

分块变换中的边界问题和P4T方法

胡 鹏 詹玉华*

摘 要

在分块变换或纠正中,其边界的拓扑性保持是非常重要的。本文从二维变换的角度出发,对一般的分块变换在分析其边界影象错落的普遍性基础上,给出了解决此类问题严密且实用的方法。

【关键词】 分块变换; 边界二象性; 分块四点变换法。

分块变换方法广泛运用在多面体变换、分带变换、微分变换、遥感图象的几何变换、地图投影变换以及大、中型地学数据库建立与使用的过程中。从整体着手难以解决的复杂问题,采用分块后,用简单模型就可以解决。然而由于各块中采用了不同的数学模型,这样边界上的二象性就几乎难以避免,因此图象越过边界上的连续性问题(接边问题)是广泛存在的,又是非常重要的,接边的实际精度要求远远高于图象点的变换精度。与此相矛盾的是,现有的大多数变换方法、仪器及工艺却是通过图象点的变换精度来保证接边精度,也正因为如此,造成了处理上的困难和仪器费用上的昂贵,这是不合理的;而少数变换方法则完全忽视了这一问题,在编制地图的分块手工拼贴中,较少的图形尚可采用手工“接边”方法予以弥补,而在计算机上进行各种分块变换或光学连续晒象时,忽视边界上拓扑性保持的变换方法,实际工作将导致流产。

上述变换理论上可以归结为一般地图投影与正射投影的变换关系。

1 一般地图投影与正射投影间的变换关系

三维曲面(几何曲面或实际地面)到其在二维场上拓扑对应的一个表象间的变换,我们称之为地图投影。设其坐标系统为 xoy , 而实地模型三维坐标为 X, Y, Z , 则正射投影坐标为 x, y , 且有:

收稿日期:1988-07-25

*詹玉华系武汉城建学院教师。

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(X, Y, Z) \\ y &= f_2(X, Y, Z) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其雅各比式

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (2)$$

在投影区域处处成立

实践中, 投影不仅要考虑几何因素, 而且要考虑时间及物理因素。设投影几何状态参数为 $V_i, i = 1, 2, \dots, M$ (如投影中心、投影面几何位置等状态参数)。物理状态参数为 $W_j, j = 1, 2, \dots, N, a_i$ 和 b_j 均可视为时间 t 的具有有限变化率的函数。

(1) 式实际为:

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(X, Y, Z, V_1, V_2, \dots, V_M, W_1, W_2, \dots, W_N) \\ y &= f_2(X, Y, Z, V_1, V_2, \dots, V_M, W_1, W_2, \dots, W_N) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

对于清晰的象可视为:

$$\left. \begin{aligned} Z &= z(X, Y) = z_i(x, y), & t &= t(X, Y) = t_1(x, y) \\ V_i &= v_i(t) = v_i(X, Y) = V_i(x, y) & i &= 1, 2, \dots, M \\ W_j &= w_j(t) = w_j(X, Y) = W_j(x, y) & j &= 1, 2, \dots, N \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

故(3)式为:

$$\left. \begin{aligned} x &= x(X, Y) \\ y &= y(X, Y) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

其反变换:

$$\left. \begin{aligned} X &= X(x, y) \\ Y &= Y(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

且有相应雅各比式在象区域上处处不为零。

(6) 式中 X, Y 是定义在 xoy 上的单值、连续且较光滑的一对曲面, 同样(5)式中 x, y 是定义在 XOY 上的一对类似曲面。因而从理论上讲, 无论 X, Y 多么复杂, 只要已知较多对同名点, 总可找到 X, Y 的一对满足一定精度要求的数值逼近函数 \tilde{X}, \tilde{Y} 。实现由任一二维象到正射二维象间的转换。

当 $t = k, k$ 为常数, 这时 $V_i = k_i, W_j = l_j, i, j = 1, 2, \dots, K_i, l_j$ 均为常数, 即投影为瞬时的象。对于航片, 这是一个透视投影象, (1) 式将为:

$$\left. \begin{aligned} x &= (A_1 X + B_1 Y + C_1 Z + D_1) / (A_4 X + B_4 Y + C_4 Z + D_4) \\ y &= (A_2 X + B_2 Y + C_2 Z + D_2) / (A_4 X + B_4 Y + C_4 Z + D_4) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

