DOI:10.13203/j.whugis1989.04.002

第14卷 第4期 武汉测绘科技大学学报 Vol.14 No.4
1989年 12月 Journal of Wuhan Technical University of Surveying and Mapping Dec. 1989

权因子法方差分量估计*

吴 晓 清

摘 要

文中阐述了权因子法方差分量估计的原理。利用权因子的概念，对目前方差分量估计存在的几个问题，如负方差问题，作了探讨，并与Helmert法进行比较，得出了一些有益的看法。

算例很好地说明了权因子法方差分量估计的简便和实用性。

【关键词】 权因子法；负方差；方差分量估计

1 权 因 子

本文主要针对两类观测值而言，对工程边角网尤为适用。

设两类观测值 $\underset{n_1\times 1}{l_1}$ ； $\underset{n_2\times 1}{l_2}$ ；其先验权为 $\underset{n_1\times n_1}{P_1}$ ； $\underset{n_2\times n_2}{P_2}$ ；而其正确的先验权为P_1^0；P_2^0。因为P_1^0、P_2^0通常是未知的，一般是通过验后估计而获得，故P_1^0、P_2^0又称验后权。

由于权只有相对意义，故令：

$$P_1^0=P_1\ , \tag{1}$$

$$P_2^0=\frac{1}{\alpha}P_2\ . \tag{2}$$

式(2)中，α就是我们所定义的权因子(Weight Factor)。它表明：当且仅当先验权是正确的时候，$\alpha=1$。而通常认为$\alpha\neq 1$。

α的大小表明了先验权与验后权的比例关系，故称为权因子。

不难知道：

$$D_{l_1}=\sigma_0^2(P_1^0)^{-1}\ , \tag{3}$$

$$D_{l_2}=\sigma_0^2(P_2^0)^{-1}\ . \tag{4}$$

收稿日期：1988—10—28

* 本文是硕士论文的一部分，指导教师为孔祥元副教授.

将（1）、（2）式代入（3）、（4）式：

$$D_{l_1}=\sigma_0^2 P_1^{-1}\ , \tag{5}$$

$$D_{l_2}=\alpha\sigma_0^2 P_2^{-1}\ . \tag{6}$$

由（6）式知，α 还表明了当先验权比不准确时所引起的单位权方差的差异或比值的大小，我们进行验后方差估计的目的，就是要求得这个比值，即权因子 α 的大小。

2 先验权不准确时单位权方差的无偏估值公式

文献〔1〕指出，当先验权不准确时，将导致单位权方差的估值是有偏的。

我们利用权因子概念，推导了先验权不准确时单位权方差的无偏估值公式。

采用高斯-马尔柯夫模型：

$$V=Bx+l\ . \tag{7}$$

在$V^{\mathrm{T}}PV=\min$下，求得 x 的估值$\hat{x}$：

$$\hat{x}=-(B^{\mathrm{T}}PB)^{-1}B^{\mathrm{T}}Pl\ . \tag{8}$$

易知：

$$D_{\hat{x}}=(B^{\mathrm{T}}PB)^{-1}B^{\mathrm{T}}PD_lPB(B^{\mathrm{T}}PB)^{-1}\ . \tag{9}$$

将（5）、（6）式代入（9）式：

$$D_{\hat{x}}=[(B^{\mathrm{T}}PB)^{-1}+(\alpha-1)(B^{\mathrm{T}}PB)^{-1}(B_2^{\mathrm{T}}P_2B_2)(B^{\mathrm{T}}PB)^{-1}]\sigma_0^2\ . \tag{10}$$

（10）式表明：在模型（7）下，以P_1、P_2参加平差，由于P_1、P_2之比的不准确，使得$D_{\hat{x}}$随 α 的改变而变化。

设Δ为观测值真误差向量；V为残差向量；ε为平差值真误差向量。

则有：

$$\Delta=L-\tilde{L}\ , \tag{11}$$

$$V=\hat{L}-L\ , \tag{12}$$

$$\varepsilon=\hat{L}-\tilde{L}\ . \tag{13}$$

式中，L、$\tilde{L}$、$\hat{L}$分别表示观测值向量，观测值真值向量和平差值向量：

由（11）、（12）、（13）式得：

$$\varepsilon=\Delta+V, \tag{14}$$

很容易证明：

$$\Delta^{\mathrm{T}}P\Delta=V^{\mathrm{T}}PV+\varepsilon^{\mathrm{T}}P\varepsilon\ . \tag{15}$$

于是有：

$$V^{\mathrm{T}}PV=\Delta^{\mathrm{T}}P\Delta-\varepsilon^{\mathrm{T}}P\varepsilon\ . \tag{16}$$

