

陀螺经纬仪时间观测数据* 函数模型的研究

李 清 泉

摘 要

本文运用最小二乘谱分析的原理,对陀螺经纬仪时间观测数据进行分析,提出了一种较以前采用的函数模型更为简便、实用的函数模型,并利用实测数据分析了测时定向方法的精度。

【关键词】 最小二乘谱分析

1 引 言

目前,陀螺经纬仪的观测方法,已由跟踪状态下的观测方法发展到固定照准部状态下的观测方法,其中人们研究较多的是多点测时法^[1,5]。这种方法的一个显著特点是它可以在较短时间内取得大量的观测数据,从而获得精度及可靠程度均好的成果。

如图1所示,多点测时法的实质是在陀螺的摆动过程中观测光标

通过分划板上不同刻划线 α_i 的时间 t_i ,它在一个摆动周期可以观测到十几至几十个数据,相比之下中天法只有三个观测值,时差法只有六个观测值,特别是随着计算机及自动观测陀螺经纬仪的广泛应用,使这种定向方法在高精度陀螺定向观测中的应用成为可能。

对于多点测时法,通常时间观测值的函数模型是以陀螺运动方程(1)式出发推导出来。

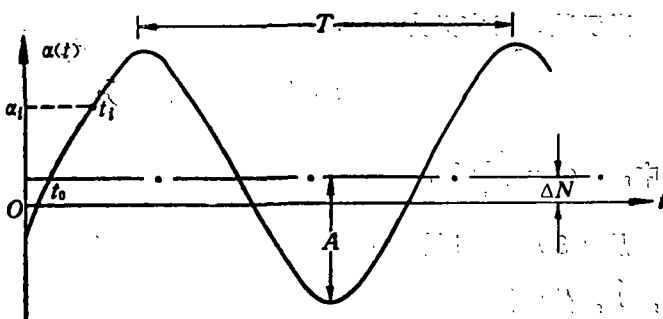


图 1

收稿日期: 1989-09-20

*本文是在李裕忠导师指导下完成的硕士论文的一部分。

模型一:

$$\alpha(t) = \Delta N' + A \sin\left[\frac{2\pi}{T}(t - t_0)\right] \exp(-k(t - t_0)) \quad (1)$$

式中, $\Delta N' = N_m - N'$; N_m 为北方向值; N' 为近似北方向值; t_0 为初始观测时间; A 为摆幅; T 为摆动周期; K 为衰减系数。

(1) 式是一个理论公式, 实际工作中使用的陀螺经纬仪由于材料、加工、机械结构及运动过程中受多种干扰等方面的原因, (1) 式并不能很好地描述陀螺经纬仪的运动状态。而且在用计算机进行自动处理时, (1) 式也显得不方便。因此有必要对时间观测数据处理的函数模型进行讨论, 以选择与观测值相适应的函数模型, 本文利用最小二乘谱分析的方法进行研究。

2 最小二乘谱分析原理

最小二乘谱分析是利用从最小二乘拟合的残差中获得方差因子的函数作为功率谱函数, 代替在通常谱分析中的自相关函数的富立叶变换。谱函数的值在 $0 \sim 1$ 之间变化, 通过逐步最小二乘谱分析, 每次一个显著的频率出现在频谱中, 再在考虑此频率分量的最小二乘拟合残差中进行最小二乘谱分析。由此可见, 最小二乘谱分析不仅对原始信号进行谱分析, 而且也对最小二乘拟合的残差进行谱分析。

最小二乘谱分析的数学模型如下:

$$\hat{\beta} + \hat{A} \cos \omega t_i + \hat{B} \sin \omega t_i - \alpha_i = V_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

式中, $\hat{\beta}$, \hat{A} , \hat{B} 为通过最小二乘估计的参数; α_i 为进行谱分析的信号; V_i 为 α_i 相对应的残差; n 为信号的个数。

