DOI:10.13203/j.whugis1987.03.009

第12卷 第3期 武汉测绘科技大学学报 Vol.12 No.3
1987年 9月 Journal of Wuhan Technical University of Surveying and Mapping Sept. 1987

磁单极、麦克斯韦方程组与电磁图象

李绍新

摘　要

本文从真空中磁的库仑定律和电的安培环路定律推导出磁单极存在下麦克斯韦方程组的微分形式，描绘出磁单极存在下的电磁图象。

【关键词】 磁单极；电的安培环路定律；磁荷守恒；电磁图象

一、引　言

狄拉克证明了，如果某处存在一个磁单极，自然界中所有的带电粒子的电荷就必须是量子化的[1]。鲁巴可夫的计算表明，双荷子（同时带有磁单极和电荷的粒子）可以作为质子衰变的催化剂，并有较大的催化截面。由于磁单极的存在具有上述深远的理论意义和重大的现实意义，自从1931年狄拉克从理论上预言磁单极的存在以来，科学家们进行了种种努力以找出磁单极存在的依据。但遗憾的是，迄今为止，世界上还没有令人信服的证据表明磁单极的存在[2]。因而，磁单极的存在与否仍是一个悬而未决的问题，只能进一步由实验作出回答。

二、磁单极存在下麦克斯韦方程組的形式

如果宇宙之间确实存在磁单极，那么麦克斯韦方程组将要修改。

1．用$\nabla\cdot\vec{B}=\rho_m$取代$\nabla\cdot\vec{B}=0$，其中$\rho_m$为自由磁荷密度。

根据磁的库仑定律，真空中相距r的两点磁荷q_{m_1}和q_{m_2}相互作用力为

$$\vec{F}_m=K\frac{q_{m_1}q_{m_2}}{r^2}\hat{r}\quad,\tag{1}$$

与电的库仑定律的形式及含义完全相似。

本文1987年2月收到.

在MKSA有理制中，选 $K=\frac{1}{4\pi\mu_0}$，那么

$$\vec{F}_m = K\frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{q_{m_1}q_{m_2}}{r^2}\hat{r}\ [3][4], \tag{2}$$

其中 $\mu_0=4\pi\times10^{-7}$牛顿/安培^2，为真空中的磁导率。仿电场强度 $\vec{E}$ 的定义，磁场强度 $\vec{H}$ 为单位正磁荷在该点所受的作用力，即

$$\vec{H}=\frac{\vec{F}_m}{q_{m_0}}\ [3][4], \tag{3}$$

其中 q_{m_0} 为试探磁荷。在一般情况下，考虑存在传导电流和磁介质，空间中任意一点的磁场强度

$$\vec{H}=\vec{H}_0+\vec{H}_m+\vec{H}'_m, \tag{4}$$

其中 $\vec{H}_0$ 是传导电流与变化的电场产生的磁场，$\vec{H}_m$ 是自由磁荷产生的磁场，$\vec{H}'_m$ 是束缚磁荷产生的磁场。并且 $\vec{H}_m$ 与 $\vec{H}'_m$ 是有源无旋场，与静电场遵从的规律一样，是保守场，而 $\vec{H}_0$ 是有旋场。

从上面的定义我们得到，一个磁荷量为 q_m 的点磁荷，在真空中产生的磁场强度为

$$\vec{H}=\frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{q_m}{r^2}\hat{r}, \tag{5}$$

与点电荷产生的电场相对应。与静电场的高斯定理对应，我们可以求出磁场的高斯定理

$$\oint_s\vec{H}\cdot\vec{ds}=\oint_s\vec{H}_0\cdot\vec{ds}+\oint_s\vec{H}_m\cdot\vec{ds}+\oint_s\vec{H}'_m\cdot\vec{ds}$$
$$=0+\frac{\sum\limits_{(S内)}q_m}{\mu_0}+\frac{\sum\limits_{(S内)}q'_m}{\mu_0}. \tag{6}$$

$\sum\limits_{(S内)}$ 表示在封闭面s中求和（代数和），q_m 表示自由磁荷，q'_m 表示束缚磁荷。由于我们用的是磁荷观点，考虑了束缚磁荷，因而束缚电流不再予以考虑。

