·DOI:10.13203/j.whugis1990.02.005

第16卷 第2期 武汉测绘科技大学学报 Vol.15 No.2
1990年 6月 Journal of Wuhan Technical University of Surveying and Mapping Jun. 1990

按残差绝对值和最小原理的光束法区域网平差

郑肇葆 谭春健 张润根

摘 要

本文介绍了残差绝对值和最小光束法区域网平差的原理和残差绝对值和最小解的Robust性质。在平差中，引入权以后，可以提高粗差检测的能力。实验结果表明：当区域四角的控制点上有一个点含$7\sigma_0$的粗差时，均能被很好的定位。即使当四个角点均包含粗差时，其平差的精度仍具有很好的稳定性。

【关键词】 线性规划；光束法区域网；粗差

以最小二乘原理进行光束法区域网平差是摄影测量区域网平差的基本方法之一。当观测数据中含有粗差时，光束法区域网平差的最小二乘解不是最优解，因为最小二乘原理对观测值中的粗差有均摊作用。残差绝对值和最小的光束法区域平差结果受观测值中粗差影响较小，甚至没有影响，这种性质称解的Robust性质（即解的坚韧性或稳健性）。

1 残差绝对值和最小的光束法区域网平差的数学模型

共线方程式是这种平差方法的基础：

$$\begin{cases} x = -f\dfrac{a_1(x-x_s)+b_1(y-y_s)+c_1(z-z_s)}{a_3(x-x_s)+b_3(y-y_s)+c_3(z-z_s)} \\ y = -f\dfrac{a_2(x-x_s)+b_2(y-y_s)+c_2(z-z_s)}{a_3(x-x_s)+b_3(y-y_s)+c_3(z-z_s)} \end{cases} \tag{1}$$

相应的误差方程式（对于竖直摄影情况）可以写成：

$$\begin{cases} v_x = -\dfrac{f}{H}\Delta X_s - \dfrac{x}{H}\Delta Z_s - f\left(1+\dfrac{x^2}{f^2}\right)\Delta\varphi - \dfrac{xy}{f}\Delta\omega + y\Delta\kappa - (x-(x)) \\ v_y = -\dfrac{f}{H}\Delta Y_s - \dfrac{y}{H}\Delta Z_s - \dfrac{xy}{f}\Delta\varphi - f\left(1+\dfrac{y^2}{f^2}\right)\Delta\omega - x\Delta\kappa - (y-(y)) \end{cases} \tag{2}$$

收稿日期:1989—06—21

式中(x)，(y)为用方位元素的近似值代入式（1）求得的x，y值；H为平均相对航高。

误差方程式（2）的矩阵形式为

$$V = AX - L \tag{3}$$

这是一个过定方程组在满足$\min=\sum|V|$条件下的求解问题，可以写成线性规划的标准形式：

$$\text{目标函数}\qquad \min(e^{T}\ e^{T}\ o^{T}\ o^{T})\begin{pmatrix} v^{+} \\ v^{-} \\ x^{+} \\ x^{-} \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

$$\text{s.t.}\qquad (E\ \ -E\ \ A\ \ -A)\begin{pmatrix} v^{+} \\ v^{-} \\ X^{+} \\ X^{-} \end{pmatrix} = b \tag{4.2}$$

$$X^{+},\ X^{-},\ v^{+},\ v^{-} \geqslant 0 \tag{4.3}$$

按单纯形法求出上式的最优解。式（4）为式（3）在$\sum|V|=\min$条件下求解的数学模型，其证明见下一节。

2 残差绝对值和最小解的坚韧性

我们首先讨论一个参数的估值问题，如果说平均值作为一个量测值的估值符合最小二乘原理，那么取中位数作为它的估值就满足绝对值和最小的原理。下面就这个问题从理论上作进一步的分析：