谱函数 $S(\omega)$ 定义为:

$$S(\omega) = 1 - \left(\sum_{i=1}^n V_i^2 \right) / \sigma^2 \quad (3)$$

其中, $\sigma^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2$ 。

从 (3) 式可以看出: 谱函数 $S(\omega)$ 在 $0 \sim 1$ 之间变化。对应于每个 ω 值, 估计出 $\hat{\beta}$, \hat{A} , \hat{B} , 然后得到 $S(\omega)$, 由 $S(\omega)$ 的值画出功率谱曲线, 从中得出一个主要频率分量 ω 。

由 (2) 式可得法方程为:

$$\begin{pmatrix} n & P & Q \\ P & V & R \\ Q & R & W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\beta} \\ \hat{A} \\ \hat{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ D \\ G \end{pmatrix} \quad (4)$$

其中, $P = \sum_{i=1}^n \cos \omega t_i$; $Q = \sum_{i=1}^n \sin \omega t_i$; $R = \sum_{i=1}^n \cos \omega t_i \sin \omega t_i$;
 $V = \sum_{i=1}^n \cos^2 \omega t_i$; $W = \sum_{i=1}^n \sin^2 \omega t_i$; $E = \sum_{i=1}^n \alpha_i$

$$D = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cos \omega t_i; \quad G = \sum_{i=1}^n \alpha_i \sin \omega t_i$$

在实际分析过程中, 还必须进行残差 $\{V_i\}$ 序列的白噪声检验, 本文是通过 $\{V_i\}$ 的函数 $S(\omega)$ 的检验来实现, 将最小二乘拟合的函数模型写成

$$\underset{n \times m}{A} \underset{m \times 1}{\hat{X}} - \underset{n \times 1}{L} = \underset{n \times 1}{V} \quad (5)$$

由最小二乘拟合的原理可得:

$$\hat{X} = (A^T A)^{-1} A^T L$$

顾及(3)式可得:

$$S(\omega) = 1 - (L - A\hat{X})^T (L - A\hat{X}) / L^T L = L^T A \hat{X} / L^T L \quad (6)$$

容易证明:

$$X_1 = L^T A \hat{X} \sim \chi^2(m)$$

$$X_2 = L^T (L - A \hat{X}) \sim \chi^2(n-m)$$

由 β 分布的定义可得:

$$\frac{X_1}{X_1 + X_2} = \frac{L^T A X}{L^T L} \sim \beta\left(\frac{m}{2}, \frac{n-m}{2}\right)$$

顾及(6)式即得:

$$S(\omega) \sim \beta\left(\frac{m}{2}, \frac{n-m}{2}\right)$$

根据 β 分布与 F 分布的关系(Rao, 1981), 选择一定的显著水平 α , 得到残差为白噪声时 $S(\omega)$ 的临界值:

$$S_{n, \alpha}(\omega) = 1 / \left[1 + \frac{n-m}{m} F_{1-\alpha}(n-m, m) \right] \quad (7)$$

3 数据分析

利用最小二乘谱分析原理, 本文对多组实测数据进行了分析, 具体步骤如下:

(1) 首先对原始信号利用(2)式进行谱分析, 作出功率谱曲线图, 从中找出谱函数 $S(\omega)$ 最大的一点, 相应于这一点的 ω 值即为原始信号的主频率 ω_1 , 回顾利用(2)式进行谱分析的过程, 相应于 ω_1 的参数 β_1, A_1, B_1 即为已知。

(2) 利用如下一阶模型对原始信号进行最小二乘拟合。

模型二:

$$\hat{\beta}_1 + \exp \hat{f} t_i (\hat{A}_1 \cos \hat{\omega}_1 t_i + \hat{B}_1 \sin \hat{\omega}_1 t_i) - \alpha_i = V_{1i} \quad (8)$$

式中, $\hat{\beta}_1$ 为摆动平衡位置与零刻划线的夹角; \hat{f}_1 为摆动衰减系数; $\hat{\omega}_1$ 为摆动主频率; \hat{A}_1, \hat{B}_1 分别为正弦和余弦分量的振幅。

