

微分流形及其在测绘科学中 的应用初探

白 亿 同

摘 要

本文用通俗的语言介绍了微分流形中几个最基本的概念,并对其在测绘科学中的应用作了初步探讨。

【关键词】 微分流形; 切向量; 余切向量; 纤维丛; 微分形式

微分流形概念是三维欧氏空间中曲面或曲线概念的推广,它的产生不仅是由于几何学的需要,而且也是由于力学的发展所要求的。微分流形理论已经广泛应用于数学、力学和物理学的各个领域。目前国外在研究形变测量、地球旋转理论、经典引力理论等方面也已经使用了这一数学理论,随着流形理论的普及和测绘科学的发展,它对测绘科学也一定会产生深远的影响。本文结合测绘科学中的一些例子,将向广大测绘科学工作者简单介绍微分流形理论及其在测绘科学中的应用。

1 从球面谈起

球面是微分流形中最简单的例子之一,测绘科学中研究的主要对象之一——地球表面的第一次近似就是一个球面。我们都知道不可能用一幅地图把整个地球表面都画出来(通常的世界地图既不包括南北极,又把大西洋分割开了,这就破坏了地球表面各个地区之间的相对位置)。现在我们就从数学角度来剖析这一问题。

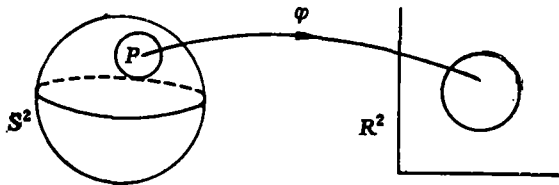


图 1

球面(记作 S^2)是三维欧氏空间 R^3 中满足 $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = a^2$ (注意

x 右上角的 1, 2, 3 为上角标, 而非乘方, 以下常采用这种记号) 的点集。 S^2 上任意点 P 都有足够小的邻域, 从这个邻域到二维欧氏空间 R^2 中的一个开圆盘上有一个 1-1 映射 φ (如图 1)。

R^2 中的开圆盘可以作为 S^2 上这个小邻域的一幅图, 两者之间一一对应并保持了原有拓扑关系 (即保持了原有地物之间的相邻关系), 这样的 φ 是一个同胚映射, 值得注意的是, 不存在 S^2 到 R^2 的一个同胚映射。考察通常的球面坐标: 令经度 $\theta = x^1$, 纬度 $\varphi = x^2$, 则将球面映射到长方形: $-\pi \leq x^1 \leq \pi, -\frac{\pi}{2} \leq x^2 \leq \frac{\pi}{2}$, 如图 2。

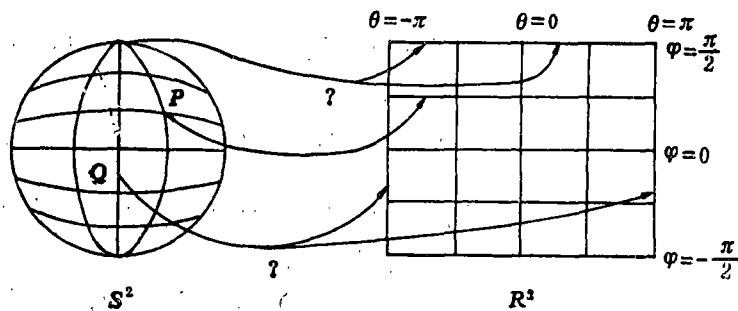


图 2

我们首先看到 S^2 中的北极 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 被“映为”整条线段 $x^2 = \frac{\pi}{2}, -\pi \leq x^1 \leq \pi$, 因而在北极和南极不存在映射, 其次 S^2 中的点 Q 被“映到” R^2 中的两点, 也不存在映射。为了避开这些问题, 我们必须把映射限制在开区域 $-\pi < x^1 < \pi, -\frac{\pi}{2} < x^2 < \frac{\pi}{2}$ 之内, 这样南北极以及东经 180° 上的所有点就在映射的定义域之外了, 因此至少需要再加一个映射才能覆盖整个球面, 这样球面上的一点就可以至少在两幅图中之一, 于是借助于两幅图可以把整个球面表示在平面上。