对（16）式两边取期望和迹：

$$E(V^{\mathrm{T}}PV)=\mathrm{tr}\ PD_\Delta-\mathrm{tr}\ PD_\varepsilon\ , \tag{17}$$

显然：

$$D_\Delta=D_l=\begin{bmatrix} D_{l_1} & 0 \\ 0 & D_{l_2}\end{bmatrix}\ . \tag{18}$$

由(13)式得：

$$D_{*}=D_{\hat{L}}=BD_{\hat{x}}B^{\mathrm{T}} \quad . \tag{19}$$

将(10)式代入(19)式，(18)、(19)式代入(17)式，并整理得：

$$E(V^{\mathrm{T}}PV)=(n_1-\mathrm{tr}(B^{\mathrm{T}}PB)^{-1}B_1^{\mathrm{T}}P_1B_1)\sigma_0^2+\alpha(n_2-\mathrm{tr}(B^{\mathrm{T}}PB)^{-1}B_2^{\mathrm{T}}P_2B_2)\sigma_0^2 \ , \tag{20}$$

令：

$$\left.\begin{aligned} r_1&=n_1-\mathrm{tr}(B^{\mathrm{T}}PB)^{-1}B_1^{\mathrm{T}}P_1B_1 \\ r_2&=n_2-\mathrm{tr}(B^{\mathrm{T}}PB)^{-1}B_2^{\mathrm{T}}P_2B_2 \end{aligned}\right\} , \tag{21}$$

式中n_1为第一类观测值个数，n_2为第二类观测值个数。

则
$$\mathrm{E}(V^{\mathrm{T}}PV)=(r_1+\alpha r_2)\sigma_0^2 \quad . \tag{22}$$

故有

$$\hat{\sigma}_0^2=\frac{V^{\mathrm{T}}PV}{r_1+r_2\alpha} \quad . \tag{23}$$

(23) 式就是先验权不准确时单位权方差的无偏估值公式。

因为是以P_1、P_2参加平差的，因而$V^{\mathrm{T}}PV$和r_1、r_2都是常数。于是，$\hat{\sigma}_0^2$与权比α成反比曲线关系。

由(23)式，可直接有如下结论：

1）由(23)式求得的$\hat{\sigma}_0^2$是无偏的。当先验权不准确时，亦即$\alpha\neq1$时，由$V^{\mathrm{T}}PV/r$求得的单位权方差是有偏的，该公式直接地反映了先验权不准确的程度与$\hat{\sigma}_0^2$偏离其期望的程度的关系。

2）当观测值各自的多余条件数相差太大时，不必进行验后权估计。显然，当$r_1\gg r_2$时，即使α有较大的误差，对$\hat{\sigma}_0^2$的影响是微小的。

3）$V^{\mathrm{T}}PV$是以P_1、P_2求得的，故$V^{\mathrm{T}}PV$与r_1、r_2均是常数，于是(23)式不能给出α的计算公式，为此还须作进一步的研究。

3 $V^{0\mathrm{T}}P^0V^0$与α的关系

为了求得α，还得研究一下残差平方和$V^{0\mathrm{T}}P^0V^0$与权因子α的函数关系。

假使以正确权P_1^0、P_2^0进行平差，则

$$E(V^{0\mathrm{T}}P^0V^0)=r\sigma_0^2 \quad . \tag{24}$$

实际上，P_1^0、P_2^0是未知的，因此$V^{0\mathrm{T}}P^0V^0$亦无法求得。但由(1)，(2)式知，P_1，P_2是已知的先验权，当给定一个α，则P^0是已知的，那么由(24)式就可求得一个σ_0^2的估值，不难知道，$V^{0\mathrm{T}}P^0V^0$亦是α的函数，令：

$$V^{0\mathrm{T}}P^0V^0=\mathrm{f}(\alpha) \ , \tag{25}$$

则有
$$\hat{\sigma}_0^2=f(\alpha)/r \quad . \tag{26}$$

$f(\alpha)$是α的函数，是α的复杂函数，而且主要是与每个网的网形结构等因素有关，这里仅对$f(\alpha)$作如下描述：

1）$f(\alpha)$是α的单值连续函数。事实上，给定一个α，则$f(\alpha)=V^{0\mathrm{T}}P^0V^0$是唯一的，$\alpha$

连续变化，$f(\alpha)$亦连续变化。

2）$f(\alpha)$不存在极值。

我们知道，某函数$f(x)$存在极值的充要条件是该函数的一阶导数等于零，亦即$f'(x)=0$。现在的情况下，$f(\alpha)$的一阶导数肯定不等于零，亦即$f'(\alpha)\neq 0$（为节省篇幅，证明从略），由此可知，$f(\alpha)$不存在极值。

