DOI:10.13203/j.whugis1987.04.006

第12卷 第4期 武汉测绘科技大学学报 Vol.12 No.4
1987年 12月 Journal of Wuhan Technical University of Surveying and Mapping Dec. 1987

地图拓扑数据的自动组织

李 霖

摘 要

本文对地图上四种类型的拓扑关系——关联关系、邻接关系、重叠关系和同域关系及它们之间的相互关系作了简要说明，阐述了这四种类型拓扑关系的可计算性问题，即利用地图上的地理坐标数据可计算出拓扑关系数据，并简述了计算方法及过程。

【关键词】 地图上拓扑关系；地图要素的拓扑一致性

一、前 言

地图数据库系统的核心之一就是建立一个完整的地图模型。一个比较完整的地图模型，不仅要反映出地图上各要素的地理位置和属性，而且还要反映出诸要素间的相互位置关系，然而后者作为描述地图模型的概念，以前往往被人们忽略。

拓扑关系用来表示地图上要素间的相互关系，使人们对地图模型的完整性有了进一步认识。当拓扑关系作为应用来解决实际问题时，就引起了人们的重视，大家发现拓扑描述是地图模型完整性不可缺少的一方面。

现有的大多数制图系统，以显式存贮的拓扑数据基本上靠人工组织，然后输入计算机。这样很不利于发挥计算机的优势。地图模型中一般以地理坐标为基础，若我们能以地图地理坐标（或平面坐标）系统为基础自动组织出拓扑数据，则可把人们从繁重的组织数据和输入数据工作中解脱出来，减少人为的错误，同时也促进了机助制图自动化的发展。

二、地 图 上 拓 扑 关 系

为了反映出地图要素间的拓扑关系，我们首先把地图的要素依据其几何特征归纳为三类集合元素，即点、边（或线）和面。然后通过反映点集合，边集合及面集合元素间的拓扑关

本文1987年2月收到.

本文是研究生毕业论文的一部分，指导教师是胡毓钜、毋河海教授.

系体现出要素间的拓扑关系。

为节省存贮空间，我们以这三类集合的基集合元素间的拓扑关系数据作为存贮数据，据此可推出所有元素间的拓扑关系。

根据应用的方便性，完整地反映出地图元素间的拓扑关系，一般分四类：关联关系、邻接关系、重叠关系和同域关系。所谓关系完整是指在计算机中用户以任一元素为入口，依据这些关系数据能找出所有的元素。

关联关系（IR）是不同类型元素间的拓扑关系。如：节点/边，面/边关联关系。

邻接关系（NR）是相同类型元素间的拓扑关系。如：（节点，节点)边，（面，面)节点。

如图 1：$(n_1, e_1)\in IR$，$(n_1, e_8)\in IR$，$(n_5, e_6)\in IR$，$(n_5, a_1)\in IR$，$(a_2, e_3)\in IR$，……；$(n_1, n_5)_E\in NR$，$(n_1, n_5)_A\in NR$，$(a_1, a_4)_E\in NR$，$(a_1, a_4)_N\in NR$，$(a_1, a_3)_N\in NR$，……。

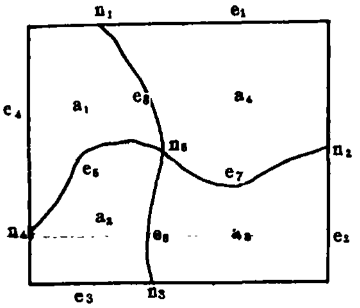

图 1

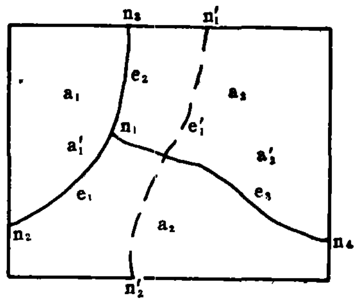

图 2

由于 $(e_1, a_4)\in IR$，$(e_7, a_4)\in IR$，则有 $(e_1, e_7)_A\in NR$，其中 N 为节点集合，E 为边集合，A 为面集合。在 NR 中，总有：{（面，面)边}⊆{（面，面)节点 }。

