

变形监测网优化设计的一种新算法

张正禄 李晓东

摘 要

本文提出了主要按灵敏度准则进行变形监测网二类优化设计的一种新算法——灵敏度准则矩阵法,通过理论推导和算例分析,说明了该算法的可行性和与精度优化法相比较的有效性,根据该法所编写的程序可用于经典自由网和秩亏自由网变形监测设计及对已有网的评价和改善。

【关键词】 灵敏度; 优化设计; 变形监测网

引 言

变形监测网的优化设计是变形测量和变形分析的基础,对于变形监测网来说,除精度、可靠性和费用外,灵敏度是衡量其质量的重要指标。所谓灵敏度是指监测网在给定的误差概率下发现变形的能力^[1]。由于变形监测的目的在于证明被监测对象是否存在变形,因此,用灵敏度作为监测网优化设计的主要准则最为合理。本文将从灵敏度的有关理论出发,提出合理地缩减位移向量 d 的协因数阵 Q_{dd} 的特征值,根据网的灵敏度要求构成准则矩阵,并考虑可靠性和费用准则,将优化设计化为二次规划问题,确定出既满足灵敏度要求又满足可靠性要求的观测值优化权。

1 变形监测网的灵敏度

由高斯-马尔柯夫模型

$$L \sim N(AX, \sigma_0^2 P^{-1}) \quad (1)$$

出发,按最小二乘原理可得坐标未知数向量 X 和单位权方差的估值:

$$\hat{X} = Q_{xx} A^T P L, \quad (2)$$

$$\hat{\sigma}^2 = V^T P V / f. \quad (3)$$

上面公式中， \mathbf{L} 为服从多维正态分布的观测值向量； \mathbf{A} 为图形矩阵； \mathbf{P} 为观测值的权阵； f 为多余观测数； \mathbf{V} 为改正数向量。在秩亏网中， \mathbf{Q}_{xx} 为 $\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A}$ 的伪逆。

对监测网进行周期观测，可得到各周期按式(2)、(3)计算得到的未知数向量及其协因数阵。一般在作监测网优化设计时，假设各周期为不变设计，由[1]可知，监测网的灵敏度超椭圆方程可由平均间隙法^[2]导出：

$$\mathbf{d}_0^T \mathbf{Q}_{dd}^+ \mathbf{d}_0 = \sigma_0^2 \delta_0^2 \quad (4)$$

式中， \mathbf{d}_0 ：在给定的显著水平 α_0 和检验功效 β_0 下两周期位置向量的显著性变形；

$\mathbf{Q}_{dd} = \mathbf{Q}_{xx1} + \mathbf{Q}_{xx2} = 2\mathbf{Q}_{xx}$ ：变形向量的协因数阵，按秩亏网设计时，为秩亏数 $d = u - r$ 的奇异阵；

σ_0^2 ：先验单位权方差；

δ_0^2 ：非中心 F_{r, ∞, δ^2} 分布的非中心参数的下界值（或用 ω_0 表示，参见图1）。

通常，对 \mathbf{Q}_{dd} 作谱分解来确定变形监测网的灵敏度指标，即：

$$\mathbf{Q}_{dd} = \mathbf{S}\mathbf{\Lambda}\mathbf{S}^T \quad (5)$$

其中

$\mathbf{S} = (\mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2 \cdots \mathbf{S}_r \cdots \mathbf{S}_u)$ ：模矩阵；

$\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_r \hat{0} \cdots \hat{0})$ ：谱矩阵。

λ 为 \mathbf{Q}_{dd} 的特征值； $\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_u$ 为相应的特征向量。在(4)式中，相应于 δ_0^2 的变形向量 \mathbf{d}_0 用

$$\mathbf{d}_0 = a_0 \mathbf{g} \quad (6)$$

表示，式中 a_0 表示 \mathbf{d}_0 的模； \mathbf{g} 表示代表 \mathbf{d}_0 方向的单位向量（又称形式向量），即：

$$a_0 = \|\mathbf{d}_0\|,$$

$$\|\mathbf{g}\| = 1.$$

将(6)式代入(4)式并整理得：

$$a_0 = \frac{\sigma_0 \delta_0}{\sqrt{\mathbf{g}^T \mathbf{Q}_{dd}^+ \mathbf{g}}} \quad (7)$$