将步骤(1)得到的 $\omega_1, \beta_1, A_1, B_1$ 作为参数 $\hat{\omega}_1, \hat{\beta}_1, \hat{A}_1, \hat{B}_1$ 的近似值进行

最小二乘拟合，得到参数的最或是值及残差向量 $\{V_{1,i}\}$ 。

(3) 将 $\{V_{1,i}\}$ 作为信号利用(2)式进行谱分析，作出功率谱曲线图，再利用(7)式进行白噪声检验。如果通过检验，则认为 $\{V_{1,i}\}$ 是白噪声序列，即模型二能够合理描述观测数据的状态，否则，则认为 $\{V_{1,i}\}$ 不是白噪声序列，即 $\{V_{1,i}\}$ 序列中存在显著周期分量，必须对模型二进行修正。

(4) 在白噪声检验不通过的情况下，为了对模型二进行修正。从 $\{V_{1,i}\}$ 的功率谱曲线图上找出谱函数 $S(\omega)$ 最大的一点，相应于这一点的 ω 值即为模型二残差的主频率，即原始信号的第二个频率分量 ω_2 ，从而也可以得到相应于 ω_2 的参数 β_2, A_2, B_2 。

(5) 利用如下二阶模型再次进行最小二乘拟合，求出参数的最或是值及残差向量 $\{V_{2,i}\}$ 。

模型三：

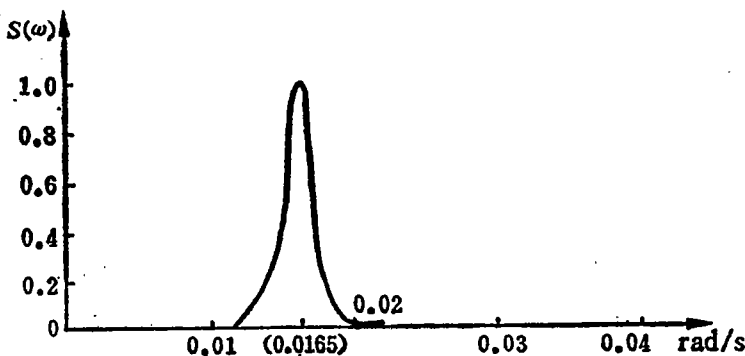
$$\begin{aligned} & \hat{\beta} + \exp \hat{f} t_i (\hat{A}_1 \cos \hat{\omega}_1 t_i + \hat{B}_1 \sin \hat{\omega}_1 t_i) \\ & + \hat{A}_2 \cos \hat{\omega}_2 t_i + \hat{B}_2 \sin \hat{\omega}_2 t_i - \alpha_i = V_{2,i} \end{aligned} \quad (9)$$

式中， $\hat{\beta}, \hat{\omega}_1, \hat{A}_1, \hat{B}_1$ 的意义与(8)式中的 $\hat{\beta}_1, \hat{\omega}_1, \hat{A}_1, \hat{B}_1$ 一致， $\hat{\omega}$ 为原始信号的第二个频率分量， \hat{A}_2, \hat{B}_2 为第二个频率分量的振幅。

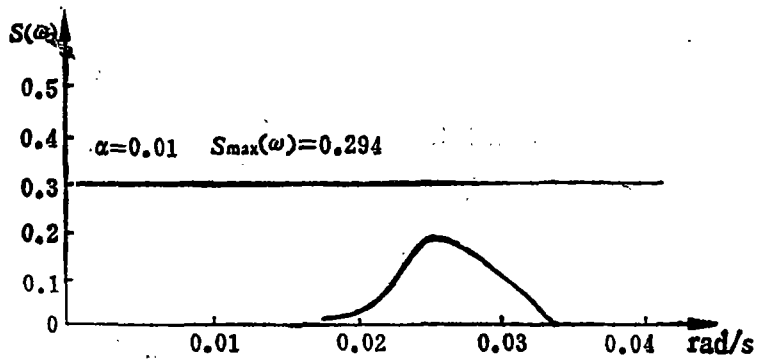
将步骤(2)中得到的参数 $\hat{\omega}_1, \hat{A}_1, \hat{B}_1$ 的或是值作为近似值， $\hat{\beta}$ 的近似值取 $\hat{\beta}_1 + \beta_2$ ，步骤(4)中得到的 A_2, B_2 作为 \hat{A}_2, \hat{B}_2 的近似值。