设x_i表示某个量X在第i次的观测值，今要求X的估值m与x_i之差的绝对值和最小。令其m的估值（又称L_1的范数）为m_1，则

$$m_1 = m\Big|\sum_{i=1}^{N}|m - x_i| = \min \tag{5}$$

对式（5）的求解，不能采用求偏导数求极值的办法。而是引用一个sgn函数，使sgn函数值为零，求出的m_1。满足式（5）的要求，即

$$\sum_{i=1}^{N}\operatorname{sgn}(m_1 - x_i) = 0 \tag{6}$$

其中

$$\operatorname{sgn} = \begin{cases} +1 & \text{当} m_1 - x_i > 0 \\ -1 & \text{当} m_1 - x_i < 0 \\ \text{无意义} & \text{当} m_1 - x_i = 0 \end{cases} \tag{7}$$

按式（7）的定义，欲使式（6）为零，必然是使$m_1>x_i$的个数有$N/2$项，$m_1<x_i$的也有$N/2$项。若恰好有一个x_i值位于以上两种情况之间，则m_1就等于这个x_i。这个m_1就是前面所述的中位数，所以说中位数作为估值符合绝对值和最小的原理。如果N是偶数，则m_1位于中间两个x_i之间的任何一个地方。这时在N个观测值中含有再大的粗差必然落在中位数的最左边或最右边，而不影响中位数的取值。这就是它具有良好坚韧性的原因所在。

以上讨论的是一个参变量的情况。如果是几个参变量的估计问题，采用公式（4）的形式求解，是否符合残差绝对值和最小的原理，同时具有良好的坚韧性呢？下面继续分析这个

问题。

设有一个过定方程组

$$AX = b \tag{8}$$

其中，A为$m \times n$阶实矩阵（$m > n \geqslant 2$）；a_1，$a_2 \cdots a_m$为A的m个行向量；β_1，$\beta_2 \cdots \beta_m$为b的m个分量。我们希望找到一个具有n个分量的解向量x，它满足残差绝对值和最小的原理，使下式成立：

$$\min\ \nu(x) = \|Ax - b\|_1 = \sum_{i=1}^{m} a_i x - \beta_i \tag{9}$$

式（9）的求解恰好是一个无约束求极值的问题，可以改写成：

$$\begin{cases} \min\ \sum\limits_{i=1}^{m} \nu_i \\ \text{s.t.}\ \nu_i \geqslant |a_i x - \beta_i| \qquad i = 1,\ 2 \cdots m \end{cases} \tag{10}$$

上式中不等式可用下式表达：

$$\begin{cases} \nu_i \geqslant (a_i x - \beta_i) \\ \nu_i \geqslant -(a_i x - \beta_i) \end{cases} \tag{11.1}$$

或

$$\begin{cases} \nu_i - a_i x \geqslant -\beta_i \\ \nu_i + a_i x \geqslant \beta_i \end{cases} \tag{11.2}$$

顾及到式（11.2），公式（10）可以表示为：

$$\begin{cases} \min\ [e^{T} \quad 0] \begin{bmatrix} \nu \\ x \end{bmatrix} \\ \text{s.t.}\ \begin{bmatrix} I & -A \\ I & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu \\ x \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} -b \\ b \end{bmatrix} \qquad \nu,\ x\text{为自由变量} \end{cases} \tag{12}$$

为了使原问题中变量满足非负的要求，对变量x，ν作以下的变换：

$$\begin{cases} x = x^{+} - x^{-} \\ \nu = \nu^{+} - \nu^{-} \end{cases} \tag{13}$$

这样线性规划的原问题（12），可以表示成公式（4），这就证明了按公式（2）求得的最优解是符合绝对值和最小原理的。

式（3）是一个过定方程组，式（4）中约束条件式的个数多于未知参数的个数。若有k个待定参数，在单纯形求解过程中，只需k个约束条件来确定k个未知数，余下（$m-k$）个约束条件在求解过程中仅仅是残差ν_i^{+}与ν_i^{-}之间交换的问题。因为在满足$\sum|\nu| = \min$条件下，只有那些对目标函数值有所改善（指最小化）的非基变量，才有可能被选择为进基变量。要满足这个条件，含粗差的约束条件往往被排除在参与计算未知参数的k个约束条件之外，而落在（$m-k$）个约束条件之中，所以在（$m-k$）个约束条件的（$m-k$）个β中存在着再大的粗差，对k个未知参数的估值影响很小，甚至没有影响。这是“残差绝对值和最小法”用在摄影测量和其它平差问题中，其解具有良好坚韧性的理论根据。