当变形监测网要求监测的变形向量 \mathbf{d}_D 按(6)式分解并按上式计算得到的值 a_D 大于或等于 a_0 时，则认为所设计的网在确定的概率 α_0, β_0 下能发现所要求监测的变形向量（其模为 a_D ）：

$$\mathbf{d}_D = a_D \mathbf{g}, \quad a_D = \|\mathbf{d}_D\| \geq a_0 \quad (8)$$

a_0 被定义为监测网对于变形形式向量 \mathbf{g} 的灵敏度。不难看出，灵敏度与概率 α_0, β_0 及形式向量的方向有关，与网形和观测值的权有关（由 \mathbf{Q}_{dd} 知）。将(5)式代入(7)式并根据特征向量的性质，可得在最大特征值 λ_{max} 和最小特征值 λ_{min} 所对应的特征向量 \mathbf{S}_1 和 \mathbf{S}_r （特征值按从大到小排列）方向所能发现的变形向量为：

$$\mathbf{d}_{max}^0 = a_{max} \mathbf{S}_1 = \sigma_0 \delta_0 \sqrt{\lambda_{max}} \mathbf{S}_1, \quad (9)$$

$$\mathbf{d}_{min}^0 = a_{min} \mathbf{S}_r = \sigma_0 \delta_0 \sqrt{\lambda_{min}} \mathbf{S}_r.$$

\mathbf{S}_r 的方向称为监测网的最不利监测方向； \mathbf{S}_1 与最大特征值平方根的乘积称为网的主元^[3]。

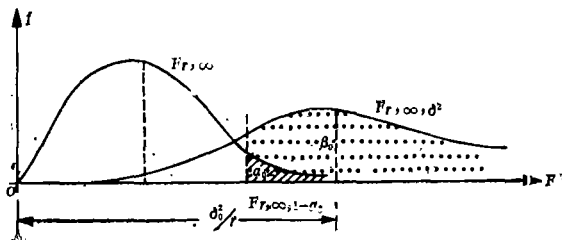


图1 中心F-分布和非中心F-分布

本文根据上述理论，由 \mathbf{d}_D 与 \mathbf{S}_i 之间的关系来构成准则矩阵 $\tilde{\mathbf{Q}}_{d,d}$ 。

在秩亏网情况下， $\mathbf{Q}_{d,d}$ 有 d 个特征值为零（见 (5) 式），它们所对应的特征向量构成 $\mathbf{Q}_{d,d}$ 的零空间的一组基。当形式向量属于零空间时，按 (7) 式计算的灵敏度值 a_0 趋于无穷大，即这种变形不能通过检验发现。对于秩亏的测边网来说，这些向量代表网的整体平移和旋转；若是测角网，还包括整体均匀缩放变形。

2 按灵敏度要求构造准则矩阵

由 (7) 式可见，当变形向量的大小和方向确定时，可根据先验单位权中误差 σ_0 ，非中心参数下界值 δ_0^2 和网的图形条件计算 $\mathbf{Q}_{d,d}$ 的准则矩阵 $\tilde{\mathbf{Q}}_{d,d}$ 。一般采用奇异值分解法。

由 (5) 式得：

$$\mathbf{Q}_{d,d}^+ = \mathbf{S} \mathbf{\Lambda}^+ \mathbf{S}^T = \sum_{i=1}^r \frac{1}{\lambda_i} \mathbf{S}_i \mathbf{S}_i^T \quad (10)$$

