DOI:10.13203/j.whugis1989.01.011

第14卷 第1期　　武汉测绘科技大学学报　　Vol.14 No.1
1989年 3月　Journal of Wuhan Technical University of Surveying and Mapping　Mar. 1989

模式识别之重心法则及其在地图制图中运用一例

冯　可　君

（湘潭市建设委员会）

摘　要

本文提出了比最大隶属度法则使用更广泛的重心法则。在模式识别中，此法则使用方便且利用了模糊子集的全部信息，因此比前者更精确。最后给出的实例证明了这点。

【关键词】 最大隶属度法则；重心法则

引　言

模式识别中直接识别方法是一类很重要的方法，它广泛采用最大隶属度方法，这种方法计算简单，使用方便。但这种方法正如〔1〕所指出的那样，它利用了隶属度中最大者，没有充分利用所得的模糊子集$\underset{\sim}{B}$带来的信息。另外，自然界某一事物（以下讨论全是模糊集情况，为节省篇幅，“模糊”二字省去），通过识别后其等级隶属度曲线一般如图1所示。其中V为等级，μ为隶属度。在特殊情况下，其等级隶属度曲线则如图2凸型或者图3凹型所示。最大隶属度法则仅仅大致适合于图2凸型曲线情况。对于图1及图3两种情况则会失

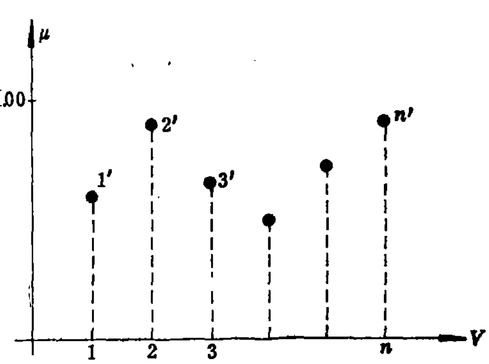

图　1

收稿日期：1988—04—25

去效力，甚至发生识别和判断的错误。所以有必要探讨意义更广泛的法则。

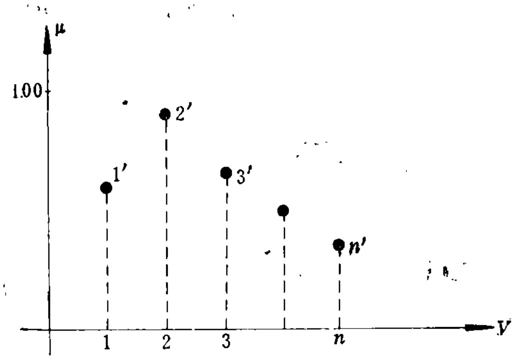

图 2

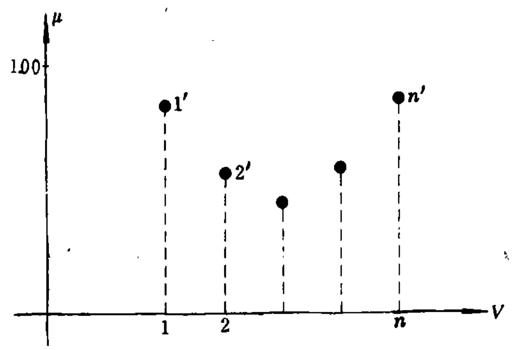

图 3

这里试图提出一种所谓“重心法则”。有了这种法则，可避免重新替换模糊算子的麻烦，在实践中具有很大的意义。大家知道，在综合评判过程中，$\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{R}$，其中$\underset{\sim}{R}$为评价矩阵，$\underset{\sim}{A}$为向量，$\underset{\sim}{B}$为等级向量。这种法则利用众所周知的物理学上求质点重心的原理，即把等级向量分级点看作一无重量直线上的质点（如果以区间分级，则其区间中点为分级点），其质量为其上的隶属度，其质量系的综合等级即重心所在区间的等级。

