

# 地图的集合模型(表达式) 及比较应用初探\*

钟业勋\*\* 胡毓钜

## 摘 要

本文在分析和综合地图实质与内容的基础上,应用比较方法提出了点作为构成地图的“细胞”,并由此入手建立了点的一般集合表达式,指出表达式是点的定位基础信息、表示类属的性质特征信息、区别颜色的表象特征信息以及反映颜色浓淡的信息等6个变量的函数。然后推导了地图要素和最终的地图一般表达式。作为例子,文中运用这些表达式推证了各类点、各种地图要素及几种地图的表达式。

作者认为,依据这些表达式还可对作为传输信息工具的地图在人们认知过程中的作用和结果作进一步的探索。

**【关键词】** 比较地图学; 定位基础信息; 地图要素; 地图的集合表达式

比较地图学的任务之一,就是运用各种比较方法,以多视角、全方位来揭示地图学的本质和规律。地图作为地图学的基本对象,各国学者对它进行了很多研究。对于地图概念的学术争鸣,推动着理论地图学的发展。如果对各种地图概念做比较,虽然观点不同,表述各异,但它们大多是文字描述形式的概念,很少用数学语言进行表述。

数学方法为科学研究提供了准确的形式化语言,它是科学知识定量化的重要手段。马克思说过,科学只有当它能够成功地运用数学的时候,才算达到了完善的地步<sup>[1]</sup>。在地图学的理论研究,特别是在地图概念的研究中,有必要引进数学方法,用数学语言来表述地图概念。

爱因斯坦说:“科学的目的是,一方面是尽可能完备地理解全部感觉经验之间的关系,另一方面是通过最少个数的原始概念和原始关系的使用来达到这个目的。”<sup>[2]</sup>为了用数学语言表述地图概念,首先要从对大量各种类型地图的比较研究中,找出构成地图的最少个数的

收稿日期:1989-01-23

\*本文承喻永昌、胡鹏高级工程师提出宝贵意见,谨表谢意。

\*\*广西测绘局

原始概念和原始关系。

数学基础、居民地、道路、水系、地貌等地图要素，是以线划为主体的地图符号。图面被地图要素分割形成的各种大小不同、形状各异的面状域是与地图要素对比而存在的。任何地图，均为线和面的对立统一体。而线和面的实质都是点的集合。因此，构成地图要素，进而构成地图的“细胞”是点。点的概念和关系，是构成地图的原始概念和原始关系\*。

要对地图上的点进行客观的、辩证的比较，就要抓住事物的本质方面，对比较对象的主要矛盾进行比较，同时要看到比较对象的同中之异和异中之同<sup>[3]</sup>。

## 1 地图上点的函数形式和点的基本类型

### 1.1 地图上点的函数形式

地图上的一切点，均由定位基础信息<sup>[4]</sup>，即纵坐标  $x$ ，横坐标  $y$ ，高程  $z$  确定其空间位置。 $x$ ， $y$ ， $z$  是点的三个基本度量。

地图上点的性质，由性质特征信息  $i$  决定。令  $i$  表示地图要素的类属，由于地图要素性质的多样性，故  $i$  是一个变量。

点的颜色，由表象特征信息  $j$  决定。地图上的颜色有规范用色，如水系用蓝色，地貌用棕色等。还有非规范用色，即根据地图设计者的意图和审美标准设计的各种颜色，如行政区划图的底色等。因地图用色的多样性，故  $j$  也是一个变量。

地图还采用多种层次的颜色来使色调更加丰富。颜色的浓淡层次，在印刷中用一定规格不同比例的网线（网点）来控制。网线（网点）的比例有多种，有10%、15%、20%、…、100%等。因此，关系到色彩浓淡的网线比例  $t$  也是一个变量。

据此可将地图上的点  $P$  表示为与 6 个变量相关的函数式：

$$P = f(x, y, z, i, j, t) \quad (1)$$

因地理坐标可以转换成直角坐标，故此处省略了定位基础信息为地理坐标的情况。

### 1.2 关于点的函数式中各变量的定义域

#### 1. $x, y, z$ 的定义域

$x, y, z$  原则上可以为任何实数。由于任何地图必定是地球表面的某一定域，在使用某一点为坐标原点的情况下，定域内的纵横坐标与原点比较，可确定其最小纵、横坐标  $x_a, y_a$  和最大纵横坐标  $x_b, y_b$ 。因此  $x, y$  的定义域为：