(7) 式中的二次型可表示为：

$$\mathbf{g}^T \mathbf{Q}_{d,d}^+ \mathbf{g} = \sum_{i=1}^r \frac{1}{\lambda_i} (\mathbf{g}^T \mathbf{S}_i) (\mathbf{S}_i^T \mathbf{g}) \quad (11)$$

$$\text{其中} \quad \|\mathbf{g}\| = \|\mathbf{S}_i\| = 1 \quad (12)$$

$$\text{令} \quad f_i = \mathbf{S}_i^T \mathbf{g} \quad (13)$$

$$\text{则} \quad \mathbf{g}^T \mathbf{Q}_{d,d}^+ \mathbf{g} = \sum_{i=1}^r f_i^2 \frac{1}{\lambda_i} \quad (14)$$

定义 f_i^2 为特征值 λ_i 的灵敏度影响系数，显然：

$$f_i = (\mathbf{g}, \mathbf{S}_i) = \cos \alpha_i \quad (15)$$

α_i 表示单位化形式向量与特征向量之间的夹角。

用设计要求监测的变形向量 \mathbf{d}_D 作为显著性变形向量的下界值 \mathbf{d}_0 ，用相应的灵敏度 a_0 来确定 (14) 式中的特征值。由 (7) 和 (14) 式，当

$$\sum_{i=1}^r f_i^2 \frac{1}{\lambda_i} \geq \frac{\sigma_0^2 \delta_0^2}{a_0^2} = \frac{1}{\lambda_0} \quad (16)$$

成立时，表示 \mathbf{d}_D 可通过假设检验（在 α_0, β_0 下）发现。

$$\text{因为} \quad a_0 = \sigma_0 \delta_0 \sqrt{\lambda_0} \quad (17)$$

故定义 λ_0 为灵敏度特征值，它表示形式向量 \mathbf{g} 所对应的一个伪特征值。将上式代入 (6) 式，有：

$$\mathbf{d}_0 = \sigma_0 \delta_0 \sqrt{\lambda_0} \mathbf{g} \quad (18)$$

从不变设计出发，设观测值之间相互独立，先以等权观测为起始权，对矩阵

$$\mathbf{Q}_{d,d}^+ = \frac{1}{2} \mathbf{Q}_{xx}^+ = \frac{1}{2} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \quad (19)$$

按(10)式进行谱分解,按(15)式计算特征值的灵敏度影响系数,若(16)式不成立,则应缩减特征值。若(16)式在优化前就成立,说明设计精度偏高。

Crosilla 提出了按比例缩减特征值的方法^[4],Wimmer采用缩减较大特征值的方法^[5]。经试验,均不适合变形监测网的情形。前者基本保持灵敏度超椭球的“形状”不变,相当于普遍提高观测值的精度,后者改变了超椭球的“形状”,使精度分布更均匀,故适合对于大地网的优化。

本文根据特征值的灵敏度影响系数 f_i 的大小来缩减特征值,其几何意义是:与形式向量 \mathbf{g} 愈平行的特征向量,相对应的特征值对灵敏度的影响愈大,愈应缩减大一些。这一思想顾及了监测网所监测变形向量的方向性,从理论上讲,更为合理和严密。

由(14)知,缩减各特征值,会使 $\mathbf{g}^T \mathbf{Q}_{dd}^{-1} \mathbf{g}$ 的值增大。设特征值的缩减量分别为 C_1, C_2, \dots, C_r ,在满足灵敏度要求的情况下,下列等式应成立:

$$\frac{f_1^2}{\lambda_1 - C_1} + \frac{f_2^2}{\lambda_2 - C_2} + \dots + \frac{f_r^2}{\lambda_r - C_r} = \frac{\sigma_0^2 \delta_0^2}{a_0^2} = \frac{1}{\lambda_0} \quad (20)$$

为了使与 \mathbf{g} 愈平行的特征向量所对应的特征值的缩减量愈大,以 f_i^2 为权,设未知数为 E_x ,则:

$$C_i = f_i^2 E_x \quad (21)$$

代入(20)式得方程:

$$\sum_{i=1}^r \frac{f_i^2}{\lambda_i - f_i^2 E_x} = \frac{1}{\lambda_0} \quad (22)$$