或与之完全等价的共线方程^[1]

$$\left. \begin{aligned} x &= -f[a_1(X - X_5) + b_1(Y - Y_5) + c_1(z - z_5)]/[a_3(X - X_5) \\ &\quad + b_3(Y - Y_5) + c_3(z - z_5)] \\ y &= -f[a_2(X - X_5) + b_2(Y - Y_5) + c_2(z - z_5)]/[a_3(X - X_5) \\ &\quad + b_3(Y - Y_5) + c_3(z - z_5)] \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

(7)、(8)式是由5对点决定的，自变量为 X, Y, Z 的变换。当在小区域 Ω' 内，视 $z = \tilde{z}(X, Y)$ 为已知， $\tilde{z}(X, Y)$ 为平面，则(7)式整理后有如下形式：

$$\left. \begin{aligned} x &= (A_1X + B_1Y + C_1)/(A_3X + B_3Y + 1) \\ y &= (A_2X + B_2Y + C_2)/(A_3X + B_3Y + 1) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

(9)式为小区域 Ω 内，由4对点决定的自变量为 X, Y 的变换。这是平面上的共线变换。

(7)式与(9)式的差别是由于 $\Delta z = z(X, Y) - \tilde{z}(\tilde{X}, \tilde{Y})$ 引起的，在该单元中其绝对值(即分带变换带距)可由[1]中(16~34)式决定

$$\max |\Delta z| = \theta = 0.001fM/r \quad (10)$$

f 为摄影机主距； M 为成图比例尺分母； r 为象片上辐射距离。当 $\max |\Delta z|$ 可使最大点位误差 r 小于图上0.5mm时，(7)式可被(9)式取代，并视区域 Ω 为近似平面。

由(9)式可得其逆变换 \tilde{X}, \tilde{Y} ，由于 Δz 的存在，故实际上近似变换 \tilde{X}, \tilde{Y} 为：

$$\left. \begin{aligned} \tilde{X} &= (a_1x + b_1y + c_1)/(a_3x + b_3y + 1) \\ \tilde{Y} &= (a_2x + b_2y + c_2)/(a_3x + b_3y + 1) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

上述 A_i, B_i, C_i 及 a_i, b_i, c_i 都为常数。这也是由4对点位决定的一个数值变换，它表明了由一个投影象得到其原象(正射象)的变换关系，文[5]给出了单片数值变换中，只要相应雅各比式不为零，区域 Ω' 与其象 Ω 内将是拓扑对应的证明，但在边界上没有论及，而这一问题在大区域成图时无法避免。实际上，当采用(11)式作交换模型时，边界上一般不是拓扑对应的。它说明连续图象在分块变换中越过边界时将产生断续及错离现象。