3）$f(\alpha)$是α的单调减函数。

事实上，我们已知$f(\alpha)$具有下列性质：

①$f(\alpha)$连续光滑；②$f(\alpha)$无极值；③$f(\alpha)$是初等函数；④先验权不准确($\alpha\neq 1$)。

由①，②，③推知：$f(\alpha)$是α的单调函数，或是单调减函数或单调增函数。

采用反证法，不妨设$f(\alpha)$是α的单调增函数，并且令：

$$g(\alpha)=V^{0T}P^0V^0/r=f(\alpha)/r, \tag{27}$$

$$h(\alpha)=V^TPV/r_1+\alpha r_2. \tag{28}$$

易知：

$$V^TPV=f(1), \tag{29}$$

于是

$$h(\alpha)=f(1)/r_1+\alpha r_2. \tag{30}$$

将(27)、(30)式比较，已假设$f(\alpha)$是单调增函数，那么$g(\alpha)$亦是单调增函数，而$h(\alpha)$则是单调减函数，又因为$h(\alpha)$和$g(\alpha)$都是单位权方差的估值所应服从的变化规律的函数表达式，因此，$g(\alpha)$与$f(\alpha)$有且仅有一个交点：$\alpha=1$，但这与④是矛盾的，因而原假设不成立，自然$f(\alpha)$是α的单调减函数。

因此有如下结论：残差平方和是权因子α的单调减函数。而且，$f(\alpha)$的形状亦类似于反比曲线函数形状。

4 权因子的确定

通过前面的分析，我们得到了单位权方差估值所遵循的变化规律的两个函数的表达式：

$$\hat{\delta}_0^2=f(\alpha)/r, \tag{31}$$

$$\hat{\delta}_0^2=f(1)/(r_1+\alpha r_2). \tag{32}$$

亦即

$$\left.\begin{aligned} h(\alpha)&=f(1)/(r_1+\alpha r_2) \\ g(\alpha)&=f(\alpha)/r \end{aligned}\right\}. \tag{33}$$

因为$h(\alpha)$，$g(\alpha)$都是反映单位权方差估值与权因子α的变化规律的函数关系，因而$h(\alpha)$和$g(\alpha)$有着某些共同之处，$h(\alpha)$，$g(\alpha)$都是α的单调减函数，$h(\alpha)$是反比曲线，而$g(\alpha)$则类似于反比曲线函数形状。二者图形如图1。

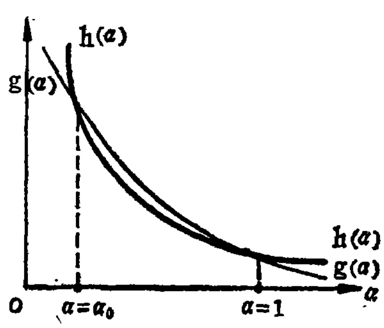

图 1

对(33)式作如下分析：

1）由于$h(\alpha)$和$g(\alpha)$本身具有的单调减函数的特性，因而$h(\alpha)$与$g(\alpha)$至多有两个交点；

2）当认为先验权是准确的时候，有且仅有一个交点，即$\alpha=1$；

3）所谓验后权估计，就是通过平差而求得另一个交点，即$\alpha=\alpha_0$。

就是说，在$\alpha=\alpha_0$处，有：

$$g(\alpha_0)=h(\alpha_0)\ . \tag{34}$$

由(33)、(34)式得：

$$\alpha_0=\left(\frac{rf(1)}{f(\alpha_0)}-r_1\right)\Big/r_2\ . \tag{35}$$

式 (35) 就是权因子的计算公式。

由(35)式知，α_0 的求解是不太容易的，因为 α_0 的解是隐式解，但可以采用对分法来求解。

对两类观测值而言，α_0或大于1或小于1，设 $\alpha_0<1$，实际上一般总能使 $\alpha_0<1$。

这种算法的具体步骤是：

1）第一次平差。以P_1，P_2参加平差，求得r_1，r_2以及$V_1^TP_1V_1$，$V_2^TP_2V_2$，V^TPV。

令 $$B_et_{ao}=(V_2^TP_2V_2/r_2)\Big/(V_1^TP_1V_1)/r_1\ , \tag{36}$$

一般$B_et_{a0}<1$ 。

2）第二次平差。令 $\alpha_1=B_et_{ao}$，使 $P_1^{0(1)}=P_1$，$P_2^{0(1)}=\dfrac{1}{\alpha_1}P_2$，进行第二次平差。

3）令$$F(\alpha)=h(\alpha)-g(\alpha)\ , \tag{37}$$

又令 $\alpha_2=(0+\alpha_1)/2$，仍使 $P_1^{0(2)}=P_1$，$P_2^{0(2)}=\dfrac{1}{\alpha_2}P_2$，进行第三次平差。

4）$F(\alpha_1)=h(\alpha_1)-g(\alpha_1)$，　　$F(\alpha_2)=h(\alpha_2)-g(\alpha_2)$。

若　$F(\alpha_1)\cdot F(\alpha_2)<0$，则　$\alpha_2<\alpha_0<\alpha_1$.