用迭代法解之,可得未知数 E_x 。缩减后的特征值为:

$$\tilde{\lambda}_i = \lambda_i - f_i^2 E_x \quad (23)$$

保持特征向量不变,准则矩阵可表示为:

$$\tilde{\mathbf{Q}}_{dd} = \mathbf{S} \tilde{\Lambda} \mathbf{S}^T \quad (24)$$

$$\text{其中 } \tilde{\Lambda} = \text{diag}(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_r, 0 \dots 0) \quad (25)$$

由于 $\tilde{\mathbf{Q}}_{dd}$ 是按灵敏度特征值 λ_0 计算并构成的,故一定满足灵敏度的要求,称之为灵敏度准则矩阵。

3 构造优化数学模型

在求得按灵敏度要求的准则矩阵 $\tilde{\mathbf{Q}}_{dd}$ 后,即可按(19)式反求满足灵敏度要求的观测值的权分配:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} = 2 \tilde{\mathbf{Q}}_{dd} \quad (26)$$

由于 \mathbf{P} 为对角阵,故可将上式化为方程组:

$$(\mathbf{A}^T \odot \mathbf{A}^T) \mathbf{p} = \mathbf{q} \quad (27)$$

式中 \odot : Khatri-Rao 积符号;

$(\mathbf{A}^T \odot \mathbf{A}^T)$: 称缩减的Khatari-Rao 积, 当矩阵 \mathbf{A} 为 $n \times u$ 维时, 其维数为 $\frac{1}{2}u(u+1) \times n$;

$\mathbf{p} = \text{vecd}(\mathbf{P})$: 将 \mathbf{P} 阵按对角拉直;

$\mathbf{q} = \text{vech}(2\tilde{\mathbf{Q}}_{\text{d}}^+)$: 将对称矩阵 $(2\tilde{\mathbf{Q}}_{\text{d}}^+)$ 按列对下三角阵拉直。

一般, 因方程个数 $\frac{1}{2}u(u+1)$ 大于未知数个数 n , 故(27)式无相容解, 但存在最小二乘解。采用改进的准则矩阵逆的直接逼近法, 可求得满足灵敏度要求的最优解。

在只考虑灵敏度准则的情况下, 由于个别观测值的精度要求过高; 或一些观测值的权为零甚至是负数而无法确定是否应该观测, 当去掉这些观测值时, 可能造成形亏。故所得到的观测值权分配方案可能根本无法实现, 因此, 在进行监测网优化设计时, 不能仅考虑灵敏度准则, 必须加上其它约束。

一个最简单而有效的约束是观测值的权必须大于或等于零, 于是构成如下优化模型:

$$\begin{cases} \min (\mathbf{U}\mathbf{p} - \mathbf{q})^T (\mathbf{U}\mathbf{p} - \mathbf{q}) \\ \text{s.t. } \mathbf{p} \geq 0 \end{cases} \quad (28)$$

式中

$$\mathbf{U} = \mathbf{A}^T \odot \mathbf{A}^T \quad (29)$$

此外, 还可加费用约束和可靠性约束。对于费用, 一般用观测值的权总和小于或等于某一给定的限值, 表达为:

$$\mathbf{1}^T \mathbf{p} = w \quad (30)$$

其中 $\mathbf{1}^T = (1 \ 1 \cdots 1)$ 。

可靠性约束可按单个观测值的权的变化与其多余观测分量的变化之间的下述关系^[6]进行:

$$p'_i = \frac{r_i(1-r'_i)}{r'_i(1-r_i)} p_i \quad (31)$$

式中: p_i , r_i 分别为第 i 个观测值的初始权及其多余观测分量; p'_i , r'_i 分别为变化后的值。根据变形监测网的重要程度和平均多余观测分量的大小, 可以大致确定观测值的最小多余观测分量:

$$r_{\min} = \max(r_{\min}, r_{E\min}) \quad (32)$$

其中 r_{\min} 和 $r_{E\min}$ 分别表示按网的内部可靠性和外部可靠性计算得到最小多余观测分量。在计算时, 可参考下列取值^[8]

$$\nabla_0 l_i \sim (5 \sim 8) \sigma_{l_i} \quad , \quad \delta_{0_i} \sim (8 \sim 10) \quad .$$