2 共线变换中边界上的二象性

平面上的共线变换是单张象片纠正的基础。

设有两相邻单元及其共线变换象如图1所示：

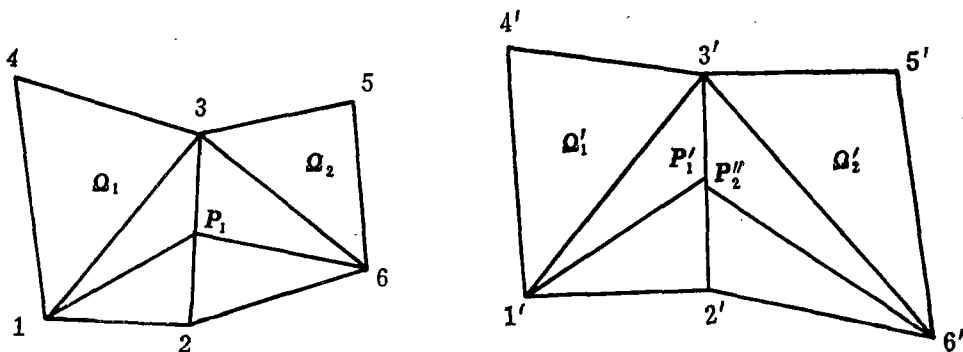


图 1

$$\begin{aligned}
 X_1' &= (a_1x_1 + b_1y_1 + c_1)/(a_3x_1 + b_3y_1 + 1) \\
 X_2' &= (a_1x_2 + b_1y_2 + c_1)/(a_3x_2 + b_3y_2 + 1) \\
 X_3' &= (a_1x_3 + b_1y_3 + c_1)/(a_3x_3 + b_3y_3 + 1) \\
 X_4' &= (a_1x_4 + b_1y_4 + c_1)/(a_3x_4 + b_3y_4 + 1) \\
 Y_1' &= (a_2x_1 + b_2y_1 + c_1)/(a_3x_1 + b_3y_1 + 1) \\
 Y_2' &= (a_2x_2 + b_2y_2 + c_1)/(a_3x_2 + b_3y_2 + 1) \\
 Y_3' &= (a_2x_3 + b_2y_3 + c_1)/(a_3x_3 + b_3y_3 + 1) \\
 Y_4' &= (a_2x_4 + b_2y_4 + c_1)/(a_3x_4 + b_3y_4 + 1)
 \end{aligned} \tag{12}$$

当任意3点(及象)都不在同一直线上时,上式唯一可解。其相邻单元 Ω_2 与 Ω_2' 的变换模型仍同(11)式,代入2,3,5,6及2',3',5',6'的坐标,可得到类似(12)式的另一套系数 $A_j, B_j, C_j (j=1, 2, 3)$ 。对于 Ω_1 与 Ω_2 边界上 P_1 点,按 Ω_1 与 Ω_1' 和 Ω_2 到 Ω_2' 的变换可得到 P_1' 和 P_1'' ,由于 a_i, b_i, c_i 与 A_j, B_j, C_j 的不同, P_1' 与 P_1'' 虽都在2',3'上,但点位一般不同,图1就是依据共线变换交叉比不变的原理作出的 P_1' 与 P_1'' ,显然,由于5,6两点变换状况一般不同于1,2两点,故 P_1' 与 P_1'' 不重合是一般情况。仅当两相邻单元都为仿射变换(即 $a_3 = b_3 = A_3 = B_3 = 0$)时, P_1' 与 P_1'' 才重合。这时4对点中有一对点的条件是不独立的,决定于其它3对点的变换状况。

这样,当在纠正仪上用4对独立的点进行对点变换作业时,实际用的是平面共线变换,而非仿射变换。当采用此模型作分块变换时,边界上的二象性将是一般现象。

在分块变换、分带纠正中,这种现象在理论和实践上都是显著的。它实际上限制了分块方法的使用。

3 微分纠正中的边界问题

在微分纠正中,严格地说,只有在每个纠正单元的中央点处才能得到理论上的正确纠正。在纠正单元面积内的其它点上仍存在有地形坡度的变形,并且在函数投影情况之下还存在由于象片倾斜的变形。这些变换如不加以改正,将会产生误差,影响正射象片的质量,特别反映在各纠正单元之间的接边处^[1]。如图2,由于分块变换中各块变换的数学模型不同,原先连续的图象,其变换象将产生重叠或间断,这是一个较普遍的现象。

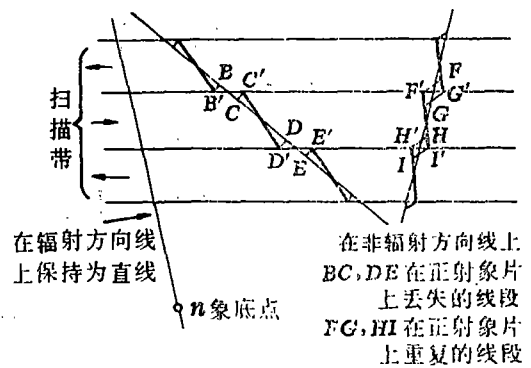


图 2

上述变形所产生的误差,对于任意单元的微分纠正都存在,在极小的纠正单元内也还存在有投影误差。为减少这种投影误差,可以使用减小纠正单元的尺寸的方法,但这样就会使投影晒象的工作量增大。另一方面也可以对纠正单元内部进行进一步的纠正……。