定义相距 l 磁荷量分别为 $\pm q_m$ 的磁荷对为磁偶极子，即 $\vec{p}_m=q_m\vec{l}$，并定义磁极化强度矢量 $\vec{P}_m=\frac{\sum\vec{p}_m}{\Delta V}$，$\sum\vec{p}_m$ 表示对 ΔV 中所有磁偶极子求矢量和。在电场中，我们有电极化强度 $\vec{P}_e$ 与束缚电荷 q'_e 的关系式

$$\oint_s\vec{P}_e\cdot\vec{ds}=-\sum_{(S内)}q'_e. \tag{7}$$

与上式对应，我们可以求出磁极化强度 $\vec{P}_m$ 与束缚磁荷 q'_m 的关系式

$$\oint_s\vec{P}_m\cdot\vec{ds}=-\sum_{(S内)}q'_m. \tag{8}$$

将（8）式代入（6）式，我们得到

$$\oint_s(\mu_0\vec{H}+\vec{P}_m)\cdot\vec{ds}=\sum_{(S内)}q_m. \tag{9}$$

引入辅助量磁感应强度$\vec{B}$：

$$\vec{B}=\mu_0\vec{H}+\vec{P}_m \quad , \tag{10}$$

代入（9）式，得

$$\oint_S \vec{B}\cdot\vec{ds}=\sum_{(S内)} q_m=\int_V \rho_m dv, \tag{11}$$

其中v为s所包围的体积，ρ_m为自由磁荷密度。利用矢量分析，马上可以得出上式的微分形式

$$\nabla\cdot\vec{B}=\rho_m \quad . \tag{12}$$

2．用$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}-\vec{j}_m$取代$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$，其中$\vec{j}_m$为磁流密度矢量。

我们知道，传导电流产生磁场，其行为遵从安培环路定律：

$$\oint_L \vec{H}\cdot\vec{dl}=\Sigma I_e , \tag{13}$$

其微分形式是$\nabla\times\vec{H}=\vec{j}_e$，即磁场强度方向与电流密度$\vec{j}_e$的方向满足右旋关系。

与此对应，传导磁流将产生电场，其行为遵从的规律，权且将其称为电的安培环路定律：

$$\oint_L \vec{E}\cdot\vec{dl}=-\Sigma I_m=-\int_S \vec{j}_m\cdot\vec{ds}, \tag{14}$$

S为L所围的一个曲面。其微分形式是$\nabla\times\vec{E}=-\vec{j}_m$，即电场强度方向与磁流密度$\vec{j}_m$的方向满足左旋关系。负号的引入是为了保证磁荷守恒定律的成立。

考虑到电荷（包括自由电荷和束缚电荷）对电场的贡献，空间中任一点总的电场强度：

$$\vec{E}=\vec{E}_0+\vec{E}_m+\vec{E}_{I_m} \tag{15}$$

其中$\vec{E}_0$是电荷产生的电场（它是一个保守场），$\vec{E}_m$是变化的磁场所激励的感应电场，$\vec{E}_{I_m}$则是由传导磁流产生的电场。应有

$$\oint_L \vec{E}\cdot\vec{dl}=\oint_L \vec{E}_0\cdot\vec{dl}+\oint_L \vec{E}_m\cdot\vec{dl}+\oint_L \vec{E}_{I_m}\cdot\vec{dl}$$

$$=0-\int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\vec{ds}-\int_S \vec{j}_m\cdot\vec{ds} \quad , \tag{16}$$

其微分形式为

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}-\vec{j}_m \quad . \tag{17}$$

上式将取代麦克斯韦方程组中的$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$。

我们对（17）式求散度，左边为零，即

$$0=\nabla\cdot\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}-\vec{j}_m\right)=-\left(\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\vec{B}+\nabla\cdot\vec{j}_m\right)$$

$$=-\left(\frac{\partial\rho_m}{\partial t}+\nabla\cdot\vec{j}_m\right),$$

即 $$\nabla\cdot\vec{j}_m+\frac{\partial\rho_m}{\partial t}=0\,. \tag{18}$$

上式即为磁荷守恒的表达式，亦称磁荷的连续性方程的微分表达式。因此，我们看到，电的安培环路定律的存在是磁的连续性方程的必然结果。

3．麦克斯韦方程组中余下的两个方程 $\nabla\times\vec{H}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\vec{j}_e$ 和 $\nabla\cdot\vec{D}=\rho_e$ 不变。

1） 我们曾得到磁场强度的公式（4）。由于磁荷产生的磁场强度 $\vec{H}_m$、$\vec{H}'_m$ 为保守场，对（4）式求旋度，有

$$\nabla\times\vec{H}=\nabla\times\vec{H}_0+\nabla\times\vec{H}_m+\nabla\times\vec{H}'_m=\nabla\times\vec{H}_0=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\vec{j}_e\quad. \tag{19}$$