若　$F(\alpha_1)\cdot F(\alpha_2)>0$，则　$0<\alpha_0<\alpha_2$.

5）令 $\alpha_3=(0+\alpha_2)/2$　$(0<\alpha_0<\alpha_2)$，或$\alpha_3=(\alpha_1+\alpha_2)/2$　$(\alpha_2<\alpha_0<\alpha_1)$，进行平差，重复步骤3）、4），直至满足 $F(\alpha_k)/[h(\alpha_k)+g(\alpha_k)]/2<0.01$为止。

实际上，采用人机对话形式，还可减少计算工作量。

5 算　　例

算例1：例题来源于〔2〕。参见图2。其中的一些已知数据是：边角网中，已知测角数$n_1=12$，测角中误差$m_\beta=\pm1''.5$，测边数$n_2=6$，测边中误差$m_S=\pm2$cm，未知数 $t=4$。

计算结果见表1。

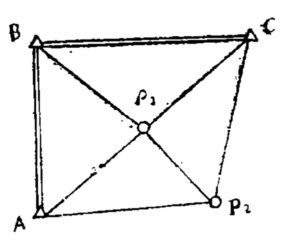

图　2

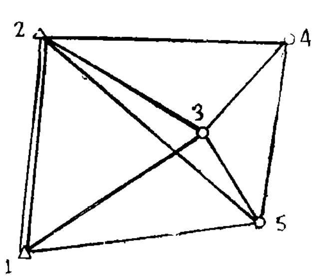

图　3

$V^TPV = 49.6029$ $R1 = 9.9062$ $R2 = 4.0939$ **表 1**

HELMERT				WF		
S01**2/S02**2	ALFA′	$H(Y)'$	$G(Y)'$	ALFA	$H(Y)$	$G(Y)$
1.043	0.9583	3.5867	3.5865	0.96923	3.57524	3.57491
1.023	0.9372	3.60935	3.6095	0.9440	3.60203	3.60205
1.011	0.9270	3.6204	3.6014			

$V^TPV = 4.35712$ $R1 = 9.135$ $R2 = 5.865$ **表 2**

HELMERT				WF		
S01**2/S02**2	*ALFA′	$H(Y)'$	$G(Y)'$	ALFA	$H(Y)$	$G(Y)$
10.391	0.09627	0.449	0.555	0.25779	0.40969	0.38862
0.2822	0.2172	0.4186	0.4088	0.1300	0.44023	0.49083
1.5702	0.2444	0.423	0.394	0.1925	0.42450	0.42542
0.8153	0.2497	0.41107	0.3915			
1.0897	**0.25069	0.4109	0.39099			
0.9633	0.2514	0.4107	0.3906			
1.0162	0.2537	0.4102	0.3896			

* 这一栏的 α_0' 值按大小排列

** 0.25069 是对应于 Helmert 法收敛时的 α_0' 值

算例 2：已知工程边角网中，方向数 $n_1 = 18$，方向中误差 $m_r = \pm 1''.0$，边数 $n_2 = 8$，$m_S = 0.9\text{cm} + 3.7\text{ppm}$；参见图 3，计算结果见表 2。

从表 1、表 2 的结果可以看出：

1）用权因子法(WF法)求得的 $h(\alpha)$，$g(\alpha)$的交点 α_0 均不是 Helmert 法所要求的迭代收敛点(即要求$S_{01}^2/S_{02}^2 = 1$时相应的 α 值)。

算例 1：WF法 $\hat{\sigma}_0^2 = 3.60203$，$\alpha_0 = 0.9440$.

Helmert 法 $\hat{\sigma}_0^2 = 3.6204$，$\alpha_0' = 0.927$.

算例 2：WF 法 $\hat{\sigma}_0^2 = 0.4254$，$\alpha_0 = 0.1925$.

Helmert 法 $\hat{\sigma}_0^2 = 0.39099$，$\alpha_0' = 0.25069$.