笔者认为,这种单元内的投影误差,其值实际已远小于各比例尺地图对图象点的精度要求。采用减小单元和对纠正单元内部进行纠正的措施。其原因只是一个:分块变换中的边界

的二象性。

显然，投影误差与拓扑性要求是两回事，它们的要求是不同的，前者0.5mm的误差也不显著，后者0.1mm的误差已完全不允许。

这样，为使投影误差达到边界二象性不明显的程度，采用的模型和方法，其代价十分昂贵，也不合理。而在采用保持边界拓扑性要求的分块变换方法的基础上，兼顾使其投影变换差达到制图精度要求（这样的方法一般是容易达到的），这才是合理的途径。

有些文献采用了仿射变换方法来变换四边形区域，由于仿射变换具有把平行四边形变为平行四边形的严格数学特性。当变换第一行第一列的四边形时，即把第一、二行的行距变换系数、第一、二列的列距变换系数固定了，同理第一行及第一列的各小四边形区域变换后，全区的全部行距系数和列距变换系数全部确定，误差将会累积在以后变换的四边形中。只有采用任意四边形区域拓扑变换到任意四边形区域的基本模型，才能适应全区域变换的实际情况。

4 三角形上的数值变换中边界象的唯一性

把图 3 中 $\Delta 123$ 变到 $\Delta 1'2'3'$ 可采用下列模型：

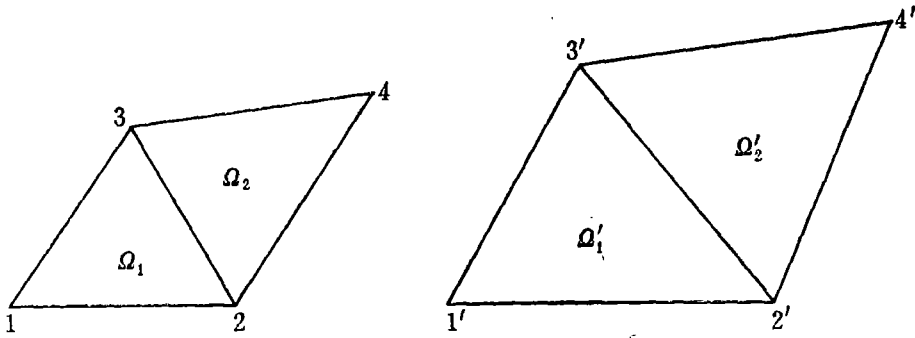


图 3

$$\left. \begin{aligned} X &= a_1 x + b_1 y + c_1 \\ Y &= a_2 x + b_2 y + c_2 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

代入点 1, 2, 3 及 1', 2', 3' 坐标可解算出 $a_i, b_i, c_i (i=1, 2)$ ：

$$\left. \begin{aligned} X_1' &= a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 \\ X_2' &= a_1 x_2 + b_1 y_2 + c_1 \\ X_3' &= a_1 x_3 + b_1 y_3 + c_1 \\ Y_1' &= a_2 x_1 + b_2 y_1 + c_2 \\ Y_2' &= a_2 x_2 + b_2 y_2 + c_2 \\ Y_3' &= a_2 x_3 + b_2 y_3 + c_2 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

其行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 2 \text{ 倍} \Delta 123 \text{ 面积}$$