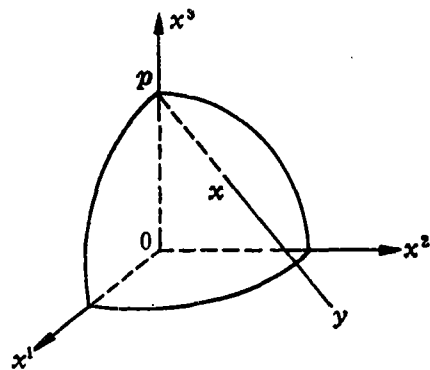


图 3

利用几幅图表示球面的方法很多, 我们在这里介绍一种比较简单的方法——球极映射 (如图 3)。

令 $p = (0, 0, 1)$, $q = (0, 0, -1)$ 是北极和南极, $U = S^2 - \{p\}$, 取 $x \in U$, 并假定 $x = (x^1, x^2, x^3)$, 连接 x 和 p 的直线是 $y = \lambda x + (1 - \lambda)p$, 其中 $y = (y^1, y^2, y^3)$, 当 $\lambda = (1 - x^3)^{-1}$ 时直线和 $y^3 = 0$ 相交, 定义一个映射

$\varphi: U \rightarrow R^2 = \{y \in R^3; y^3 = 0\}$ 为:

$$\varphi(x) = \{x^1(1 - x^3)^{-1}, x^2(1 - x^3)^{-1}\} \triangleq \{y^1, y^2\}$$

同样利用 q 可以作出 $\psi: V \rightarrow R^2$ 为:

$$\psi(x) = \{x^1(1 + x^3)^{-1}, x^2(1 + x^3)^{-1}\} \triangleq \{z^1, z^2\}$$

容易看出 $\varphi(U \cap V) = R^2 - \{O\}$, 其中 O 为原点, 且有

$$\psi \circ \varphi^{-1} : R^2 - \{O\} \rightarrow R^2 - \{O\}$$

$$\{y^1, y^2\} \rightarrow \{z^1, z^2\} = \{y^1((y^1)^2 + (y^2)^2)^{-1}, y^2((y^1)^2 + (y^2)^2)^{-1}\}$$

这就是两个坐标系 φ 和 ψ 在它们相交部分上的变换关系。

当然还可以有许多其它方法把球面用几幅图来表示。制图学中用各种不同投影方法所绘制的地图册实际上就是用若干平面表示球面的方法。

2 微分流形概念简介

我们知道, 有了拓扑空间*就可以在其上定义连续函数。微分流形则是在其上可以作微积分运算的一个拓扑空间。

(拓扑) 流形是一个 Hausdörfff 空间**, 且在这个空间中每一点都存在一个邻域同胚于 R^n 中的一个开集。

(U, φ) 称为流形 M 的区图 (chart), 其中 U 为 M 中的一个开集 (称作区图的定义域), $\varphi: U \rightarrow W$ 是 U 到 R^n 的开集 W 上的一个同胚映射。

点 $x \in M$ 的象 $\varphi(x) \in R^n$ 的坐标 (x^1, x^2, \dots, x^n) 称为区图 (U, φ) 中 x 的坐标 (也称 x 的局部坐标)。区图 (U, φ) 也称局部坐标系。

如上段里球面 S^2 中的 U 与映射 φ 和 S^2 中的 V 与映射 ψ 可以构成 S^2 的两个区图。

流形 M 上的 C^k 类图册 (Atlas) 是 M 的一组区图 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, 使得定义域 $\{U_\alpha\}$ 覆盖 M , 且同胚映射满足下面相容条件:

$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ 是 C^k 类映射, 即若 (x^i) 和 (y^j) 分别是点 x 在 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ 和 (U_β, φ_β) 中的坐标, 则映射 $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ 在 $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ 中由 n 个 C^k 类 n 元实值函数给出

$$(x^i) \rightarrow y^j = f^j(x^i)$$

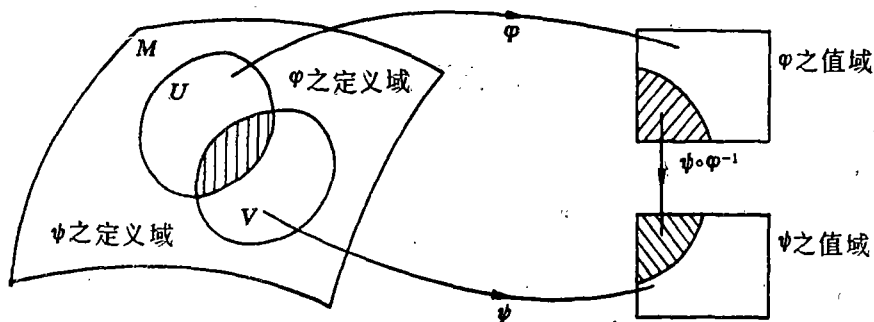


图 4

*在集合 M 上每一点 x , 都定义了一个邻域系 $(U(x); x \in M)$, 且具有 Euclid 空间中邻域系的基本性质, 则 M 连同其上的邻域系一起构成一个拓扑空间。

**满足 T_2 公理的拓扑空间叫做 Hausdörfff 空间, 所谓 T_2 公理系指 M 中任意两个不同的点有不相交的开邻域。

如上段中的映射 $\psi \circ \varphi^{-1}: R^2 - \{O\} \rightarrow R^2 - \{O\}$ 就由 $z^1 = y^1((y^1)^2 + (y^2)^2)^{-1}$, $z^2 = y^2((y^1)^2 + (y^2)^2)^{-1}$ 给出, 在 $R^2 - \{O\}$ 中它们都有各阶连续偏导数. (U, φ) 和 (V, ψ) 两个区图构成了 S^2 上的 C^∞ 类图册.

流形 M 上的 C^k 类图册称为极大的, 如果 M 的任一区图 $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ 与图册中的每一个区图都满足前面提到的相容条件, 则 $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ 一定属于该图册.

一个极大的 C^k 类图册就定义了 M 上的一个 C^k 类微分构造.

定义 一个具有 C^k 类微分构造的 n 维拓扑流形称为一个 n 维 C^k 类微分流形.

我们以后主要讨论 C^∞ 类微分流形, 并简称为微分流形或流形.

例 1: $M = R^n$, 取 $U = M$, φ 为恒等映射, 则 $\{(U, \varphi)\}$ 是 R^n 的一个坐标覆盖, 由此确定了 R^n 的光滑流形结构, 所以 R^n 是 C^∞ 微分流形.

例 2: 根据上段所述, 球面 S^2 是 C^∞ 微分流形, 类似地可知 n 维球面

$$S^n = \{x \in R^{n+1}; (x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^{n+1})^2 = 1\}$$

也是微分流形.

根据微分流形定义, 能连续参数化的任何集合 M 都是一个流形, 它的维数就是独立参数的个数.

例 3: 三维空间中刚体的所有转动的集合是一个流形, 因为它可以用三个“欧拉角”来连续地加以参数化. 这个流形叫做旋转群, 大地测量和摄影测量中的许多场, 使用旋转群后就能得到深入的理解. [5] 中就是以旋转群作为研究地球旋转理论的基础.

例 4: 设 $U \subset R^n$ 为开集, 其中的超曲面

$$H: F(x^1, x^2, \dots, x^n) = 0, F \in C^\infty, dF \neq 0$$

令 $U_i = \left\{ x; \frac{\partial}{\partial x^i} F(x) \neq 0, F(x) = 0 \right\}$, 则 $\{U_i; i = 1, 2, \dots, n\}$ 覆盖 H , 在 U_i 上由

隐函数定理, 知 H 可以表示为 $x^i = f^i(x^1, \dots, \hat{x}^i, \dots, x^n)^*$, $f^i \in C^\infty$, 在 U_i 上可用 $x^1, \dots, \hat{x}^i, \dots, x^n$ 为局部坐标, 这样 H 就有了由 n 个区图构成的图册, 所以 H 为微分流形.

例 5: $U \subset R^n$ 中有限个方程

$$F_i(x^1, \dots, x^n) = 0, i = 1, 2, \dots, k, k < n, F_i \in C^\infty, \text{rank}(\partial F_i / \partial x^j) = k$$

所定义的 $n - k$ 维曲面也是微分流形, 这也是隐函数定理的推论. [7] 中把条件方程组所确定的观测量之间的关系当作流形, 把流形理论引进平差问题的研究中.