$$x_a \leq x \leq x_b \quad (2)$$

$$y_a \leq y \leq y_b \quad (3)$$

同理，定域内的高程对高程基准面比较的结果可确定最小高程  $z_a$  和最大高程  $z_b$ ，故  $z$  的定义域为：

$$z_a \leq z \leq z_b \quad (4)$$

#### 2. $i$ 的定义域

本文所指的“地图要素”是指地图的线划符号和注记，它是地图的主体。当点位于在地

\* 在几何学上，点是没有面积的。从应用观点出发，视为有一定微小的单元面积，文中均如此设定。

图要素上时, 定义  $i \neq 0$ 。

由于  $i$  表示地图要素的类, 对于任何地图, 均可将其要素分为  $M$  类, 故当  $i \neq 0$  时, 必有:

$$1 \leq i \leq M \quad (5)$$

$i$  的集合  $I$  称为指标集 ( $i \in I$ )。为地图要素分割形成的各种大小、形状的面状域, 与地图要素相比较而存在, 是地图要素的对立物。当点子落在面状域中时, 定义:  $i = 0$ 。

### 3. $j$ 的定义域

常规地图主要用颜料油墨印刷。根据色料减色法原理, 颜料(油墨)三原色(品红、黄、青)等量迭加即得黑色。因此, 可视黑色为颜色量变到质变的极端情况, 定义  $j = 1$  为黑色。当纸上无任何颜色为白色, 定义白色为  $j = 0$ 。因此, 当假定把各种颜色视为黑与白之间的某个值, 顾及  $j = 0$  与  $j = 1$  的特殊情况, 可得  $j$  的定义域为:

$$0 \leq j \leq 1 \quad (6)$$

### 4. $t$ 的定义域

$t$  为地图面状域使用的网线(网点)比例。因为  $t = 1$  (即为 100%) 时, 称为“实地”;  $t = 0$  时无任何网线(网点), 故  $t$  的定义域为:

$$0 \leq t \leq 1 \quad (7)$$

## 1.3 地图上点的类型

比较地图上的各种点, 根据  $i$  的取值不同可分成两大类:  $i \neq 0$  的点称为“实点”, 表明点子属于地图要素上的点; 当  $i = 0$  时, 称为“虚点”, 表明点子位于地图要素间的面状域。

### 1. 实点类 ( $i \neq 0$ )

#### (1) 彩色要素上的实点

$$P_1^i = f(x, y, z, i, j, 1) | i \neq 0, 0 < j < 1, t = 1 \quad (8)$$

#### (2) 黑色要素上的实点

$$P_1^i = f(x, y, z, i, 1, 1) | i \neq 0, j = 1, t = 1 \quad (9)$$

### 2. 虚点类 ( $i = 0$ )

#### (1) 彩色普染域内的虚点

$$P_0^i = f(x, y, z, 0, j, t) | i = 0, 0 < j < 1, 0 < t < 1 \quad (10)$$

#### (2) 空白域内的虚点

$$P_0^i = f(x, y, z, 0, 0, 0) | i = 0, j = 0, t = 0 \quad (11)$$

比较 (8) 至 (11) 式, 可见地图上彩色实点和黑色实点, 彩色虚点和白色虚点, 它们的差别在于  $i, j, t$  的取值不同。每一组  $x, y, z$  确定一个点的空间位置。因此 (8) 至 (11) 式都是 (1) 式的有条件表达式, 是一般式的具体化。

## 2 地图个体要素、地图类要素和地图的数学表达式

### 2.1 地图个体要素

定义: 地图个体要素是指地图上可以独立计量的封闭曲线(如等高线), 有起终点的线

段（如某段河流、道路等）、个体符号或注记。地图个体要素为实点的集合。

1. 彩色地图个体要素  $u_{i,n}^c$

彩色地图个体要素为彩色实点的集合。

$$u_{i,n}^c = \{P_{i,j,t}^c \mid i \neq 0, 0 < j < 1, t = 1\} \quad (12)$$

式中  $P_{i,j,t}^c$  已由 (8) 式给出。

2. 黑色地图个体要素  $u_{i,n}^b$

黑色地图个体要素为黑色实点的集合。

$$u_{i,n}^b = \{P_{i,j,t}^b \mid i \neq 0, j = 1, t = 1\} \quad (13)$$

式中  $P_{i,j,t}^b$  已由 (9) 式给出。

## 2.2 地图类要素

对于集合  $N$  的各元素  $n$ ,  $u_{i,n}^c$  已给出, 此时  $N$  称为指标集<sup>[5]</sup>。某类性质相同的彩色个体要素的并集, 即为彩色类要素, 如地貌由各条等高线、各个地貌符号和注记构成等等。彩色类要素  $u_i^c$  为:

$$u_i^c = \bigcup_{n \in N} u_{i,n}^c \mid u_{i,n}^c \in u_i^c \quad (14)$$

式中  $u_{i,n}^c$  已由 (12) 式给出。

黑色类要素  $u_i^b$  表现为黑色个体要素的并集:

$$u_i^b = \bigcup_{n \in N} u_{i,n}^b \mid u_{i,n}^b \in u_i^b \quad (15)$$

式中  $u_{i,n}^b$  已由 (13) 式给出。

## 2.3 地图要素

对于集合  $I$  的各元素  $i$ ,  $u_i^c$  已给出, 此时  $I$  为指标集。同样, 对于集合  $J$  的元素  $j$ ,  $J$  也为指标集。

彩色地图要素表现为彩色类要素的并集:

$$u_j^c = \bigcup_{i \in I} u_i^c \mid u_i^c \in u_j^c \quad (16)$$

式中  $u_i^c$  已由 (14) 式给出。

黑色地图要素表现为黑色类要素的并集:

$$u_j^b = \bigcup_{i \in I} u_i^b \mid u_i^b \in u_j^b \quad (17)$$

式中  $u_i^b$  已由 (15) 式给出。

地图要素表现为彩色地图要素与黑色地图要素的并集:

$$u_j = u_j^c \cup u_j^b \quad (18)$$

## 2.4 地图个体面状域

定义: 地图个体面状域是指具有封闭边界的可以独立计量的面积, 如由水涯线限定的湖泊, 两条等高线间的空白等。地图个体面状域是性质特征信息  $i = 0$  的虚点的集合。

根据表象特征信息  $j$  的值不同, 地图个体面状域又可分为彩色个体普染域和个体空白域两类。

彩色个体普染域  $u_{0,n}^c$  为彩色虚点的集合:

$$u_{0n}^i = \{P_0^i | i = 0, 0 < j < i, 0 < t < 1\} \quad (19)$$

式中  $P_0^i$  由 (10) 式给出。

个体空白域  $u_{0n}^0$  为无色虚点的集合:

$$u_{0n}^0 = \{P_0^0 | i = 0, j = 0, t = 0\} \quad (20)$$

式中  $P_0^0$  已由 (11) 式给出。

## 2.5 地图面状域

地图面状域分普染域和空白域两类。

地图普染域表现为个体普染域的并集:

$$u_0^1 = \bigcup_{\substack{n \in N \\ j \in J}} u_{0n}^1 | u_{0n}^1 \in u_0^1 \quad (21)$$

式中  $u_{0n}^1$  已由 (19) 式给出。

地图空白域  $u_0^0$  表现为个体空白域的并集:

$$u_0^0 = \bigcup_{\substack{n \in N \\ j = 0}} u_{0n}^0 | u_{0n}^0 \in u_0^0 \quad (22)$$

式中  $u_{0n}^0$  由 (20) 式给出。

地图面状域表现为地图普染域与地图空白域的并集:

$$u_0 = u_0^1 \cup u_0^0 \quad (23)$$

式中  $u_0^1$  与  $u_0^0$  已由 (21)、(22) 式给出。

地图要素与地图面状域, 两者互为依存, 即互为补集, 故

$$u_0 = \overline{u_1} \quad (24)$$

## 2.6 地图的表达式

地图表现为地图要素  $u_1$  与地图面状域  $u_0$  的并集:

$$u = u_1 \cup u_0$$

以 (18)、(23) 式代入上式, 得

$$u = u_1^1 \cup u_1^2 \cup u_1^3 \cup u_0^1 \cup u_0^0 \quad (25)$$

# 3 地图上若干等值线数学表达式的比较

## 3.1 具体地图要素的表达式

由 (5) 式知,  $i$  代表地图要素的类属, 因此, 首先要根据地图要素的一般分类方法, 规定  $i$  的各个值的意义。现设:

$i = 1$ , 表示地图的数学基础:

$$u_1^1 = \bigcup_{n \in N} u_{1n}^1 | u_{1n}^1 \in u_1^1 \quad (26)$$

$i = 2$ , 表示居民地:

$$u_1^2 = \bigcup_{n \in N} u_{2n}^2 | u_{2n}^2 \in u_1^2 \quad (27)$$

$i = 3$ , 表示道路:

$$u_1^3 = \bigcup_{n \in N} u_{3n}^3 | u_{3n}^3 \in u_1^3 \quad (28)$$

$i = 4$ , 表示水系:

$$u_4^j = \bigcup_{n \in N} u_{4n}^j | u_{4n}^j \in u_4^j \quad (29)$$

$i = 5$ , 表示地貌:

$$u_5^j = \bigcup_{n \in N} u_{5n}^j | u_{5n}^j \in u_5^j \quad (30)$$

.....