3 带权的残差绝对值和最小法

带权残差绝对值和最小法的数学模型为

$$\begin{cases} \min \left[P^{T} \quad P^{T} \quad O \quad O \right] \begin{pmatrix} v^{+} \\ v^{-} \\ x^{+} \\ x^{-} \end{pmatrix} \\ \text{s.t.} \left[I \quad -I \quad A^{T} \quad -A^{T} \right] \begin{pmatrix} v^{+} \\ v^{-} \\ x^{+} \\ x^{-} \end{pmatrix} = b \end{cases} \tag{14}$$

式中P为相应于误差方程式的权向量。

在残差绝对值和最小的平差中引入权（该权的含义反映出点位的配置，而不是精度的优劣）的作用是提高粗差定位的能力，为了选择适当的权，我们借用线性规划中大M法则。在线性规划问题的约束条件中加入人工变量以后，为了使人工变量对目标函数的取值不受影响，只有在寻求最优可行解的过程中使人工变量变成非基变量，对于实现目标函数最小的问题来说，给目标函数中的人工变量的系数规定一个很大的价值系数（$+m$）。

在粗差检测中对大M法的引用，情况恰恰相反，我们希望含粗差的误差方程式中相应的人工变量在寻求最优解的过程中始终是基变量，而不成为非基变量，只有这样才能把含粗差的观测值分离出来，对于目标函数最小化问题，应使目标函数中人工变量的系数给予一个小值（即一个小的权），这样才能使粗差定位能力增强。

怎样给出这样的权呢？从粗差检测的理论知道，对于局部多余量偏小的点位，它的粗差定位能力差，因此一个平差系统里，各点位的局部多余量可以作为我们这里选择权的参考依据，可是在区域网平差中，每个点上的局部多余量往往不是容易得到的，因此在实际问题处理中，在难以定位的点上给予一个小于 1 的权系数，就可以使该点的粗差定位能力提高。

4 实　　验

通过实验可以验证绝对值和最小的光束法区域网平差的坚韧性。这种坚韧性体现在两个方面：一是对粗差的定位能力；二是平差精度的稳定性。为此我们利用 4 ×10和 3 × 7 两个

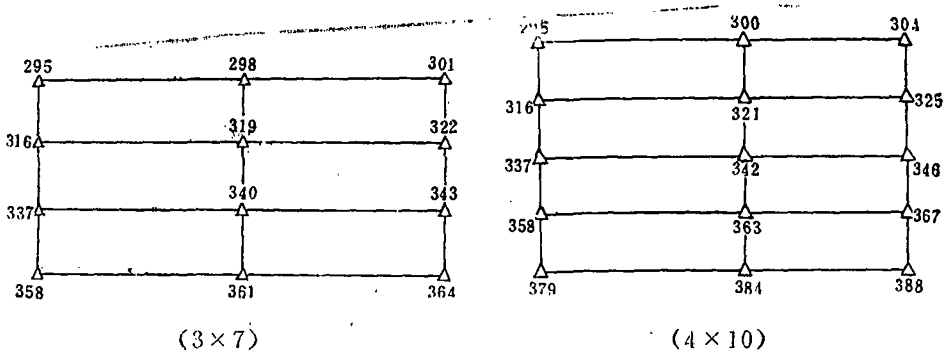


图　1

区域，象点坐标含$\sigma_0=\pm5\mu m$的随机误差的模拟象片，摄影比例尺为1：3万，象幅23cm×23cm，$f_k=150mm$，采用12个控制点进行平差，如图1。由实验结果得到以下几点认识：

（1）残差绝对值和最小光束法区域网平差具有良好的坚韧性。

表 1　四角隅点同时含有粗差

粗差点（角隅）	4×10		4×10	
	粗差$15\sigma_0$	残差(mm)	粗差$15\sigma_0$	残差（mm）
295	$x+15\sigma_0$	−0.036	$x+15\sigma_0$	−0.031
304	$x+15\sigma_0$	−0.012	$y+15\sigma_0$	−0.056
379	$x+15\sigma_0$	−0.058	$x+15\sigma_0$	−0.058
388	$x+15\sigma_0$	−0.080	$x+15\sigma_0$	−0.082
	其余点	$<6\sigma_0$	其余点	$<6\sigma_0$