即观测值中可发现的最小粗差为观测值中误差的 $6 \sim 8$ 倍; 衡量外部可靠性的影响因子为 8 到 10 。用 r_{\min} 代替(31)式中的 r'_i , 即可得可靠性约束:

$$p'_i \leq \frac{r_i(1-r_{\min})}{r_{\min}(1-r_i)} p_i \quad (33)$$

将(30)、(33)式的约束条件用

$$\mathbf{HP} \leq \mathbf{b} \quad (34)$$

表示, 则优化数学模型 (28) 式可扩展为:

$$\begin{cases} \min(\mathbf{Up} - \mathbf{q})^T(\mathbf{Up} - \mathbf{q}) \\ \text{s.t. } \mathbf{Hp} \leq \mathbf{b} \\ p \geq 0 \end{cases} \quad (35)$$

用二次规划法解上述模型, 即可得到既满足灵敏度要求, 又满足可靠性、费用等要求的最优解。必须指出, 由于初始权不可能给得合理, 所以要通过逐次迭代逼近的方法, 反复构成新的改进后的灵敏度准则矩阵, 直至满足某一给定的逼近质量指标为止, 本文采用

$$\|\mathbf{d}\| = \|\text{vec}(2(\mathbf{A}^T\mathbf{PA})^+ - \tilde{\mathbf{Q}}_{dd})\| \leq E_0, \quad (36)$$

E_0 为一个足够小的正数。

4 算例及分析

图 2 为指导某一大型粒子加速器工程地下隧道 (虚线所示) 开挖的高精度实测地面网, 同时兼做工程的监测网, 用 ME 3000 施测了 21 条边, 测边精度为 $\pm 1.35\text{mm}$, 要求通过重复观测, 能发现隧道横向 (图中箭头所示) 方向 $\pm 1\text{mm}$ 的变形, 所以得 $a_D = 2.45\text{mm}$ 。

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_D &= (d_{x1}, d_{y1}, \dots, d_{x7}, d_{y7}) \\ &= (0.906, -0.423, 0.707, 0.707, -0.996, -0.087, -0.985, \\ &\quad -0.174, 0.000, 0.000, -0.342, -0.940, -0.342, -0.940) \end{aligned}$$

取 $\alpha_0 = 0.05$, $\beta_0 = 0.80$, 由诺模图^[3]查得 $\delta_0 = 4.12$ 。

在等权观测的情况下, 由 (7) 式得 $a_0 = 3.20\text{mm}$, 因 a_0 大于 a_D , 不满足要求。用模型 (28) 式进行迭代优化计算, 结果见表 1。表 1 中列出了 λ_{\max} , λ_{\min} , $\text{tr}(\mathbf{Q}_{dd})$, a_0 和逼近质量指标 $\|\mathbf{d}\|$ (36 式)。由表中看出, 经 10 次迭代, 灵敏度 a_0 即可趋近要求值 a_D , 同时, 随迭代次数的增加, λ_{\max} , λ_{\min} 和 $\text{tr}(\mathbf{Q}_{dd})$ 都趋于一定的值。