1 重心法则的数学模型

1.1 等级向量重心等级的计算

定理1 给定论域ν上的n个模糊子集$\underset{\sim}{A}_i(u)$（$i=1，2，\cdots，n$）为等级数，ν上全体模糊子集构成的类为$f(\nu)$。对于任意$u\in\nu$，$\underset{\sim}{A}_i(u)\in f(\nu)$，则其质量系重心等级（或者叫重心坐标）（图4）为：

$$I_G=\frac{\mu_{\underset{\sim}{A}_1(u)}\times 1+\mu_{\underset{\sim}{A}_2(u)}\times 2+\cdots+\mu_{\underset{\sim}{A}_n(u)}\times n}{\mu_{\underset{\sim}{A}_1(u)}+\mu_{\underset{\sim}{A}_2(u)}+\cdots+\mu_{\underset{\sim}{A}_n(u)}}. \tag{1}$$

为节省篇幅，以下将$\mu_{\underset{\sim}{A}_n(u)}$简记为$\mu_{\underset{\sim}{A}_n}$。

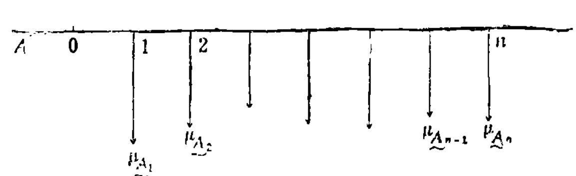

图 4

证明：第一步，当只有两个质点时，即$n=2$时（图5），根据力矩平衡原理，有

$$\overline{1I_G}\times\mu_{\underset{\sim}{A}_1}=\overline{I_G2}\times\mu_{\underset{\sim}{A}_2}, \tag{2}$$

但 $\overline{1I_G}=I_G-1$，$\overline{2I_G}=2-I_G$，代入（2）得：

$$I_G=\frac{\mu_{\underset{\sim}{A}_1}\times1+\mu_{\underset{\sim}{A}_2}\times2}{\mu_{\underset{\sim}{A}_1}+\mu_{\underset{\sim}{A}_2}}. \tag{3}$$

第二步：今设$n=K$时（1）式成立，要证明$n=K+1$时上式也成立。那么K个点质点重心坐标为

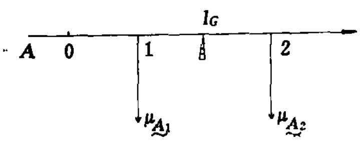

图 5

$$I_G^K=\frac{\mu_{\underset{\sim}{A}_1}\times1+\mu_{\underset{\sim}{A}_2}\times2+\cdots+\mu_{\underset{\sim}{A}_K}\times K}{\mu_{\underset{\sim}{A}_1}+\mu_{\underset{\sim}{A}_2}+\cdots+\mu_{\underset{\sim}{A}_k}}. \tag{4}$$

求$K+1$个质点1，2，…，K，$K+1$的重心坐标变为计算质点系1，2，3，…，K与质点（$K+1$）的重心坐标。所以有

$$I_G^{k+1}=\frac{(\mu_{\underset{\sim}{A}_1}+\mu_{\underset{\sim}{A}_2}+\cdots+\mu_{\underset{\sim}{A}_K})\times I_G^K+\mu_{\underset{\sim}{A}_{(K+1)}}\times(K+1)}{(\mu_{\underset{\sim}{A}_1}+\mu_{\underset{\sim}{A}_2}+\cdots+\mu_{\underset{\sim}{A}_K})+\mu_{\underset{\sim}{A}_{(K+1)}}}. \tag{5}$$

（4）式代入（5）式即得：

$$I_G^{K+1}=\frac{\mu_{\underset{\sim}{A}_1}\times1+\mu_{\underset{\sim}{A}_2}\times2+\cdots+\mu_{\underset{\sim}{A}_K}\times K+\mu_{\underset{\sim}{A}_{K+1}}\times(K+1)}{\mu_{\underset{\sim}{A}_1}+\mu_{\underset{\sim}{A}_2}+\cdots+\mu_{\underset{\sim}{A}_K}+\mu_{\underset{\sim}{A}_{K+1}}}.$$