重叠关系（OLR）是一个面元素与其他面元素、边元素和点元素间的拓扑关系。它能反映出其他元素的点是否落在某面内。

同域关系（CAR）是以面元素为基准，它能反映出某两个元素的点是否落在同一面。

如图 2：$(e_2, a_1')\in OLR$，$(e_3, a_1')\in OLR$，$(e_3, a_2')\in OLR$，$(a_2', a_3)\in OLR$，$(a_2, a_2')\in OLR$，……；$(e_2, e_1)\in CAR$，$(a_1, e_3)\in CAR$，$(a_1', a_2')\in CAR$，$(a_1, a_3)\in CAR$，……。

由于 $(e_2, a_1')\in OLR$，$(e_3, a_1')\in OLR$，因此有：$(e_2, e_3)\in CAR$。

关联关系、邻接关系反映了同一层元素间的关系。如：道路网中，居民点与居民点，居民点与道路之间的关系；政区的相邻关系。

重叠关系，同域关系反映了不同层元素间的关系。如：某省范围内道路网情况，河流与道路之间关系。

四类关系中，邻接关系是以关联关系为基础，同域关系以重叠关系为基础。任一邻接关系或同域关系可相应地由关联关系或重叠关系导出。因此只要能实现关联关系和重叠关系的自动组织就可实现这四类拓扑关系的自动组织。

三、拓扑关系的自动实现

拓扑关系的自动实现实质上是要从元素的坐标上推算出元素间拓扑关系。而这四类拓扑关系又以关联关系和重叠关系为基础，所以只要计算出关联关系和重叠关系就解决了拓扑关系的自动组织问题。

1．关联关系

关联关系有六种形式：节点/边、节点/面、边/节点、边/面、面/节点和面/边。但只要计算出节点/边、面/边两种关系就容易推出其他四种关系。

（1）节点/边关联关系

若节点与边关联，则节点与边的端点的坐标一致，但由于矢量数字化时，人为的对点误差（数字化仪的精度与人的对点误差相比要小得多，因而数字化仪本身的误差可忽略不计），使本来坐标一致的点的坐标有偏差。因此要得到正确的关联关系（这即是所谓节点匹配问题），必须选择一个恰当的阈值H。

如图3：若H选得太小如（1），则不能找出全部的节点/边关联关系；若H选得太大如（2），则可能出现伪的节点/边关联关系。

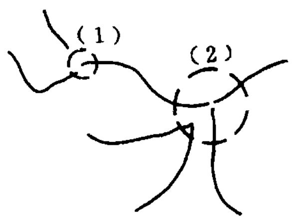

图 3

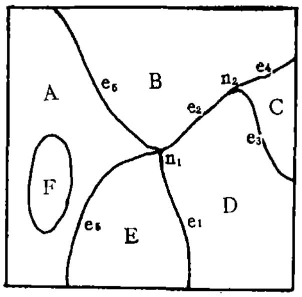

图 4

目前，阈值H的选择还没有比较好的理论方法，实践中一般根据数字化时人的对点误差和图上最小图形尺寸来确定，效果还是较好的（笔者在实验中给出的H值为0.1厘米，匹配结果满意）。如果出现人的对点误差比图上最小图形尺寸还大，H值就不好给定，但这种情况可用人机交互方法来完成节点匹配过程。

（2）面/边关联关系

一个面有哪些关联边等价于一个面的边界边有哪些。

地图上面结构中，有时可能出现嵌套的情况，也可能出现一个面由几个分离的区域组成，因而计算一个面有哪些边界边是较复杂的。计算过程分三步：简单连通面——基本面——实际面。