表 1

迭代次数	λ_{\max}	λ_{\min}	$\text{tr}(\mathbf{Q}_{dd})$	a_0	$\ \mathbf{d}\ $
1	1.243 8	0.285 7	6.956 2	3.201 9	0.34×10^{-1}
2	1.143 7	0.225 2	6.836 2	2.899 0	0.10×10^{-1}
3	1.127 9	0.184 6	6.719 1	2.683 6	0.37×10^{-2}
4	1.136 7	0.160 3	6.635 8	2.552 0	0.96×10^{-3}
5	1.155 1	0.149 2	6.593 6	2.491 7	0.20×10^{-3}
6	1.167 5	0.144 6	6.575 1	2.467 0	0.35×10^{-4}
7	1.173 2	0.142 7	6.567 1	2.456 5	0.59×10^{-5}
8	1.175 5	0.141 9	6.563 8	2.452 3	0.86×10^{-6}
9	1.176 5	0.141 6	6.562 5	2.450 6	0.13×10^{-6}
10	1.176 8	0.141 5	6.562 1	2.450 0	0.20×10^{-7}

为了比较按灵敏度准则与按精度准则进行监测网优化的结果，我们采用下述精度优化模型：

$$\begin{cases} \text{tr}(\mathbf{Q}_{xx}) = \min \\ \sum p_i = \text{常数} \end{cases}$$

对该网进行了二类优化。将上述两种优化模型的观测值优化权列于表 2。由表 2 可见，按灵

表 2

观测边号	起点—终点	按灵敏度优化的权	按精度优化的权	观测边号	起点—终点	按灵敏度优化的权	按精度优化的权
1	1—2	0.902 7	2.177 2	13	4—6	0.948 5	1.448 1
2	1—3	1.523 3	1.522 1	14	5—6	0.518 6	1.081 5
3	1—4	1.815 0	0.830 6	15	5—7	0.416 2	1.059 9
4	1—5	1.462 8	1.180 3	16	6—7	0.000 0	1.068 1
5	2—6	2.698 1	1.087 4	17	2—5	1.850 7	0.918 7
6	2—7	2.877 4	0.960 3	18	2—3	1.426 9	1.635 0
7	3—4	0.589 1	1.439 1	19	1—5	1.151 0	0.996 3
8	3—5	1.080 1	1.471 6	20	1—7	1.542 1	1.223 1
9	3—7	1.054 5	1.164 1	21	2—4	2.415 5	1.330 8
10	3—6	1.041 7	1.135 5	$\sum p$		26.580 8	26.580 8
11	4—5	0.318 0	1.363 7	a_0		2.449 6	2.863 9
12	4—7	0.948 6	1.487 4	等权观测时	$a_0 = 3.20$	$\sum p = 21$	

敏度准则与按精度准则优化的结果之间存在较大差异。例如 1 号边对精度贡献最大，而对灵敏度影响较小，6 号边对灵敏度贡献较大，而对精度影响较小。从表中最后一行所列出的灵敏度值 a_0 可看出，按灵敏度准则进行监测网的二类优化设计比按精度准则更为有效。

图 2 和图 3 分别为按灵敏度准则和精度准则的优化权观测时，各点的点位误差椭圆和灵敏度椭圆。由图可见，按精度准则优化时，各点间的点位误差椭圆或灵敏度椭圆大小相差不大，且接近圆；按灵敏度准则优化时，则各点间的差异较大，且同一点上椭圆的长短半轴相差也较显著，但各点的误差椭圆或灵敏度椭圆在变形方向上的投影明显地减小，短轴与变形方向更加一致，这也说明了用本文所提出的优化算法的特点。

在不作优化按等权观测时，权之和为 21， a_0 为 3.20，如果不改变权的分配关系，为了达到灵敏度要求 ($a_D = 2.45$)，需增加权 $(3.2/2.45)^2 = 1.71$ 倍，权之和达 35.83，增加了 70%；若按精度优化，在优化权基础上还要增加权 1.36 倍，权之和为 36.22，与等权观测相当。而按灵敏度优化时，权只增加了 26%，相比之下，节约权 40~50% 左右。

此外，我们还按模型 (35) 式考虑了可靠性约束，其优化结果更趋合理，如第 16 条边的权不再为零 (参见表 2)，权的分配更均匀一些。总之，以灵敏度为主要准则进行变形监测网的优化设计是恰当的，它实质上是要求在特定方向上达到某一精度，因此，也可以说是一种特殊的精度准则。灵敏度是对变形而言，指变形的可发现性。