这里顺便指出, 间接观测平差中若误差方程为

$$f^i(x^1, \dots, x^m) - l^i = v^i, i = 1, 2, \dots, m, m < n$$

令

$$y^i = f^i(x^1, \dots, x^m), \text{其中 } \text{rank}(\partial f^i / \partial x^j) = m$$

则它是一个参数化了的流形, 未知数 $x^j (j = 1, \dots, m)$ 为参数, 这时只需一个区图就可以表示这个流形 (参看 [7]).

例 6: 由 N 个质点组成的力学系, 由它们的位置 ($3N$ 个数) 和速度 ($3N$ 个数) 定义的数组确定了一个 $6N$ 维 Euclid 空间. 但实际上在许多情况下力学系要受到有限多个不含时间

*式中 $\hat{}$ 罩在一个符号上表示该符号被删去.

的约束条件, 这样的力学系的构形空间一般不是 Euclid 空间, 而是一个微分流形, 这时 $6N$ 个坐标并非完全独立, 如果有 m 个独立时 (这样的力学系具有 m 个自由度), 它就是 m 维的微分流形。

例 7: 上述例 3 是李群的一个例子, 它是旋转群, 可记作 $SO(3)$ 。现在我们简单地介绍一般的李群。李群既是一个群, 又是一个微分流形, 并使得微分结构与群结构相容, 即使得运算 $G \times G \rightarrow G, (x, y) \rightarrow xy^{-1}$ 是一个可微映射。如 R^n 赋予通常的微分结构, 并具有向量加法运算时是一个李群。又如 R^n 到 R^n 上的线性双射 (既是单射又是满射的映射就是双射) 所构成的空间和映射的复合运算一起构成一个李群, 叫做一般线性群, 记作 $GL(n)$, 它对应于 $n \times n$ 非奇异实方阵所构成的集合。

一维李群通常叫做单参数群, 如平面上的旋转群就是一种单参数群。李群的例子还有很多, 在此不一一列举了。〔5〕中以旋转群 (见例 3) 为理论基础研究地球旋转理论时还使用了李群的李代数作为工具。

例 8: m 维射影空间 P^m 是 m 维流形 (见〔8〕)。

例 9: 圆锥, 即由 $(x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0$ 所确定的集合加上由 R^3 上的拓扑所诱导的拓扑, 它不是一个流形, 因为在原点不存在同胚于 R^2 的邻域 (见图 5)。

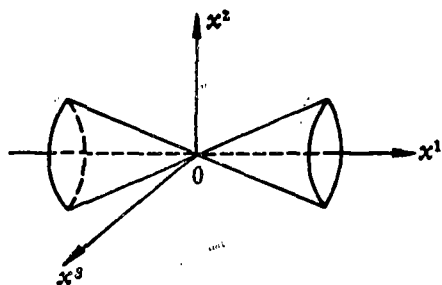


图 5

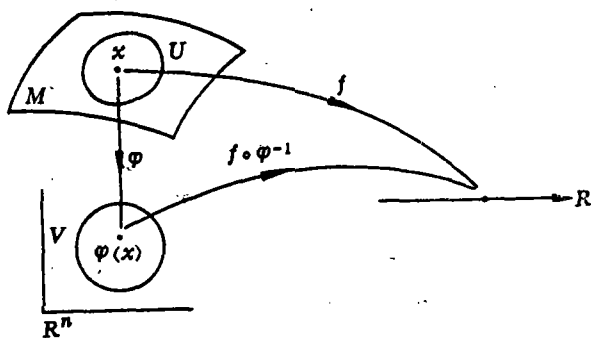


图 6

流形上的 C^∞ 函数 给定流形 M 上的一个函数 $f: M \rightarrow R$, 由 $x \rightarrow f(x)$ 来确定。设 (U, φ) 是点 x 处的一个区图 (即 $x \in U$), 则 $f \circ \varphi^{-1}$ 是从 $V = \varphi(U)$ 到 R 的一个映射 (见图 6), 如果在 V 中, $f \circ \varphi^{-1}$ 在 $\varphi(x)$ 处是 C^∞ 可微的, 则称函数 f 在流形上点 x 处 C^∞ 可微。容易验证这个定义不依赖于区图的选择。

