 63	0.825 50	5	1.671 560	
			6	2.642 420	
			7	0.411 729	
			8	5.160 640	
			9	2.331 720	
			10	0.000 00	
			11	9.076 240	
			12	8.050 990	
			13	6.211 000	
			14	4.632 550	
			15	4.549 90	
			16	2.455 450	
			17	6.106 270	
			18	8.999 930	
			19	7.483 460	
			20	3.233 750	

单位权中误差

$$= \pm 1.357 0\text{mm}$$

由表 2 和表 3, 可得某厂区的速率曲面为:

1981.0~1983.0年 (取点15为平面坐标原点):

$$\lambda(x, y) = -0.204 99x - 3.229 31y - 0.053 971x^2 + 1.073 46y^2$$

1983.5~1985.0年 (取点10为平面坐标原点):

$$\lambda(x, y) = -0.544 7y - 0.668 813xy + 0.186 403x^2 + 1.431 63y^2$$

通过分析表 2 和表 3 及该两速率曲面函数, 可知, 该厂区由 1981.0~1983.0 年基本上处于一种垂直下沉过程, 每年最大下沉 2.4mm, 平均下沉 1.5mm, 但靠东面的一带则处于上升过程, 平均上升 4mm。而该厂区从 1983.5~1985.0 年则基本上处于一种上升过程, 平均每年 4mm。究其原因, 1983 年以后, 该厂区的大型施工建筑已基本停止, 地面不再加载, 地面处于一种上升回弹过程。

6.3 分析及结论

由理论分析和计算结果可以得出以下几点结论:

(1) 本文介绍的研究地壳垂直运动模型与一般的地壳垂直运动模型相比, 具有在空间上连续的特点, 具有整体性, 因而在空间上可进行内插和外推。

(2) 随着计算机计算能力的提高, 以及程序的优化, 在决定采用哪一种模型时, 可采用试算法, 利用试算结果结合统计资料进行分析, 得出的结论会更可靠。

(3) 如果在长时间的观测周期中, 前后周期地质及施工情况等的变化、形变规律很不一致, 则不易将这样的观测值组在一起进行整体平差。

(4) 如何结合验潮资料求速率曲面及加速率曲面常数项 a_0 及 b_0 的问题, 有待于以后进一步研究。

参 考 文 献

- [1] 於宗俦等. 全国复测水准网的动态平差. 武汉测绘学院学报, 1980(1).
- [2] 于正林. 多期复测水准网的动态平差. 武汉测绘学院学报, 1981(2).
- [3] Pelzer H and Niemeier W. Precise Levelling. Dümmler, Bonn, march 16~18, 1983.
- [4] 陶本藻. 自由网平差与变形分析. 测绘出版社, 1984. 7.
- [5] Hardy R L. Research Results in the Application of Multiquadric Equations to Surveying and Mapping Problems. Surveying and Mapping, December, Vol. XXX, 1975 (4): 321~331

Studies on the Models of Vertical Crustal Movements

Liu Quanwei

Abstract

This paper chiefly discusses the establishment of the velocity surface and the acceleration surface of the whole deformation area. At the same time, it also discusses models with which to get these two surfaces. These models include the indirect model based on the multiple successive regression and the direct model.

With these models, we gain a panoramic view of the whole deformation area in evaluating deformation. It also become convenient to get the deformation of any point within the deformation area during any surveying period, as long as the plane coordinates of the point are known.

[Key words] dynamic adjustment, velocity surface, acceleration surface