从可靠性理论知道，Y坐标的粗差比X坐标误差容易定位，因此实验中着重研究X坐标的粗差定位问题。表1列出区域四角点同时含粗差时的定位情况。从表中数据可见，除304点外，其余点上的粗差均可以从平差后该点的残差中给予定位。若对304点，仅在其Y坐标中含粗差，则可以得到很好定位。在例常的区域网平差中，位于区域四角控制点坐标中所含粗差很难被发现，更谈不上精确定位了。

（2）　带权的残差绝对值和最小光束法区域网平差，可以提高粗差定位的能力。

表 2　权时粗差定位的影响（表中数值为残差）　　　　单位：mm

粗差 \ $P_x=0.5$	3×7				3×7	
	295	301	358	364	未加权	$P_x=0.5$
	$x+7\sigma_0$	$x+7\sigma_0$	$x+10\sigma_0$	$x+10\sigma_0$	每点$x+7\sigma_0$残差	每点$x+7\sigma_0$残差
295	0.041	0.001	0.003	0.006	0.026	0.028
301	0.014	0.047	0.014	0.007	0.038	0.033
358	0.001	0.025	0.044	0	0.009	0.027
364	0.034	0.006	0.038	0.019	0.003	0.004
——	——	——	——	其余点	$<3\sigma_0$	$<3\sigma_0$

表2中最后两列表示，当四角的控制点的X坐标同时含有$7\sigma_0$粗差时的粗差定位情况。在不带权的情况下，根据残差大小，只有295，301两点的粗差可以定位。当在粗差点上引入$P_X=0.5$的权以后，只有364点的粗差不能定位，而在358点上的残差值为0.027mm（已超过

$5\sigma_0$），可以断定该点含粗差。

在实际数据处理中，我们预先并不知道哪一点含粗差，这样就不能预先做到合理地在哪些点上应加权，哪些点上不加权。对于这种情况，我们给出以下的处理办法，就四角点上含粗差这一情况而论（因为四角点上的粗差最难检测），同时均含有粗差的可能性极少，四点中含有一个粗差的可能性是有的，因此，当我们怀疑四角点上含有粗差时，不妨在四个点上给予一个小于1的权，这时若含有一个粗差时，均能准确地检测出来。表2的前五列列出四次试验（即第2，3，4列），每次含一个粗差，而在四个角点上分别给出四个相同的权（$P_X=0.5$）的试验结果。

从表2中可见，除第四次试验中364点以外，其它试验中，在粗差点上的残差呈现明显的大值（大于$8\sigma_0$），而在364点上的残差虽未达到$8\sigma_0$的数量级，但是相对其它三点而言，亦呈现较大的数值，因此可以做到粗差的正确定位。表中P_X表示在X坐标上赋给的权。