假定表示面的边界边按顺时针方向排列，边的方向取数字化时跟踪方向。

A、简单连通面

定义1：仅由一组连通的边界边围成的区域（作为整个地图区域的边框线除外），若此

区域内有边界边，则这些边界边不与此区域的边界边连通，称此区域为简单连通面。

如图 4：A、B、F、F^C、C 等是简单连通面。

表示简单连通面的边界边是有序循环的，因此每一面的边界边存在相继关系。如图中，e_1，e_2 是相继的，e_6，e_1 也是相继的。在某一节点上，任一关联边的后继是唯一的。

利用节点/边关联关系可计算出相继关系，如图 4：节点 n_1 的关联边有四条 e_1，e_2，e_5，e_6，求 e_1 的后继边：以 n_1 为原点，求出以 e_1 逆时针方向旋转到与 n_1 关联的其他各边的角度，角度最小的边 e_2 即为 e_1 的后继。

设 AS 是简单连通面集合，EB 是基本边集合，AS 与 EB 间的关联关系为 IR。

若 e_1，$e_2 \in EB$，$a \in AS$，对于下面条件：

①$(e_1, a) \in IR$，$(e_2, a) \in IR$；

②e_1 与 e_2 有相继关系。

有命题

命题 1：在集合 AS、EB 中，由满足上述②使①成立的全部关联关系是 AS、EB 间所有关联关系。

证明：设由上述②使①成立的关联关系集合为 IR'，显然有 $IR' \subseteq IR$。

若有 $(e_i, a) \in IR$，由于面图中的节点度数不小于 2，则在 e_i 的一节点上存在另外关联边。因而唯一存在 e_i 的后继 e_j，又由于 e_i，e_j 是关于面有序循环的，所以 e_j 也是 a 的边界边，$(e_j, a) \in IR'$，即 $IR' = IR$。

由相继关系可计算出简单连通面/边的关联关系。

如图 5：在某一节点 n_1 上，根据节点/边的关联关系，找出所有关联边 $-e_1$，e_2，e_3，任取一边 $-e_1$ 以 $-(-e_1) = e_1$ 为始边，用求后继的方法求出 e_1 的后继 e_2；再由边/节点关联关系，找出 e_2 的另一节点 n_2，以 n_2 为参考点又可求出 e_2 的后继 e_4，……。由于简单连通面的组成边是有序循环的，因此，当计算出的下一边与始边相同时，就计算出了这一简单连通面 a 的所有边界边 $\{e_1, e_2, e_4, e_5\}$。

简单连通面集合中，可能有面嵌套的情况。图 4 中，$A \cap F^C \neq \phi$，因此还须消除相交情况找出基本面。

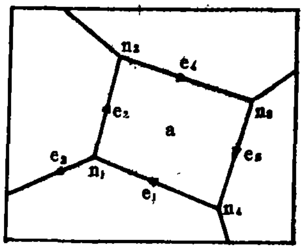

图 5

B、简单连通面转化为基本面

定义 2：如果 $a_i \in AS$，对任意其他元素 $a_j \in AS$，总有 $a_i \cap a_j = \phi$ 或 $a_i \cap a_j = a_i$，则称 a_i 是 AS 中的极小元素。

图 4 中，F、B、E 是极小元素，A、F^C 则不是。显然极小元素可作为基本面。

定义 3：集合 AS 中存在一种偏序关系<：若 a_j 是内部区域的面，有一面 a_i 的边界边在 a_j 内，则有 $a_i < a_j$。

如图 6：$C < B$，$C^C < B$，$B < A$，$B^C < A$，$D < A$，$D^C < A$。

$a_i < a_j$ 即 $a_i \cap a_j \neq \phi$，即 a_j 内有嵌套情况。

定义 4：a_i，$a_j \in AS$，有 $a_j < a_i$，若不存在其他元素 a_k，使 $a_j < a_k < a_i$ 成立，则称 a_j 为 a_i 的直接子元素。