函数 $f: M \rightarrow R$ 在 M 上称为 C^∞ 函数, 如果在每一点 $x \in M$, f 是 C^∞ 可微的。

3 切空间 余切空间

我们不准备给出切空间的严格定义, 仅利用微分几何中曲面的切平面和切向量加以形象地说明。设曲面片 S 的方程为:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^1, x^2)$$

x^1 曲线 $x^2 = \text{常数}$ 与 x^2 曲线 $x^1 = \text{常数}$ 交于点 P ，通过该点 x^1 曲线的切向量为 $\partial \mathbf{r} / \partial x^1$ ， x^2 曲线的切向量为 $\partial \mathbf{r} / \partial x^2$ 。

在曲面 S 上点 P 处，通过点 P ， S 上曲线的切向量叫做曲面 S 在点 P 的切向量。曲面 S 上点 P 处 S 的切向量全体的集为：

$$T_P(S) = \{a(\partial \mathbf{r} / \partial x^1)_P + b(\partial \mathbf{r} / \partial x^2)_P; a, b \in R\}$$

因为 $\partial \mathbf{r} / \partial x^1$ 和 $\partial \mathbf{r} / \partial x^2$ 线性无关，故 $T_P(S)$ 是二维向量空间，我们把它叫做曲面 S 的切空间（它实际上是曲面 S 在点 P 处的切平面）。 $\partial \mathbf{r} / \partial x^1$ 和 $\partial \mathbf{r} / \partial x^2$ 是这个空间的基，任一向量可以由它们的线性组合表示，其系数 a, b 可以看作切向量的分量。

流形上的切向量 设 f 是 M 上的 C^∞ 函数。映射 $\mathbf{v}: f \rightarrow \mathbf{v}f$ ，按如下方式规定：取含 P 的区图 (U, φ) ， \mathbf{v} 决定 n 个数的列 (v^1, \dots, v^n) 使得

$$\mathbf{v}f = \sum_{i=1}^n v^i (\partial f \circ \varphi^{-1} / \partial x^i)_{\varphi(P)}$$

成立，则映射 \mathbf{v} 叫做 n 维流形 M 在点 P 处的切向量，式中 (x^1, \dots, x^n) 是区图 (U, φ) 中的坐标系，上式又可简写为：

$$\mathbf{v}f = \sum_{i=1}^n v^i (\partial f / \partial x^i)_P$$

这时 (v_1, \dots, v_n) 叫做切向量在区图 (U, φ) 中的分量。例如 R^3 中点 P 处的方向导数 $\partial / \partial l$ 可以看作一个映射，它把 C^∞ 函数 f 映射为实数

$$\partial / \partial l: f \rightarrow (\partial / \partial l)f$$

且有： $(\partial / \partial l)f = \cos \alpha (\partial f / \partial x^1)_P + \cos \beta (\partial f / \partial x^2)_P + \cos \gamma (\partial f / \partial x^3)_P$

$\partial / \partial l$ 可看作 R^3 中的一个切向量， $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为它的分量。

若包含点 P 的其它区图 (V, ψ) 中切向量 \mathbf{v} 的分量为 $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)$ ，则切向量分量的变换式为：

$$\bar{v}^i = \sum_{j=1}^n (\partial y^i / \partial x^j) v^j$$

式中 (y^1, \dots, y^n) 是区图 (V, ψ) 中的坐标系， $(\partial y^i / \partial x^j)$ 是两个区图坐标系的变换关系式 $y^i = f^i(x^j)$ 的 Jacobi 行列式。

在点 P 处 n 个切向量 $(\partial / \partial x^i)_P$ ($i = 1, \dots, n$) 的定义是：

$$(\partial / \partial x^i)_P f = (\partial f / \partial x^i)_P$$

式中 f 是任意 C^∞ 函数，这些切向量 $(\partial / \partial x^1)_P, \dots, (\partial / \partial x^n)_P$ 在区图 (U, φ) 中分别具有分量 $(1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)$ 。