于是，我们提出Helmert 法中要求 $S_{01}^2/S_{02}^2 = 1$是否合理？对此，作出如下解释：从 WF 法和Helmert 法的比较过程中，可以看出二者的根本区别在于Helmert 法要求的是两个估值相等，因而是统计意义上的相等；而WF 法则是要求同一个估值的两个函数相等，即求函数的交点，因而是严格的数学相等。

因此，两个估值在统计意义上的相等，只要这两个估值通过了统计假设检验，我们就认为这两个估值相等。于是，我们认为 Helmert 法中要求$S_{01}^2/S_{02}^2=1$是不完全合理的。但是，**由于这两个估值S_{01}^2、S_{02}^2的统计属性，例如它们的分布函数等，我们目前尚不清楚，要进行假设检验是困难的，**所以，当我们还不能找到比这一要求更为合理的根据时，要求$S_{01}^2/S_{02}^2=1$**仍然是比较合理的，**这一要求的存在是必要的。

然而我们所介绍的 WF 法却弥补了上述缺陷。WF 法利用函数相等求交点的形式，使得比 Helmert 法更有理论根据，因而也更为合理。

2）由于 Helmert 法要求 $S_{01}^2/S_{02}^2=1$ 不是很合理的，将会导致单位权方差的估值是有偏的。

显然，Helmert 法是无法给出证明的，因为 Helmert 法本身是一个完整的自封闭系统。然而，利用 WF 法，我们则有足够的认识。

从(10)式知，$D_{\hat{x}}$ 的迹，即 $\mathrm{tr}\,D_{\hat{x}}$ 是 α 的直线函数，α越小，$\mathrm{tr}\,D_{\hat{x}}$ 亦越小；α 越大，则 $\mathrm{tr}D_{\hat{x}}$ 越大。

而从（32）式，随着 α 的增大，则 $\hat{\sigma}_0^2$减小；随着 α的减小，$\hat{\sigma}_0^2$却增大。

综合(10)、(32)式，$\mathrm{tr}\,D_{\hat{x}}$ 和 $\hat{\sigma}_0^2$之间对 α 的要求有着相互制约和互为补偿的性质。这表明：Helmert 法可能要求$\hat{\sigma}_0^2\,\mathrm{tr}\,N^{-1}$保持不变，而不能保证 $\hat{\sigma}_0^2$的无偏性和$\mathrm{tr}\,D_{\hat{x}}$（即 $\sigma_0^2\mathrm{tr}\,N^{-1}$）的最小性；而 WF 法则是保证 $\hat{\sigma}_0^2$ 的无偏性和 $\mathrm{tr}\,D_{\hat{x}}$ （即 $\sigma_0^2\,\mathrm{tr}\,N^{-1}$）的最小性，却不能保证 $\hat{\sigma}_0^2\mathrm{tr}\,N^{-1}$的不变性。

3）负方差问题是一个无法或难以解释的现象。目前许多方差分量估计的文献都在尽力探讨和避免负方差问题，但都还没有得到合理的解释和满意的解决。

本文所采用的WF法则以极其简洁的求函数交点的办法解决了这个问题：不存在负方差。这是因为两个恒为正值的单调减函数的交点永不可能出现负值的缘故。

利用权因子概念，对所出现的负方差作一个较为合理的解释：当函数交点 $\alpha_0\to 0$ 时，正确权 $P_2^0=\frac{1}{2}P_2\to\infty$，即第二类观测值基本上是作为已知的起始数据，不必考虑其较小的误差。这一解释与〔3〕的看法是一致的：“当出现负方差时，可以认为相应这一水平的观测的方差就是零（而相应的其权为无穷大）”。

6 结 束 语

本文主要是阐述用权因子（WF法）进行方差分量估计的基本原理和方法。这种方法对目前方差分量估计中存在的某些问题能给出比较好的解释，且比现行的Helmert 法简便和实用，显示了它一定的优越性。但由于本文算例偏于简单，WF法和Helmert 法结果之间差异的分析尚不够深入等原因，本文所提出的WF法及其要解决的问题，尚需进一步地深入研究。

参 考 文 献

〔1〕 K R Koch. Parameterschätrung und Hypothesentests in Linearen Modellen. Dümmler, Bonn: 1980.

〔2〕 王松桂. 线性模型的理论及其应用. 安徽教育出版社, 1986.

The Method of Weight Factor for Variance Component Estimation

Wu Xiaoqing

Abstract

This paper gives the method of Weight Factor(WF) for variance component estimation.

According to Weight Factor, some questions, for example, negative variance are discussed. And comparing the method of WF with that of Helmert, some valuable ideas have been got.

Given examples show the method is simple and feasible.

[Key words] method of Weight Factor; negative variance; variance component estimation