$$u_i^j = \bigcup_{n \in N} u_{in}^j | u_{in}^j \in u_i^j \quad (14)$$

### 3.2 几种等值线的表达式

1.  $y = a$  的纵坐标线

$$u_{1n}^j = \{P_{1n}^j | y = a, i = 1, 0 < j < 1, t = 1, u_{1n}^j \in u_1^j\} \quad (31)$$

2.  $x = a$  的横坐标线

$$u_{1n}^j = \{P_{1n}^j | x = a, i = 1, 0 < j < 1, t = 1, u_{1n}^j \in u_1^j\} \quad (32)$$

3. 具有斜率  $a$  的直线

设直线属于  $i$  类要素, 则其表达式为:

$$u_{1n}^j = \{P_{1n}^j | \frac{x}{a} = a, i \neq 0, 0 < j < 1, t = 1, u_{1n}^j \in u_i^j\} \quad (33)$$

凡图内的直线型地物如通讯线、直线铁路、公路以及图廓线、对角线等等具有确定斜率的物体均可用本式表达。

4.  $z = a$  的等高线

$$u_{6n}^j = \{P_{6n}^j | z = a, i = 5, 0 < j < 1, t = 1, u_{6n}^j \in u_6^j\} \quad (34)$$

5. 专题地图中常用的彩色圆形符号(边界)(圆心位于  $x_0, y_0$ , 半径为  $R$ , 符号的要素类属为  $K$ )

$$u_{kn}^j = \{P_{kn}^j | (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2, i = k, 0 < j < 1, t = 1, u_{kn}^j \in u_k^j\} \quad (35)$$

比较(14)与(31)至(35)式可见, 坐标线、斜直线、等高线等地图个体要素均为实点集合, 有相同的数学表达式, 但各自的限制条件不同。这说明地图要素之间存在有普遍的联系, 而在表达式上反映着一般与具体的辩证统一。

## 4 几类地图数学表达式的比较

地图的一般表达式已经建立(见(25)式), 对式中的有关集合给定的条件不同, 则表示的地图类型也不同。

### 4.1 彩色地图

当  $u_1^1, u_1^2, u_0^1, u_0^2$  均为非空集, 即  $u_1^1 \neq \emptyset, u_1^2 \neq \emptyset, u_0^1 \neq \emptyset, u_0^2 \neq \emptyset$  时, 表示既有彩色要素又有黑色要素, 既有彩色普染域也有空白域的彩色地图。即

$$u = u_1^1 \cup u_1^2 \cup u_0^1 \cup u_0^2 | u_1^1 \neq \emptyset, u_1^2 \neq \emptyset, u_0^1 \neq \emptyset, u_0^2 \neq \emptyset$$

### 4.2 彩色线划地图

当  $u_1^1$  和  $u_0^1$  为空集,  $u_1^2$  和  $u_0^2$  为非空集时, 表示彩色线划地图:

$$u = u_1^1 \cup u_0^0 | u_1^1 \neq \phi, u_0^0 \neq \phi \quad (35)$$

1. 在(35)式中, 当 $u_1^1$ 与地貌类要素等价, 即 $u_1^1 \iff u_1^1$ 时, 表示一幅彩色线划地貌图:

$$u = u_1^1 \cup u_0^0 | u_1^1 \iff u_1^1 \quad (36)$$

2. 在(35)式中, 当 $u_1^1$ 与水系类要素等价, 即 $u_1^1 \iff u_1^1$ 时, 表示一幅水系图:

$$u = u_1^1 \cup u_0^0 | u_1^1 \iff u_1^1 \quad (37)$$

依此类推, 只要地图要素 $u_1^1$ 与某类或某几类要素的并集等价, 则可表示该类或某几类要素的地图。

## 4.2 黑白地图

在(25)式中, 当 $u_1^1$ 与 $u_0^0$ 为非空集, 而 $u_1^1$ 与 $u_0^0$ 为空集时, 即 $u_1^1 \neq \phi, u_1^1 = \phi, u_0^0 = \phi, u_0^0 \neq \phi$ 时, 表示一幅黑白地图:

$$u = u_1^1 \cup u_0^0 | u_1^1 \neq \phi, u_0^0 \neq \phi \quad (38)$$

比较(25)式与(35)至(38)式, 可见其共同点是任何一式中至少存在有一个实点集合( $u_1^1$ 或 $u_1^1$ )和一个虚点集合( $u_0^0$ 或 $u_0^0$ ), 实点集与虚点集的不同组合, 得到不同类型的地图。在此基础上, 通过实点集与某些地图类要素的等价关系, 可以得到更多种类地图的表达式。实点集与虚点集在地图上相对比而存在, 两者在反映客体特征方面起着相辅相成的作用: 一方面, 以线划为主体的地图要素构成虚点的边界, 使面状地物以相似形状显示在图上; 另一方面, 虚点集又使实点集可以彼此区分, 使不同性质的线状地物在地图上得到有效的反映。