图 6 中，B、B^C，D、D^C 是 A 的直接子元素，C、C^C 是 B 的直接子元素。

此图中的简单连通面集合 $AS = \{A, B, C, D, B^C, C^C, D^C\}$。在 AS 中无论如何不能

选出某些元素组成这样的集合：任意两元素的交为空，且所有元素之并为整个地图平面中面之并。

要把这集合转化为上述的集合——基本面集合，须进行下列运算：

$A' = A - B - D = A \cap B^c \cap D^c$, $B' = B - C = B \cap C^c$

$\{A', B', C, D\}$ 则是基本面集合 AB。

从 $A' = A \cap B^c \cap D^c$ 中知 B^c、D^c 是 A 的作为外部区域的直接子元素，从 $B' = B \cap C^c$ 中知 C^c 是 B 的作为外部区域的直接子元素。而 C 、D 是 AS 的极小元素 。

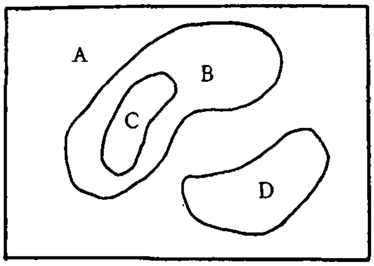

图 6

因此有转化过程：

①AS 中的所有极小元素转为集合 AB 中的元素；

②若 $a_1 \in AS$，存在其他元素 $a_2 \in AS$，使 $a_2 < a_1$ 成立，则找出 a_1 的所有作为外部区域的直接子元素 b_1, b_2, ……, b_k，令 $a' = a_1 \cap b_1 \cap \cdots \cap b_k$，将 a' 转化为 AB 中的元素。

集合 AB 中的元素仅有两个来源①和②。

命题 2：由上述两步得到的集合 AB 是面集合的不交基。

证明：因为 AS 的元素闭集之并为整个地图平面，因而地图上任一区域 q 必包含在AS的某些内部区域的元素闭集之并中，设 a_1, a_2, …, $a_k \in AS$ 是使：$q \subseteq \overline{a_1} \cup \overline{a_2} \cup \cdots\cdots \cup \overline{a_k}$ 成立的最小区域（$\overline{a_i}$ 为 a_i 的闭集）。

选出 $\{a_1, a_2, \cdots\cdots, a_k\}$ 中不是 AS 的极小元素：a'_1, a'_2, ……, a'_m。

对每个 a'_i（i = 1 , 2 , …, m）, 找出其所有作为内部区域的直接子元素 b'_{i_1}, b'_{i_2}, ……, b'_{i_j}。

有 $a'_i \subseteq \{a'_i - b'_{i_1} - \cdots\cdots - b'_{i_j}\} \cup b'_{i_1} \cup \cdots\cdots b'_{i_j}$

而 $a'_i - b'_{i_1} - \cdots\cdots - b'_{i_j} = a'_i \cap b'_{i_1} \cap \cdots\cdots \cap b'_{i_j}$，即此面是由步骤②得到的。

因而凡是非极小元素总可以被某些极小元素和由步骤②得到的元素之并包含。

所以 q 一定被 AB 中元素之并包含。

又对任意两元素 a_1, $a_2 \in AB$，若 a_1, a_2 是 AS 中的极小元素则 $a_1 \cap a_2 = \phi$ 。

若有一元素 a_1 不是 AS 中的极小元素，a_2 是极小元素。对 a_1 存在 a'_1, a'_2, ……, a'_k 和 a' 使：

$$a_1 = a' - a'_1 - \cdots\cdots - a'_k = a' - (a'_1 \cup a'_2 \cup \cdots\cdots \cup a'_k)$$

① 若 $a_2 \cap (a'_1 \cup a'_2 \cup \cdots\cdots \cup a'_k) = \phi$，有 $a_2 \cap a' = \phi$

所以 $a_2 \cap a_1 = \phi$

② 若 $a_2 \cap (a'_1 \cup a'_2 \cup \cdots\cdots \cup a'_k) \neq \phi$，则 $a_1 \cap a_2 = \phi$