当 $\Delta 123$ 面积不为零时，(13)式唯一可解，当 $\Delta 1'2'3'$ 面积也不为零时，雅各比式（为两三角形面积之比）也不为零，两三角形间为拓扑变换^[5]。对于边界23上P点，它分23线为 $\lambda : (1 - \lambda)$ ，其坐标可写为：

$$x_p = x_2 + \lambda(x_3 - x_2)$$

$$y_p = y_2 + \lambda(y_3 - y_2)$$

相应地有：

$$X_{p'} = a_1(x_2 + \lambda(x_3 - x_2)) + b_1(y_2 + \lambda(y_3 - y_2)) + c_1$$

$$Y_{p'} = a_2(x_2 + \lambda(x_3 - x_2)) + b_2(y_2 + \lambda(y_3 - y_2)) + c_2$$

整理得：

$$\left. \begin{aligned} X_{p'} &= X_{2'} + \lambda(X_{3'} - X_{2'}) \\ Y_{p'} &= Y_{2'} + \lambda(Y_{3'} - Y_{2'}) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

即P的象P'也分2'3'为 $\lambda : (1 - \lambda)$ ；同理在 $\Delta 234$ 到 $\Delta 2'3'4'$ 的变换中，P点的象P''的坐标也为(15)式右边，说明P'与P''是重合的。这样当两图片上具有上述三角形的剖分时，任一连续图象越过边界，其象也是连续的。

采用(13)式模型实际上是两个三角形上的线性插值模型，它对于真变换函数X, Y的误差为^[2]：

$$\left. \begin{aligned} R_x &\leq \frac{3}{8} M^2(X) h^2 \\ R_y &\leq \frac{3}{8} M^2(Y) h^2 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

其中：

R_x, R_y 分别是X, Y的变换误差

$$h = \max(12, 23, 13)$$

$$M^2(X) = \max_{\Delta 123 \text{ 内}} \left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 X}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y} \right)$$

$$M^2(Y) = \max_{\Delta 123 \text{ 内}} \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial y} \right)$$

这样，最弱点可能极限误差为：

$$R = R^2 X + R^2 Y \quad (17)$$

实际工作中，人们习惯于制图区、制图子区呈四边形，可采用连接四边形对角线成两三角形的方式，即双仿射变换来进行四边形的变换。当四边形剖分一定且对角线连接方式一定时，四边形到四边形的双仿射变换是唯一的，它与四边形到四边形的共线变换（同素变换）边界效应的形式一样（两点间线段到两点间线段），但与一般点的变换象有差别。以双仿射变换作基本变换模型使全制图区的变换象始终是连续的。

5 矩形分划中边界上的图象

设有矩形分划如图4。凭借 $(n+1) \times (n+1)$ 已知格网点的二维坐标数据可构造双 n 次多项式。进行这 $(n+1) \times (n+1)$ 个格网点内的点的坐标变换, 即

$$\begin{cases} X = \sum_{i,j=0}^n a_{ij} x^i y^j \\ Y = \sum_{i,j=0}^n b_{ij} x^i y^j \end{cases} \quad (18)$$

当在分划一致的情况下, 也即是如图4中 A_1 单元与 A_2 单元, 它们都是有 $(n+1) \times (n+1)$ 个已知格网点的单元。已知 A_2 格网点是 A_1 网点的象, 这时 A_1, A_2 的共同边界上有 $(n+1)$ 个公共点。这时对于 A_1 单元有一位于 $A_1 A_2$ 公共边界上的点 (x_n, y) , 其变换坐标 X 为:

$$\begin{aligned} X &= a_{00} + a_{01}y + \dots + a_{0n}y^n + a_{10}x_n + a_{11}x_n y + \dots + a_{1n}x_n y^n \\ &\quad + \dots + a_{n0}x_n^n + a_{n1}x_n^n y + \dots + a_{nn}x_n^n y^n \\ &= (a_{00} + a_{10}x_n + \dots + a_{n0}x_n^n) + (a_{01} + a_{11}x_n + \dots + a_{n1}x_n^n)y \\ &\quad + \dots + (a_{0n} + a_{1n}x_n + \dots + a_{nn}x_n^n)y^n \end{aligned} \quad (19)$$