根据第一步和第二步，对任意的自类数n，（1）式都成立。证毕。

1.2 重心等级的规定

我们采用下述不等式来定义I_G的等级：

$1<I_G\leqslant1.5$，则I_G属于第1级；

$1.5<I_G\leqslant2.5$，则I_G属于第2级：

…………

$(n-1).5<I_G\leqslant n.5$，则I_G属于第n级。

下面举一个实例说明此法的运用，并与最大隶属度法则进行比较。

2 实　　例

原始资料引自文献〔4〕。

1） 各指标各级别的聚类中心a_{it}°列于表1（参阅文献〔4〕）。

表 1

等级 / 指标	$\underset{\sim}{y}_1$（优）	$\underset{\sim}{y}_2$（良）	$\underset{\sim}{y}_3$（及）	$\underset{\sim}{y}_3$（差）
1. 数学基础	23	18	14	10
2. 地图内容	46	36	28	20
3. 图面整饰	23	18	14	10
总分	92	72	56	40

2） 通运计算得到x_{it}隶属于y_i的归一化隶属度全体组成的10×4阶模糊矩阵：

$$v_1=(u_{ij}^{(1)})_{10\times4}=\begin{pmatrix} 0.38 & 0.45 & 0.15 & 0.02 \\ 0.14 & 0.44 & 0.34 & 0.09 \\ 0 & 0.06 & 0.47 & 0.47 \\ 0.57 & 0.35 & 0.07 & 0.01 \\ 0.83 & 0.16 & 0.02 & 0 \\ 0.01 & 0.14 & 0.45 & 0.40 \\ 0.67 & 0.29 & 0.05 & 0 \\ 0.14 & 0.44 & 0.34 & 0.09 \\ 0.20 & 0.47 & 0.28 & 0.06 \\ 0.48 & 0.40 & 0.10 & 0.01 \end{pmatrix},$$

$$v_2=(u_{ij}^{(2)})_{10\times4}=\begin{pmatrix} 0.37 & 0.43 & 0.17 & 0.02 \\ 0.79 & 0.19 & 0.02 & 0 \\ 0.37 & 0.43 & 0.17 & 0.02 \\ 0.06 & 0.32 & 0.41 & 0.20 \\ 0.06 & 0.32 & 0.41 & 0.20 \\ 0 & 0.02 & 0.53 & 0.44 \\ 0.67 & 0.28 & 0.05 & 0 \\ 0.33 & 0.44 & 0.19 & 0.03 \\ 0.29 & 0.45 & 0.22 & 0.04 \\ 0.51 & 0.38 & 0.10 & 0.01 \end{pmatrix},$$

$$\nu_3=(u_{ij}^{(3)})_{10\times 4}=\begin{pmatrix} 0.39 & 0.46 & 0.14 & 0.01 \\ 0.28 & 0.49 & 0.20 & 0.03 \\ 0.83 & 0.16 & 0.01 & 0 \\ 0.39 & 0.46 & 0.14 & 0.01 \\ 0 & 0.04 & 0.48 & 0.48 \\ 0.04 & 0.33 & 0.44 & 0.18 \\ 0.69 & 0.28 & 0.03 & 0 \\ 0.78 & 0.20 & 0.02 & 0 \\ 0.12 & 0.46 & 0.34 & 0.08 \\ 0.49 & 0.41 & 0.09 & 0.01 \end{pmatrix}.$$

因本例各指标不等权，所以

$$\underset{\sim}{R}=(r_{ij})_{10\times 4}=(\sum_{t=1}^{3}a_t\cdot u_{ij}^{(t)})_{10\times 4}$$

$$=\begin{pmatrix} 0.38 & 0.44 & 0.16 & 0.02 \\ 0.50 & 0.33 & 0.15 & 0.03 \\ 0.39 & 0.27 & 0.21 & 0.13 \\ 0.27 & 0.36 & 0.26 & 0.11 \\ 0.24 & 0.21 & 0.33 & 0.22 \\ 0.01 & 0.13 & 0.49 & 0.37 \\ 0.68 & 0.28 & 0.05 & 0 \\ 0.40 & 0.38 & 0.19 & 0.04 \\ 0.23 & 0.46 & 0.27 & 0.06 \\ 0.50 & 0.39 & 0.10 & 0.01 \end{pmatrix}.$$