（3）残差绝对值和最小光束法区域网平差具有稳定的精度。

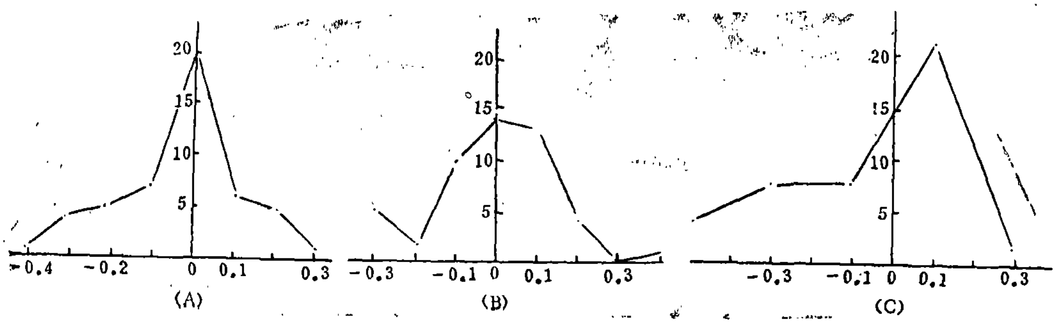
表3列出四角点中一个角点含粗差和四个角点同时含粗差时的精度。

表 3　粗差对平差精度的影响　　单位：m

粗差点 \ 精度	无粗差	295	301	358	364	四角点同时含粗差	max－min
		$x+7\sigma_0$	$x+7\sigma_0$	$x+10\sigma_0$	$x+10\sigma_0$	$x+7\sigma_0$	
m_x	0.15	0.14	0.16	0.14	0.15	0.19	0.05
m_y	0.15	0.16	0.17	0.17	0.17	0.22	0.07
m_{xy}	0.21	0.21	0.24	0.22	0.23	0.29	0.08
m_z	0.29	0.27	0.33	0.29	0.30	0.35	0.08

表中最后一列表示精度的最大差异，平面精度差异为0.08m（相当于象片上2.7μm），高程精度差异为0.08m。这些数字表明，尽管平差中一个角点含$7\sigma_0$～$10\sigma_0$粗差，甚至四角点同时含有粗差，其结果的精度只变化3cm左右，相当稳定。

（4）残差绝对值和最小平差后的残差仍然呈现正态分布。如图2所示。



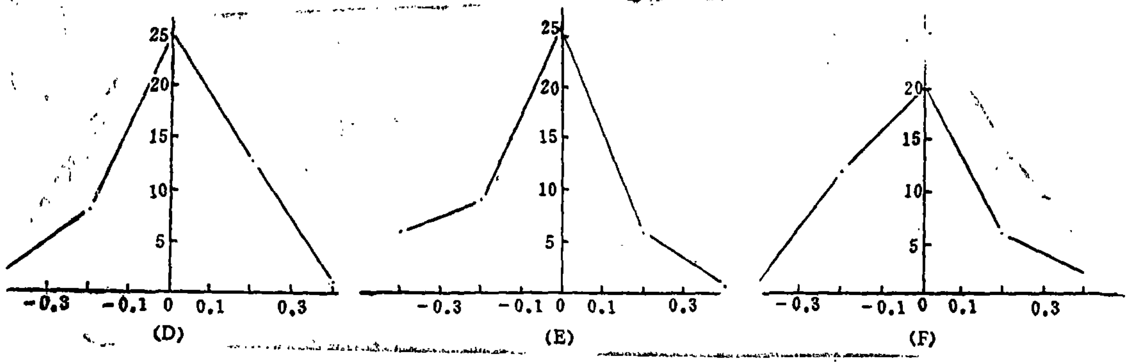


图 2

图 2 中纵轴—频数；横轴—残差；（A），（B），（C）表示同一个区域无粗差时，平差结果X，Y，Z残差的直方图；（D），（E），（F）表示四角点均有粗差时，平差结果X、Y、Z 残差的直方图。

从以上试验结果可见残差绝对值和最小光束法区域网平差方法对粗差的影响具有很好的 Robust 性质，而且精度稳定。

参 考 文 献

［1］ H Bartels, R conn, and W sinclair. Minimization Technigues for piecewise differentiable functions: The l_1 solution to an overdetermined linear system. SIAM J. NUMER. ANAL. Vol.15, No2 1978.

［2］ 郑肇葆编. 数学规划在测绘学中应用. 武汉测绘科技大学，1987，12.

［3］ 郑肇葆. "大M法"在粗差定位中的应用——数学规划在摄影测量中应用之三. 1987年全国摄影测量与遥感综合年会论文.

［4］ 郑肇葆. 线性规划在摄影测量粗差检测中应用的尝试. 测绘学报，1985（4）.

Bundle Block Adjustment Based on the Principle of Minimizing the Sum of Absolute Residuals

Zheng zhaobao Tan Chunjian Zhang Rungen

Abstract

This paper proposes the principle of the bundle block adjustment of minimizing the sum of absolute residuals and the Robust character of its solution. After weights have been introduced in the adjustment, the ability of gross detection can be increased. The experiments show that all the four corner points contain blunders, the accuracy of the adjustment by minimizing the sum of absolute residuals still has the best stability.

[Key words] linear programming; bundle block adjustment; blunder