(6) 重复步骤(3)，(4)逐渐增加最小二乘拟合模型的阶数，直至拟合残差通过白噪声检验。

利用所编程序作者对多组数据进行了分析，本文列出了两组数据的分析结果。第一组数据是GAK-1陀螺仪人工秒表计时观测所得，共47个观测值，第二组数据是文献[2]中使用的自动观测陀螺经纬仪的观测数据，共25个观测值。



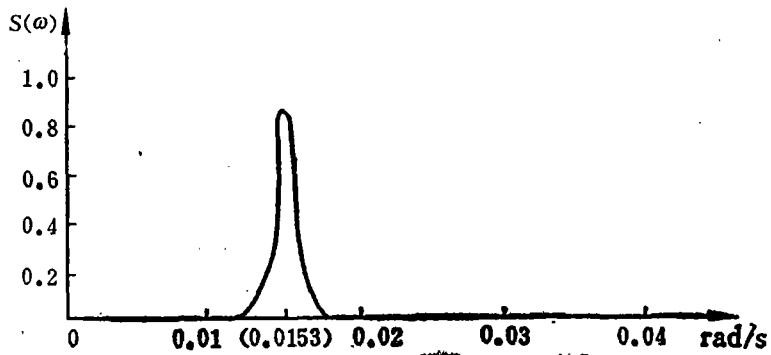
(a) 原始数据功率谱曲线



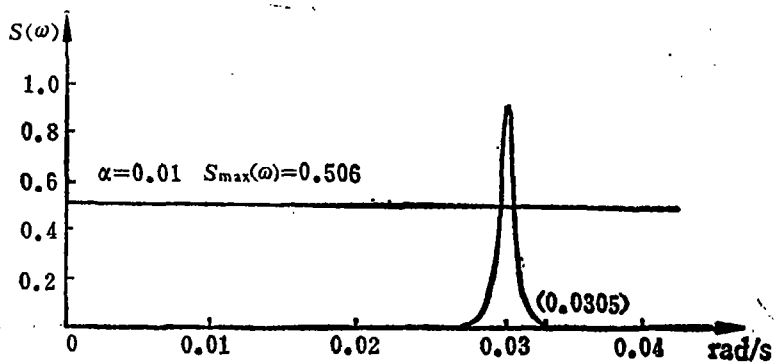
(b) 一阶模型残差功率谱曲线

图2 第一组数据功率谱曲线

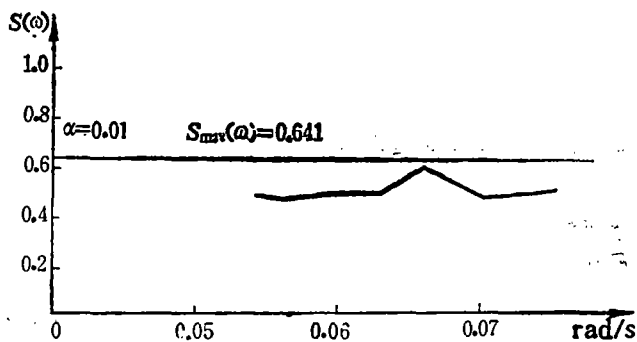
图2是第一组原始数据的功率谱曲线和一阶模型残差的功率谱曲线。图3是第二组原始数据的功率谱曲线和一阶、二阶模型残差的功率谱曲线。图中横线是按(7)式计算的白噪声检验临界值。