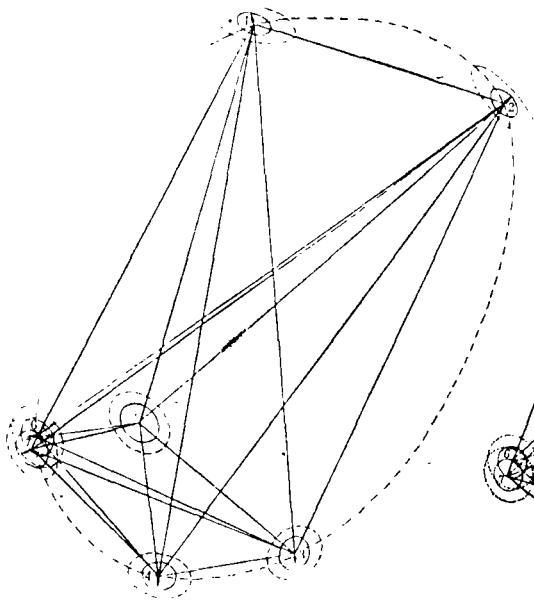


图2 按灵敏度优化结果

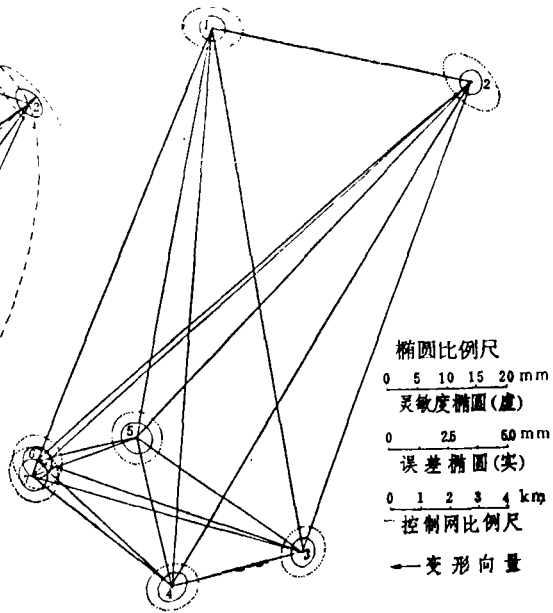


图3 按精度优化结果

使用灵敏度准则矩阵法进行监测网优化设计的前提是：已知所要监测的变形向量 d_D 。优化中观测值权的取整优化问题有待进一步研究。

参 考 文 献

- [1] 张正禄. 变形监测网的灵敏度分析. 武汉测绘科技大学学报, 1986(3).
- [2] Pelzer H. Zur Analyse Geodaetischer Deformationsmessungen. Dtsch. Geodact. Komm. Ser. C, 164, 1971.
- [3] Pelzer H. Geodaetische Netze in Landes und Ingenieurmessung. Konrad Wittwer, Stuttgart : 1985.
- [4] Crossilla E. A Criterion Matrix for the Second Order Design of Control Networks. FIG Proceedings, Survey Control Networks, Muenchen : 1982.
- [5] Wimmer H. Zur Gewichtsoptimierung einer Funktion der Unbekannten. ZfV, No. 11, 1983.
- [6] Muller H. Zur Beruecksichtigung der Zuverlaessigkeit bei der Gewichtsoptimierung geodaetischer Netze. ZfV, No. 4, 1986.

A New Method for the Optimization of

Monitoring Networks

Zhang Zhenlu Li Xiaodong

Abstract

Based on the main criterion of sensitivity a new method of SOD for the monitoring networks is proposed in this paper. Through theoretical study and analysis of examples it shows that this method is feasible and more effective than the optimization method according to precision criterion. The developed program can be used for the optimization design of both classical and free monitoring networks.

【Key words】 sensitivity; optimization design; deformation monitoring networks