若 a_1, a_2 都不是 AS 的极小元素，且 $a_1 \cap a_2 \neq \phi$ 则必有一 a 可作为 a_1 或 a_2 的直接子元素，使 $a_1 \cap a_2 = a$，假设 a 是 a_1 的直接子元素，$a_1 - a \in AB$，由步骤②知 $a_1 \notin AB$ 与前面假设 $a_1 \in AB$ 矛盾，所以必有 $a_1 \cap a_2 = \phi$ 。

因而集合 AB 是面的不交基。

由AS转化到AB过程中，利用定位网格和区域内点判定方法求出AS中的<关系，建立AS元素的<关系矩阵MT，对MT进行变换可得到各元素的直接子元素。

设 $|AS|=n$，$MT=(t_{ij})_{n\times n}$

$$\text{其中}\quad t_{ij}=\begin{cases}1 & \text{当 } a_j<a_i \text{ 时；}\\ 0 & \text{其他。}\end{cases}$$

设第i行有k个不为0的元素：t'_1，t'_2，……t'_k，对每一t'_j（j=1，2，……，k），设t'_j所在的列为第p列，分别对t'_m（m=1，2，……，k，m≠j），设t'_m所在的列为q列，第q行、第p列的值不为0时，$t'_j+1 \Longrightarrow t'_j$（嵌套层多一层）。

从第一行到第n行都进行这样的计算，最后得到矩阵MT′，显然矩阵中的0元素值不变。

矩阵MT′中，全为0的行，相应AS中的极小元素；若第i行第j列的元素值等于1，即说明：第j行对应的元素是第i行对应元素的直接子元素。

C、 基本面到实际面的转换

基本面集合的元素可组成任何面。源数据的内点与基本面是一一对应的，又内点集合到实际面集合的映射是单射的，一个实际面有几个内点，就有几个不连通的区域，因而f：{基本面}⟶{实际面}也是单射的，且{实际面}=f({基本面})。

对任一实际面，若它有k个内点p_1、p_2、…，p_k，利用其坐标可计算出每一点p_i属于哪一基本面。这样可得到对照表形式的函数f。

最后根据f，容易得到每一实际面由哪些基本边组成，且包括哪几个基本面。

经上述A、B、C三步就得到面/边的关联关系。

2. 重叠关系

重叠关系的建立可借助于定位网格系统来加速运算速度。

1、面/点重叠关系

当一个面与一个点有重叠关系，则这个点必在此面内，因而利用判断点是否在面内算法可算出此关系。

2、面/边重叠关系

若一面与某边有重叠关系，则必有边上的点落在此面内。如图7是一条边与一面的关系；

（1）边完全在面内；

（2）边不在面内；

（3）边与面的边界边相交。

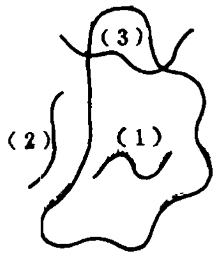

图 7

因此算法思想是：若边与面的边界边相交，则必有边的某些点落在此面内，即有重叠关系，若边与面的边界边无交点，则①若边上任一点在面内，则此边完全包含在面内，即有重叠关系；②若边上任一点不在面内，即无重叠关系。

3、面/面重叠关系

面/面重叠关系指当地图上有几层面图时，不同层面的关系。此关系计算过程简述如下：

对给定面找出面内所含的边界边。若能找到边界边，根据边/面关联关系可得到这些边界边的关联面，易知这些面一定与此面重叠；若面内不含任何边界边，这时此面完全包含在另一层面内，利用定位网格可找到此面所在的网格是在另一层的哪一面中。