3） 重心法则运用

本例各指标重心坐标及其等级计算列于表2。

以A样本为例，其重心坐标即根据$\underset{\sim}{R}$矩阵中数值代入重心公式计算：

$$I_G=\frac{r_{11}\times 1+r_{12}\times 2+r_{13}\times 3+r_{14}\times 4}{r_{11}+r_{12}+r_{13}+r_{14}}$$

$$=\frac{0.38\times 1+0.44\times 2+0.16\times 3+0.02\times 4}{0.38+0.44+0.16+0.02}=1.82\ .$$

表 2

重心坐标与等级 / 样本	重心坐标	等级	按最大隶属度法则确定的等级	三指标相加总分
A	1.82	良	良	80
B	1.71	良	优	86
C	2.08	良	优	75
D	2.21	良	良	72
E	2.53	及	及或优	65
F	3.22	及	及	42
G	1.38	优	优	93
H	1.87	良	优	80
I	2.16	良	良	73
J	1.62	良	优	85

4） 结果分析

一个样本中每一指标重心坐标与全体样本这一指标平均重心坐标之差再与全体样本该指标标准差之比，所得之值称为标准分数，把各指标标准分数相加，即为标准总分。如果标准分数为负数，则说明该样本重心坐标低于该指标平均重心坐标。值越小，其等级越小，即越优。

我们选用总分相同的*A*与*H*及*B*与*J*，另外还有*C*，计算它们的标准总分，列于 表 3 。

表 3

指标 / 标准分 / 样本	1		2		3		总标准分
	原来	加权后	原来	加权后	原来	加权后	
A	-0.404	-0.404	-0.342	-0.684	-0.247	-0.247	-1.335
H	0.345	0.345	-0.228	-0.456	-0.979	-0.979	-1.090
B	0.350	0.350	-1.224	-2.448	0.043	0.043	-2.055
J	-0.635	-0.635	-0.674	-1.348	-0.454	-0.454	-2.437
C	1.714	1.714	-0.345	-0.690	-1.062	-1.062	-0.038

A，*B*，*H*，*J* 四样本均属于良级，*A* 与 *H* 虽然原来三指标总分均为80分，从计算的标准总分来看，*A* 仍优于 *H*。从表 2 重心坐标值的大小亦可看出这点。*J* 的总分比 *B* 还少 1 分，但 *J* 还优于 *B*。

按最大隶属度法则 *C*属于优级。但表 3 中总标准分最少，显然此结果是错误的。根据最

大隶属度法则，表 2 中E同时接近于及、优两级，也是荒谬的。由表 3 可知，重心法则提供了非常丰富的信息。

感谢天津纺织工学院数学教研组李洪兴副教授、贵州师范大学数学系陈世权副教授、西南交通大学数学系徐扬老师指导与帮助。

参 考 文 献

〔1〕 汪培庄．模糊集合论及其运用．上海科学技术出版社，1983．
〔2〕 王光远．论综合评判几种数学模型的实质与运用．模糊数学，1984（4）．
〔3〕 陈世权．一种聚类分析的模糊模式．模糊数学，1984（3）．
〔4〕 冯可君．一种新的Fuzzy聚类分析在制图组合指标分类中的应用．地图，1987（3）．

A Gravitational Law of the Pattern Recognition and an Example of Its Application in Cartography

Feng Kejun

(Committee of Construction in Xiang Tan)

Abstract

The gravrtational law proposed in this paper is to avoid the loss of information given by the fuzzy subset, which can be widely used in a variety of conditions. This law is a proper extension of the maximum law of the degree of membership, it possesses more accuracy in comparison with the later one.

Finally, the trial calculation is carried out in an example with this law and good results is obtained.

[Key words] maximum law of the degree of membership; gravitational law