(a) 原始数据功率谱曲线



(b) 一阶模型残差功率谱曲线



(c) 二阶模型残差功率谱曲线

图3 第二组数据功率谱曲线

在考查模型拟合程度时，通常通过拟合后残差平方和即 $[V^T V]$ 的大小来比较，但对于各组数据的个数不一时，就无法比较。本文采用拟合中误差来表示模型的拟合程度，即有：

$$M = \sqrt{\frac{[V^T V]}{n - t}} \quad (10)$$

式中， M 为拟合中误差； V 为拟合残差； n 为数据个数； t 为拟合参数个数。

从(10)式可以看出：拟合中误差是模型拟合残差平方和的函数，表1列出了各组数据拟合中误差的大小。

从第一组数据的功率谱曲线图(图2)中可以发现：其一阶模型的残差通过白噪声检验，即对于第一组数据一阶模型已能够较好地描述，这一点从模型拟合中误差也得到证实，表1中第一组数据的一阶和二阶模型的拟合中误差变化很小(7.89"~7.35")。在第二组数据的功率谱曲线图(图3)中，一阶模型的残差不能通过白噪声检验，残差中存在显著性的周期分量，因此有必要考虑二阶模型。在二阶模型残差的功率谱曲线图中可以发现：其通过白噪声检验，即对于第二组数据二阶模型已能较好地描述。这一点在表1的模型拟合中误差中也得到证实，在表1中第二组数据一阶和二阶模型的拟合中误差有明显的变化(9.67"~1.97")。

	第一组	第二组
一阶模型	7"89	9"67
二阶模型	7"36	1"97

在分析误差来源时，一种方法是分别考虑多种误差的单独影响，然后运用一定的方法将多种独立影响综合起来作为多种误差对观测数据的总影响，另一种方法是对各种误差的影响不加区分，直接考虑它们在观测数据中的综合影响。对于模型三中的 $(A_2 \cos \omega_2 t_i + B_2 \sin \omega_2 \times t_i)$ 一项可以看作是仪器本身存在的多种干扰误差在观测数据中的综合反映。由于第二组数据是自动观测结果，计时精度高，观测误差较小，干扰误差的影响得到充分表现，而第一组数据是人工秒表计时，观测误差较大，它已掩盖了可能存在的干扰误差的对观测数据的影响。

为了对三个模型进行比较，作者分别用三个模型对两组数据进行平差处理，其中第一组数据是GAK-1陀螺仪秒表计时观测所得，第二组数据是文献[2]用到的自动观测陀螺仪的观测数据，结果列于表2、表3。

表 2

序 号	改 正 数		
	模 型 一	模 型 二	模 型 三
1	-4.896	-4.895	-5.920
2	-7.349	-7.350	-3.764
3	-13.429	-13.431	-13.733
4	16.510	16.510	14.209
5	-14.446	-14.446	-15.379
6	-8.582	-8.581	-4.568
7	-1.532	-1.533	-3.551
8	0.298	0.299	-0.363
9	4.323	4.320	7.513
10	-10.642	-10.638	-11.250
11	10.879	10.880	8.597
12	7.643	7.649	7.656
13	-1.105	-1.109	1.916
14	9.137	9.131	6.437
15	5.487	5.487	5.255
16	4.253	4.258	7.031
17	-1.125	-1.119	-1.986
18	-1.785	-1.778	-3.929
19	7.604	7.609	8.581
20	-4.680	-4.688	-2.712
21	9.732	9.726	6.468
22	-6.867	-6.871	-6.593
23	4.926	4.931	7.253
24	-6.027	-6.020	-7.041
25	1.672	1.667	-0.229
中 误 差	8".79	8".79	9".19

从表 2、表 3 中不难发现，模型一与模型二的平差精度完全相同，且改正数也基本一致，可以认为这两个模型是等价的。比较模型一与模型二的数学形式也可以得出相同的结论。在表 2 中，模型三与模型一、模型二相比较，其平差精度没有提高，即对人工秒表计时的观测数据使用模型三而言，其平差精度没有明显改善。在表 3 中，模型三与模型一、模型二相比较，其平差精度有明显提高，即自动计时观测数据使用模型一与模型二存在较大的模型误差。