到此又计算出了重叠关系。

四、拓扑一致性

欲使地图拓扑描述完整正确，在组织拓扑关系时，必须检验元素间的拓扑一致性，即检验拓扑数据的无矛盾性。

对关联关系而言，由于节点/边、边/面可作为关联关系的基，因而只要这两种关系是拓扑一致的，就保证了关联关系的无矛盾性。

节点/边关联关系的拓扑一致与否决定于节点/边关系（节点匹配时）计算中的阈值（H）选择，阈值的正确选择就使其拓扑一致。

平面面图中，每一边界边两侧应有两个不同的面，因而对边/面关联关系有检验规则：

①任一边界边两侧的面是不同的。

计算出边/面（或面/边）关联关系后，对每边查看其两侧的面就可实施其检验。

不满足这个规则的情况如图8a中e。

对重叠关系，须保证面/面、面/边、面/点关系拓扑一致，归根到底是使地图平面上每一点与面的关系正确，属于两个不同基本面的点不能出现在同一基本面内，包含在同一基本面内的两点不能落在不同的基本面内，因此又有检验规则。

②对某一层面图的基本面而言，在整个地图平面内，除这一层边界边上的点外，其他任一点属且只属于一个基本面。

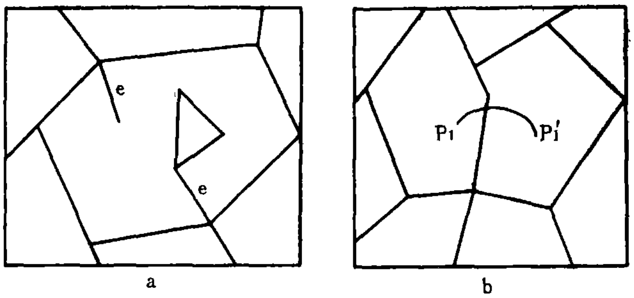

图 8

实现这一检验规则，当然不可能对地图平面上每一点进行检验，因为地图平面上的点是无穷的。为此，我们须利用定位网格，即以每个网格为单位进行判别，由此实现这一检验规则。

不满足这个规则的情况如图8b中p_1，p_1'，（p_1，p_1'应为同一点）。

五、小　結

由前面讨论可知：地图上这四类拓扑关系能从地图要素的平面坐标中计算出。

要说明这四类拓扑关系的可计算性，只须说明关联关系和重叠关系是能被计算的，因为另外两类关系——邻接关系和同域关系，可由这两类关系直接推算出。关联关系的计算取决于节点/边、面/边两种关系的计算，其中面/边关联关系的计算较复杂。重叠关系的计算较容易实现。在计算这些关系时，为使拓扑关系正确，我们实施两个拓扑一致性检验规则，这可帮助我们检查出输入数据的一些错误。

作者根据本文描述的思想在微机上进行了实验，结果表明：这四类拓扑关系完全可在有限的步骤内从地理坐标中计算出来，从而能实现拓扑数据的自动组织。

拓扑数据的自动组织免除了系统中大量拓扑数据的人工组织及输入，同时克服了人工在组织和输入过程中产生的错误。这对提高系统的工作效率和经济效益是很有帮助的。

参　考　文　献

〔1〕 毋河海，计算机地图制图，武汉测绘学院，1983.

〔2〕 C.J.Date 著，郑振楣、石树刚译，数据库系统导论，武汉大学计算机科学系，1983.

〔3〕 Bert Mendelson 著，陈明蔚译，拓扑学引论，广西人民出版社，1983.

〔4〕 W.Weber 等著，武汉测绘学院制图系译，机助制图讲习班材料，1985.

〔5〕 Geoffrey Duttor, First International Advanced Study Symposium on Jopological Data Structures for Geographic Information System, Harvard Papers, Vol.4. Laboratory for Computer Graphics and Spatial Analysis, 1982.

Automatic Organization of Topological Data on Map

Li Lin

Abstract

This paper briefly explains four kinds of topological relations on maps—incidence relation, neighbourhood relation, overlap relation and co-area relation as well as the relations among them. Also it expounds the possibility of obtaining those topological relations by computing, namely topological relation data can be worked out from the geographical coordinate data on maps. Meanwhile, method and procedure of the computation are briefly discussed.

【Key words】 topological relations on maps; topological consistency of features on maps