流形在点 P 处的切向量的全体的集记为 $T_P(M)$ ，可以证明它是一个 n 维向量空间，我们把它叫做 M 在点 P 的切空间， n 个切向量 $(\partial / \partial x^1)_P, \dots, (\partial / \partial x^n)_P$ 构成 $T_P(M)$ 的基。

切空间在几何学与物理学中起着非常重要的作用。物理学中的绝大多数近似在于用流形在一点处的切空间局部地来代替给定流形。这样一种近似可以称为局部线性化。在非线性间接平差中如果我们把误差方程组看作流形时（见前段例 5），也是用平差值的近似值处的切空间来近似代替流形求平差值的。

余切向量与余切空间 切空间 $T_P(M)$ 上的线性形式的空间（也是 n 维向量空间）叫做

流形 M 在点 P 处的余切空间, 记作 $T_P^*(M)$, 它是 $T_P(M)$ 的对偶空间, $T_P^*(M)$ 中的元素叫做余切向量。

对于 $\omega \in T_P^*(M)$ 和 $v \in T_P(M)$ 来说:

$$\omega(v) \in \mathbb{R}$$

因为 $T_P^*(M) = T_P^*(M)$, 故有 $v(\omega) = \omega(v)$ 。

已知 $\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^n$ 是 $T_P(M)$ 的基, 把它在 $T_P^*(M)$ 中的对偶基记为 dx^1, \dots, dx^n 。

即若

$$v = \sum_{i=1}^n v^i \partial/\partial x^i$$

定义余切向量 dx^i 为:

$$dx^i(v) = v^i$$

于是由 $dx^i \left(\sum_{j=1}^n v^j \partial/\partial x^j \right) = v^i$, 可得:

$$dx^i(\partial/\partial x^j) \triangleq \langle dx^i, \partial/\partial x^j \rangle = \delta_j^i$$

其中 δ_j^i 为 Kronecker 符号。

若流形 M 上包含点 P 的两区图 $(U, \varphi), (V, \psi)$ 之间的变换关系式为 $y^j = f^j(x^i)$, 可以证明, $T_P^*(M)$ 中自然基的变换式为:

$$dy^j = \sum_{i=1}^n (\partial y^j / \partial x^i) dx^i$$

因为 dx^1, \dots, dx^n 是 $T_P^*(M)$ 中的一个基, 于是 $T_P^*(M)$ 中的元素, 即余切向量可以表示为 $\sum_{i=1}^n a_i dx^i$, 其中 $a_i \in \mathbb{R}$ 。若 f 是 M 上的 C^∞ 函数, 可以验证 $(df)_P \in T_P^*(M)$, 即 C^∞ 函数在点 P 处的微分是余切向量。

在非线性间接平差中是用切空间来近似代替流形本身的。但在非线性条件平差中则应用余切空间来近似代替流形。

切丛与余切丛 设 M 是一个流形, 则称 $T(M) \triangleq \bigcup_{P \in M} T_P(M)$ 为切丛, $T^*(M) \triangleq \bigcup_{P \in M} T_P^*(M)$ 为余切丛。

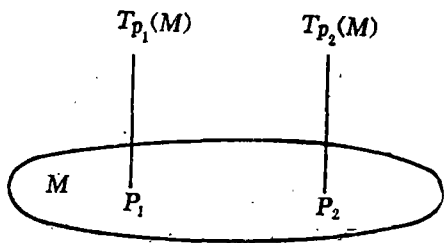


图 7

形象地比喻, 如果 M 是一个光滑曲面, 它的每一点处都有一个切平面(二维向量空间), 那么这些切平面的全体就可以看作是一个切丛。值得注意的是切丛(或余切丛)并不仅仅是 M 上各点处的切空间的并, $T(M)$ 和 $T^*(M)$ 都有所谓的丛构造(参看〔1〕)。