实点集与虚点集互为补集的公式表明, 在任何地图上, 地图要素的增加, 被各要素分割形成的面状域的面积会越来越小, 个体面积数目则越来越多。任何地图都是实点集与虚点集的矛盾统一体。要使地图能有效地反映客体实在, 必须使实点集与虚点集处于恰当的比例。当实点集沿着增大方向演化超过某一限度时, 地图的易读性就会降低, 当 $u_1^1$ 与 $u$ 等价, 即 $u_1^1 \iff u$ 时, 便成为一张黑纸。如向相反方向演化, 地图的内容就会变得贫乏, 而当 $u_0^0 \iff u$ 时, 便成为一张白纸。白纸和黑纸都不是地图, 地图只有在实点集与虚点集比例恰当的情况下, 才能有效地发挥其功能。

## 5 结束语

比较是人们在思想上确定事物之间异同的思维过程, 比较是在一定的关系上, 根据一定的标准进行的<sup>[8]</sup>。本文通过对各类地图的比较研究, 认为点是构成地图的“细胞”, 关于点的概念和关系, 是构成一切地图的原概念和原始关系。根据对一切点的特征的分析、比较、综合, 认为定位基础信息等6个变量, 是点与点之间联系与区别的依据。通过定位基础信息 $x, y, z$ 的定量比较, 可确定点的空间位置的异同; 通过性质特征信息 $i$ 的比较, 可以判定点的类属; 表象特征信息 $j$ 的比较, 可分出黑点、色点和无色点; 根据 $t$ 的取值, 可确定点的深浅浓淡层次。总之, 点的一切特征均与变量的定值比较相关。在比较的基础上, 地图上的点分成实点、虚点两大类四种型式, 进而应用集合理论和逻辑推理方法, 推导了地图要素和地图的数学表达式, 即较完整地建立了地图模型。

辩证法的实质和核心, 就是要用对立统一的观点和方法去认识客观事物的运动规律。本

文推导的地图表达式,把地图作为实点集合 $u_1$ 与虚点集合 $u_0$ 的对立统一体。这一公式结构,具有表达多类型、多图种的功能。

例如,遥感制图中象元(1或0)就相当于本文所提的地图“细胞”点的特例,也就是(9)和(10)式表示的两种点子。不仅如此,当 $1 > t > 0$ 时还可以表示不同灰度的点。而当 $0 < j < 1$ 时,还能反映彩色图象不同色调的点。因此可见,本文所提出的表达式具有概括的意义。

本文用比较地图学的观点,在理论上提出了地图的数学表达式,并列出了若干具体应用的例子。作者认为,地图作为传输信息的工具,人们对它的认知过程及其结果,还值得在这些表达式的基础上做进一步的探索。

### 参 考 文 献

- [1] 齐振亚主编.认识论新论.上海人民出版社,1988.177~178
- [2] 许良英,范岱年编译.爱因斯坦文集.商务印书馆,1976,1:344
- [3] 朱长超.关于思维科学:试论用比较方法研究意识起源的过程.上海人民出版社,1986.63
- [4] 胡毓钜,钟业勋.比较方法在地图学中的体现、内容与意义.地图,1988(2).
- [5] [日]浅居喜代活等著.模糊系统理论入门.赵汝怀译.北京师范大学出版社,1982.276
- [6] 教师百科全书.社会科学文献出版社,1987.94

## A Preliminary Research on Set Models(Expressions) of Map and Their Comparative Applications

Zhong Yexun Hu Yuju

### Abstract

On the basis of analysis and synthesis of the substance and contents of map, by using comparative method, this paper proposes that POINT is the “cells” which construct map. From this proposal a general set expression of point is established. It points out that the expression is the function of the six variants, i. e., the positioning basic information together with the information of property indicating the category, colour and intensity of colour. then, the expression of map element and finally, the general expression of map are deduced. As examples, expressions of points of different categories, different kinds of map elements and of several maps are deduced therefrom.

The authors believe that by using these expressions further investigation can be made into the function and result of map as a means of information communication in the human cognitive process.

**[Key words]** comparative cartography; positioning basic information; map element; set expression of map