2） 我们知道电流产生的磁感应强度 $\vec{B}_0$ 的散度为零，$\nabla\cdot\vec{B}_0=0$，即 $\oint_S\vec{B}_0\cdot\vec{ds}=0$。同理对磁流产生的电感应强度 $\vec{D}_m$ 的散度也为零，即 $\nabla\cdot\vec{D}_m=0$。由于空间任意一点的电感应强度 $\vec{D}=\vec{D}_0+\vec{D}_m$，其中 $\vec{D}_0$ 为电荷产生的电感应强度，$\vec{D}_m$ 为磁流产生的电感应强度，那么

$$\nabla\cdot\vec{D}=\nabla\cdot(\vec{D}_0+\vec{D}_m)=\nabla\cdot\vec{D}_0=\rho_e\quad. \tag{20}$$

这样，我们得到磁单极存在下麦克斯韦方程组的微分形式（MKSA 有理制）：

$$\left\{\begin{array}{ll}\nabla\cdot\vec{D}=\rho_e; & (20)\\ \nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}-\vec{j}_m; & (17)\\ \nabla\cdot\vec{B}=\rho_m; & (12)\\ \nabla\times\vec{H}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\vec{j}_e\,. & (19)\end{array}\right.$$

如果采用高斯单位制，则方程组的形式如下[5]：

$$\left\{\begin{array}{ll}\nabla\cdot\vec{D}=4\pi\rho_e\,; & (21)\\ \nabla\times\vec{E}=-\frac{1}{C}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}-\frac{4\pi}{C}\vec{j}_m; & (22)\\ \nabla\cdot\vec{B}=4\pi\rho_m; & (23)\\ \nabla\times\vec{H}=\frac{1}{C}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\frac{4\pi}{C}\vec{j}_e\,. & (24)\end{array}\right.$$

三、磁单极存在下的电磁图象

我们知道，电荷之间的相互作用是通过电场来实现的，与此类似，磁荷之间的相互作用是通过磁场来实现的，即有

$$\boxed{\text{磁荷}}\longleftrightarrow\boxed{\text{磁场}}\longleftrightarrow\boxed{\text{磁荷}}$$

我们进一步研究这个问题。电的安培环路定律（14）式表明，对电场某回路进行线积

分，等于回路所包含的传导磁流代数和的负值。由于磁流产生电场，我们推断磁流之间有相互作用，这种作用是通过电场来实现的，即有下面一幅图象：

$$\boxed{\text{磁流}} \longleftrightarrow \boxed{\text{电场}} \longleftrightarrow \boxed{\text{磁流}}$$

经过上面的讨论后，磁单极存在下宇宙中的电磁图象应如下所示：

电荷或磁流	⟷	电　场	⟷	电荷或磁流
交变的电磁场 辐　　射	⟵	↕	⟶	交变的电磁场 辐　　射
磁荷或电流	⟷	磁　场	⟷	磁荷或电流

我们看到，如果磁单极存在，物理世界将具有高度的对称性与统一性。

本文曾得到沈霖生副教授的多次指正，在此表示感谢。

参 考 文 献

〔1〕 P.A.M 狄拉克（张宜宗等译），物理学的方向（P46），科学出版社，1981.

〔2〕 陈式刚，磁单极及其对质子衰变的催化作用，自然杂志，8，1984，

〔3〕 E.U. CONDON, Ph.D. HUGH ODISHAW, D.Sc. HANDBOOK OF PHYSICS (SECOND EDITION) 4—11, McGRAW—HILL BOOK COMPANY, 1967.

〔4〕 赵凯华、陈熙谋，电磁学（下册P95），人民教育出版社，1978.

〔5〕 J.D 杰克逊(朱培豫译)，经典电动力学(上册,P278)，人民教育出版社，1980.

Magnetic Monopoles, Maxwell's Equations and Electromagnetic Picture

Li Shaoxin

Abstract

This paper derives Maxwell's equations in differential form for the existence of magnetic monopoles from Coulomb's law of static interaction between point magnetic charges and Ampere's law for a line integral of $\vec{E}$ around a closed path, The author describes an electromagnetic picture.

[Key words] magnetic monopoles; Ampere's law for a line integral of $\vec{E}$ around a closed path; magnetic charge conservation; electromagnetic picture