代入边界上已知点的 $(n+1)$ 个格网点的坐标值 $(x_n, y_0), (x_n, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, 以及相应象的坐标 $(X_{n0}, Y_0), (X_{n1}, Y_1), \dots, (X_{nn}, Y_n)$, 有

$$\begin{aligned} X_{n0} &= (a_{00} + a_{10}x_n + \dots + a_{n0}x_n^n) + (a_{01} + a_{11}x_n + \dots + a_{n1}x_n^n)y_0 \\ &\quad + \dots + (a_{0n} + a_{1n}x_n + \dots + a_{nn}x_n^n)y_0^n \\ X_{n1} &= (a_{00} + a_{10}x_n + \dots + a_{n0}x_n^n) + (a_{01} + a_{11}x_n + \dots + a_{n1}x_n^n)y_1 \\ &\quad + \dots + (a_{0n} + a_{1n}x_n + \dots + a_{nn}x_n^n)y_1^n \\ &\dots \\ X_{nn} &= (a_{00} + a_{10}x_n + \dots + a_{n0}x_n^n) + (a_{01} + a_{11}x_n + \dots + a_{n1}x_n^n)y_n \\ &\quad + \dots + (a_{0n} + a_{1n}x_n + \dots + a_{nn}x_n^n)y_n^n \end{aligned} \quad (20)$$

若设 $(a_{00} + a_{10}x_n + \dots + a_{n0}x_n^n), (a_{01} + a_{11}x_n + \dots + a_{n1}x_n^n), \dots, (a_{0n} + a_{1n}x_n + \dots + a_{nn}x_n^n)$ 为 $n+1$ 个未知数, 则式(20)为一 $(n+1)$ 阶线性方程组, 其系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & y_0 & y_0^2 & \dots & y_0^n \\ 1 & y_1 & y_1^2 & \dots & y_1^n \\ 1 & y_2 & y_2^2 & \dots & y_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & y_n & y_n^2 & \dots & y_n^n \end{vmatrix} \quad (21)$$

为范德蒙行列式, 因为 $y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n$, 故 $D \neq 0$, 即线性方程组有唯一一组解。当相邻单元 A_2 中有另一构造在 $(n+1) \times (n+1)$ 上的双 n 次多项式

$$X = \sum_{i,j=0}^n c_{ij} x^i y^j \quad (22)$$

时, 对于边界上任一点 (x_n, y) , 同样有(19)式的类似式, 代入边界上同样的已知格网

点坐标, 可得到唯一的一组解, 且因为常数项以及系数矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & y_0 & \cdots & y_0^n \\ 1 & y_1 & \cdots & y_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & y_n & \cdots & y_n^n \end{pmatrix}$$

相同, 故:

$$\left. \begin{aligned} a_{00} + a_{10}x_n + \cdots + a_{n0}x_n^n &= c_{00} + c_{10}x_n + \cdots + c_{n0}x_n^n \\ a_{01} + a_{11}x_n + \cdots + a_{n1}x_n^n &= c_{01} + c_{11}x_n + \cdots + c_{n1}x_n^n \\ \cdots & \\ a_{0n} + a_{1n}x_n + \cdots + a_{nn}x_n^n &= c_{0n} + c_{1n}x_n + \cdots + c_{nn}x_n^n \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

可知对于公共边界上 (x_n, y) 点, 其象的 X 在越过边界时将唯一的。同理可证象的纵坐标 Y 也是唯一的。它说明不论两相邻单元变换状况如何不同, 对其边界上点的变换象都是唯一的, 联系 (18) 所示变换已保持了任一子区域 A_i 的开区间到 A'_i 的开区间间拓扑对应的证明^[6], 我们得到下列结论: 相同矩形分划中, 当相邻单元采用在其上构造的相同次数的双 n 次多项式进行内插时, 内插值在边界上是连续的, 用 (18) 式的模型 (X, Y 的次数 n 可以不相同) 进行变换时, 在两相邻单元的区域上及它们的象区域间也是拓扑对应的。显然这种子区域数可令其增加以覆盖全制图区域。