表 3

序 号	改 正 数		
	模 型 一	模 型 二	模 型 三
1	10.354	10.359	-0.500
2	-6.026	-6.023	0.947
3	-1.204	-1.209	0.098
4	11.576	11.574	0.559
5	-9.990	-9.989	0.939
6	-4.044	-4.037	0.823
7	9.917	9.917	-0.632
8	-6.028	-6.025	2.446
9	-1.728	-1.716	0.730
10	14.111	14.115	2.765
11	-9.414	-9.409	-0.137
12	-1.008	-1.017	3.025
13	7.032	7.020	-3.220
14	-11.447	-11.459	-1.529
15	-5.521	-5.508	-1.937
16	11.041	11.045	-0.631
17	-11.096	-11.081	-3.446
18	-2.882	-2.872	0.385
19	9.408	9.397	-0.537
20	-10.662	-10.672	0.759
21	-6.216	-6.202	-1.490
22	14.092	14.107	2.103
23	-5.902	-5.909	0.051
24	-4.059	-4.050	-1.594
25	9.657	9.646	0.027
中 误 差	9"67	9"67	1"97

本文还利用一组实测数据 (GAK-1 陀螺经纬仪, 人工秒表计时, 13个测回, 约700个观测数据), 分析了多点测时法的定向精度, 结果列于表 4。表 4 中同时列出了相同数据时差法处理结果。不难发现: 多点测时法的定向精度在相同观测时间内较时差法有明显提高。

4 结 论

综合上述分析, 得出如下结论:

表 4

	测 回	多点测时法	时 差 法
测 线 方 位 角	1	83° 21' 32".35	83° 21' 30".9
	2	33.45	28.1
	3	46.57	55.2
	4	43.49	48.7
	5	51.52	38.8
	6	39.83	40.0
	7	38.39	37.5
	8	34.80	32.1
	9	32.28	28.0
	10	36.96	29.6
	11	47.00	44.8
	12	41.49	36.9
	13	39.76	35.7
测线方位角或是值		83° 21' 39".88	83° 21' 37".41
定向精度		±6".00	±8".25

(1) 多点测时法是一种有效的观测方法, 在相同条件下较时差法有明显提高。

(2) 对于人工秒表计时的观测数据, 在处理过程中采用模型一或模型二均能满足要求。没有必要考虑更复杂的函数模型的形式。

(3) 对于观测仪器的观测数据处理, 模型一与模型二存在较大的模型误差。可采用模型三, 它能充分顾及干扰误差的影响, 从而提高定向精度。

本文所得出的时间观测数据的函数模型, 不仅用于多点测时法, 还可用在其它测时定向方法的数据处理中。对于时间观测数据的随机模型问题, 作者将另文进行讨论。

参 考 文 献

- [1] Caspary W F, Schwintzen P A W. 陀螺计时法的扩展. 测绘译丛, 1985(1).
- [2] Judy. Spectral Analysis as Applied to Gyrocompass Transit Times. Bull. Ge'od 56, 1982.
- [3] Halmos F. High Precision Measurement and Evaluation Method for Azimuth Determination with Gyrotheodolites. Manuscripta Geodetic, Vol.2, 1977.213
- [4] Thomas T L. The Six Method of Finding North Using a Suspended Gyroscope. Survey Review, 1982.
- [5] Jeady. Multiple Transit Times and Least Squares for Gyroscopic Azimuth. FIG XV III, 1986, 5c.

Research of Function Model of Gyrocompass Transit Times

Li Qingquan

Abstract

In this paper, spectral analysis by least squares is used to analysis transit time measurements of gyrocompass. A kind of new function model is found, which is more convenient and practical than ones used before. The precision of Multiple Transit Times Mothed is analysed with a group of practical measurements.

【Key words】 spectral analysis by least squares