更一般的在流形上可以定义所谓纤维丛, 前面提到的切丛、余切丛等都是它的特例〔1〕。〔4〕中利用纤维丛讨论了相对论中的引力理论, 可以作为我们研究重力理论之借鉴。

向量场与一次微分形式 射影映射 $\pi: T(M) \rightarrow M$ 定义如下: 如果 $v \in T(M)$, 则存在唯

*此处略去了 $\partial/\partial x^1, \dots, dx^1, \dots$ 等的下标 P 。

一的一个 $P \in M$, 使得 $v \in T_p(M)$; 我们规定 $\pi(v) = P$ 。类似地有一个从 $T^*(M)$ 到 M 上的射影映射, 也记为 π 。

M 上的向量场是一个映射 $v: M \rightarrow T(M)$, 使得 $\pi \circ v = i_M$ (即 π 与 v 的复合映射是 M 上的恒等映射)。

这样向量场通过映射 $v: P \rightarrow (P, v_P)$ (经常简记作 $P \rightarrow v_P$), 对于每一点 $P \in M$ 给出了一个切向量 $v_P \in T_p(M)$ 。例如一阶常微分方程 $dy/dx = f(x, y)$ 给出了 xoy 平面上的一个向量场。

M 上的一个一次微分形式是一个映射 $\omega: M \rightarrow T^*(M)$, 使得 $\pi \circ \omega = i_M$ 。

由上面定义可以看出向量场实际上是切向量场, 而一次微分形式则是余切向量场。

R^3 中函数 f 的梯度, 实际上是一次微分形式, 可以表示为:

$$\text{grad } f = (\partial f / \partial x^1) dx^1 + (\partial f / \partial x^2) dx^2 + (\partial f / \partial x^3) dx^3$$

我们习惯上都把重力场看作一个向量场, 但就它的数学本质来看, 它实际上是一次微分形式, 即余切向量场。相对论中要在四维空间中讨论问题, 只有把引力场看作一次微分形式才便于把三维空间中的结果加以推广。

[1]中还定义了张量场的李导数概念, 利用它可以讨论文[5]中弹性外壳流体核心组成的地球模型的旋转问题。文[6]第一讲中讨论了微分流形的形变, 并使用了张量这一数学工具, 如果再利用张量场的李导数来讨论形变问题就会带来很大方便。

4 结束语

目前流形理论在物理学中已经得到广泛应用, 并取得了许多重大成果, 它已经成为物理学家必须掌握的重要基础理论之一。但流形理论在测绘科学中的应用还处于起步阶段, 这方面的一些成果还存在许多不完善之处, 因而广大测绘科研工作者应当努力学好这一理论, 并用它来作为现代测绘科学的重要数学基础之一, 为我国的测绘科学研究工作赶超世界先进水平作出贡献。

参 考 文 献

- [1] Choquet-Bruhat Y, Dewitt-Morette C, Dillard-Bleick M. Analysis, Manifolds and Physics. Amsterdam: North-Holland, 1977.
- [2] 舒茨 B F. 数学物理中的几何方法. 冯承天, 李顺祺译, 上海科技文献出版社, 1986.
- [3] 齐民友. 线性偏微分算子 (上册, 附录部分). 科学出版社, 1986.
- [4] Carter B. Underlying Mathematical Structures of Classical Gravitation Theory, in Recent Developments in Gravitation. New York: Plenum Press, 1979.
- [5] Moritz H. Variational Methods in Earth Rotation, in Geodesy and Global Geodynamics. Mitteilungen der Geodätischen Institute der Technischen Universität Graz, Folge 41, 1982.

- [6] Grafarend E W. Six Lectures on Geodesy and Global Geodynamics, in Geodesy and Global Geodynamics. Mitteilungen der Geodätischen Institute der Technischen Universität Graz, Folge 41, 1982.
- [7] 白亿同. 新投影定理及其在测量平差中的应用. 武汉测绘科技大学学报, 1986(1).
- [8] 陈省身, 陈维恒. 微分几何讲义. 北京大学出版社, 1983.

A Tentative Investigation on Differentiable Manifold and It's Application to Surveying and Mapping

Bai Yitong

Abstract

This paper introduces several basic concepts of differentiable manifold in common words and makes a tentative investigation on it's application to surveying and mapping.

[Key words] differentiable manifold, tangent vector, cotangent vector, fiber bundle, differential form