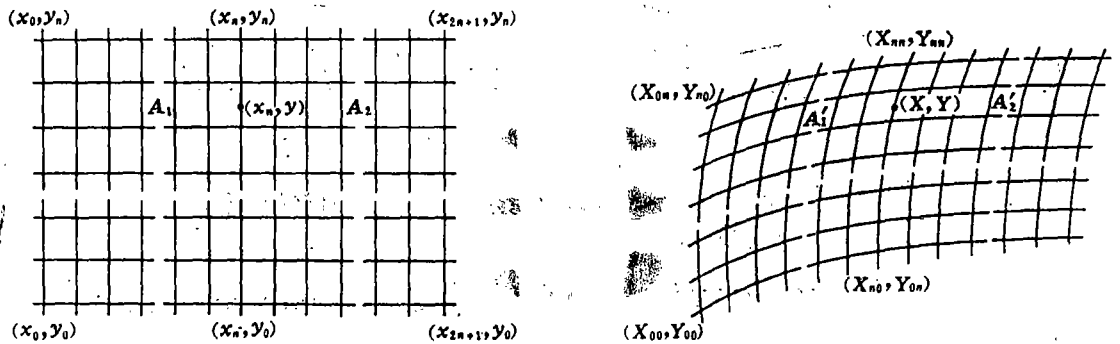


图 4

6 图象点的逐点变换方法

由前述 4、5 节可凭借已知的 (或制作) 若干点及对应象作基础点, 构制任意四边形 (实为两个三角形) 或矩形网, 进行图象点的逐点变换。

分块四点变换方法基于前述 4 的三角形上线性插值模型, 它把测绘中常用的对作业区进行四边形分块规律地变化为三角形进行变换, 由于在较小的范围内 (h 较小), 此法将具有较高精度 (为 $O(h^2)$), 且由于基于一次变换模型, 稳定性好, 对已知点精度要求低, 可广泛适应于各种线划图的变换。当采用人工或机器对遥感象片进行判读得到线划图后, 建立包围制图区域的分块四点变换格网 (用数字化仪输入 A 上各已知点坐标, 用键盘或数字化仪输入 A'

上相应正射点象的坐标), 再用数字化仪输入线划图上各点坐标串, 可得到线划图的正射象。

此法的精度决定于已知点精度 m_n 、图象点数字化精度 m_d 和变换精度 m_t 。后者 m_t 决定于分块大小, 由于计算机的性能, 分块100~2000块几乎无太大的差别和困难, 也即令 $m_t < 0.1\text{mm}$ 也是不困难的; 而前两者 m_n 和 m_d 的综合影响, 参照(13)、(14)式分析可知, 在相同比例尺的转换中, 一般约为数字化仪的误差 M_D (例如对TG8000系列数字化仪将为0.25 mm, 对TG1000系列为0.375mm), 这时图象点的精度约为:

$$m \leq M_D^2 + m_t^2$$

上述方法, 我们已使之程序化, 并在GIS-dB3关系型地学信息基础数据库中配备了分块四点变换程序作入库变换之一, 实践效果是好的, 我们称之为P4T法。

基于前述5的矩形格网的中、高次变换法可用解析法取得高精度的矩形点位及其正射(或所需投影)象位后进行, 这也是一个有意义的方法。

参 考 文 献

- [1] 王之卓. 摄影测量原理. 测绘出版社, 1979.
- [2] 冯 康. 数值计算方法. 国防工业出版社, 1978.
- [3] 乌尔马耶夫. 同素变换理论及其在数学制图学和编图中的应用. 测绘出版社, 1956.
- [4] 林开愚, 杨 凯, 蓝运超. 陆地卫星MSS象片在航测纠正仪上的仿射变形纠正. 测绘学报, 1984(3).
- [5] 胡 鹏. 关于地图投影变换中若干问题的探讨. 武汉测绘科技大学学报, 1982(1).

The Boundary Problem in Partitioning

Transformation and P4T Method

Hu Peng Zhan Yuhua

Abstract

The maintenance of topological character of the boundaries is very important in partitioning transformation. This paper gives the vigorous and general methods for solving these problems. And it analyzes the differences between the image places of the identical boundary in partitioning transformation, based on the two-dimension transformation.

【Key words】 partitioning transformation; difference between the image places of the identical boundary; partitioning transformation method with 4 points