

变比例尺地图投影系统*

胡 毓 钜

摘 要

本文对编制城市游览图提出了变比例尺地图投影系统。通过由普通城市平面图向辅助球面作逆投影A,再由辅助球面向平面作非A投影,构成了变比例尺地图的数学基础。由不同性质的投影的组合,能起到适应不同城市街区结构的特点。使本系统具有相当的灵活性。文中还讨论了辅助球适宜的大小和不同方位投影之间的变換公式。文末试作了北京市的变比例尺地图。

【关键词】 变比例尺投影系统; 城市旅游图; 辅助球

一、概 述

城市地图中的一种有最广泛对象的地图——城市游览图,对它具有特殊的要求,它要反映城市中那些对旅游者具有吸引力的地区,例如商业中心,愈突出而详细愈佳。在这种地图上,有时谈不上量度的必要性,或者说,明确的相对位置则重要得多,而可量度性是次要的。为此目的,国内外地图工作者提出了一些“离经叛道”的地图投影。这就是多焦点地图投影或变比标尺地图投影。

地图投影的功能如何,要看它的实际应用价值。严密的地图投影对于城市游览图(或城市交通示意图)而不是城市工程建设用图,当然是极易解决的,譬如说可以应用现成的地图投影用表,然而未必真正充分发挥了该图的作用。多焦点地图投影或变比例尺地图投影则是灵活地运用了“特写镜头”的手法把城市的重点部分突出地放大表示(这往往是繁华的城市中心部分),而把城郊部分作适当的压缩,因此各部分具有不同的比例尺,它越出了常规投影的范畴,并把这类地图的功能提高了。

本文1986年12月收到。

* 本文写作过程中,得到胡鹏同志提供意见和地图制图系学生奚泽帮助计算和绘图,谨致谢意。

二、現有的方法

Kadmon^[1] 提出如下的计算公式:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{-S_1 \pm \sqrt{S_1^2 + 4C_x \cdot X}}{2C_x} \\ y &= \frac{-S_1 \pm \sqrt{S_1^2 + 4C_y \cdot Y}}{2C_y} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中 x, y ——双曲线投影(即变比例尺投影)的绘图坐标

X, Y ——相对于地图资料中心点 X_0, Y_0 的直角网格坐标

S_1 ——地图中心比例尺分母

S_2 ——预先决定的点上(如地图角隅)的比例尺分母

$$C_x = C \sqrt{\frac{X^2 + Y^2}{X^2}}$$

$$C_y = C \sqrt{\frac{X^2 + Y^2}{Y^2}}$$

$$C = \frac{S_2 - S_1}{m}$$

m ——地图中心到比例尺为 S_2 的点之间的距离

$$S_d = \text{点 } x, y \text{ 上的比例尺分母, 即 } S_1 + \frac{S_2 - S_1}{m} d$$

$$d = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

式(1)中只需取正号, 因为投影对两轴是对称的, 而且 $X=0$ 时 $x=0$, $Y=0$ 时 $y=0$ 。

原资料图上的方格网在变比例尺投影中形成以投影中心为对称中心的桶形网, 网线间的间隔自中心向边缘缩小, 并凹向中心。

Lichtner^[2] 在此基础上发展到在图面上显示几个中心扩大的部分。这样在一幅图中邻近的二、三个城市中心都可作变比例尺的扩大处理。图1是变比例尺处理前后的图形。

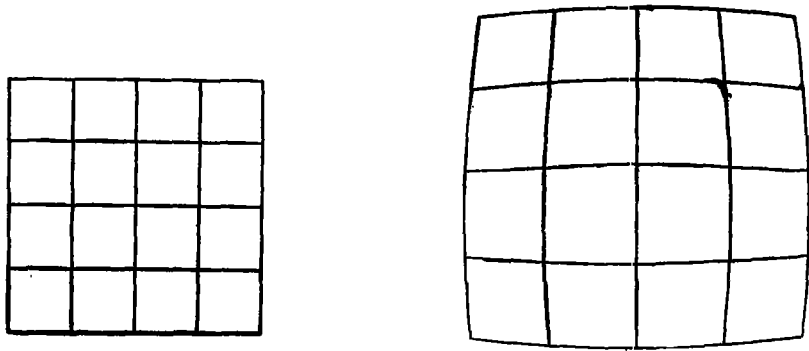


图 1

黄国寿^[3]应用不同于上述的另一种方法，他采用逆正两种不同的常规投影来达到变比例尺的目的。具有常规地图投影的严密公式。

以上方法都成功地用于编制某些城市地图。它们都有相同的特点，就是从中心向外逐渐缩小。这就有着一定的局限性，因为城市的基本图形并不是千篇一律的。

三、系统的原理与结构

假设将原始资料地图视为平面，图面有适当宽度的方格网 (X, Y)，变比例尺地图的直角坐标系为 (x, y)。变比例尺投影的基本原理是将 X, Y 网按 A 投影逆向表示到适当选定的正球面上，获得球面极坐标 a, z (或 φ, λ)。然后由球面以非 A 投影表示到平面上，就得到不同于原资料的图形。所以变比例尺地图投影的一般模式是：

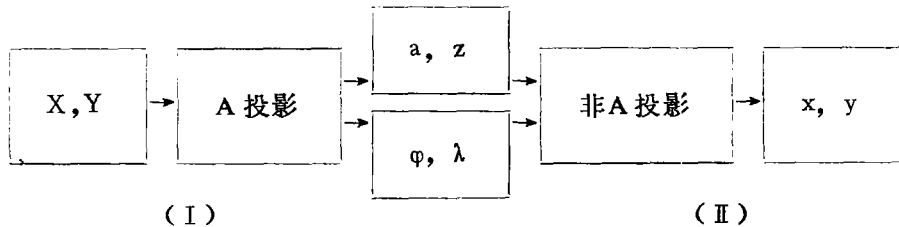


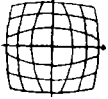
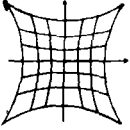
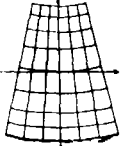
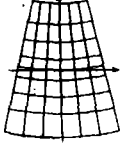
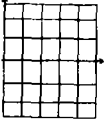
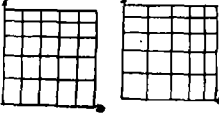
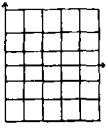
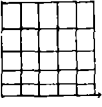
图 2

图 2 中第 I 步称为逆投影，第 II 步是正投影，即常规投影。

由一般地图投影可知， A 投影与非 A 投影显然是一个庞大的组合，因此变比例尺地图投影可以有极其繁多的方案。

如果考察各种组合的可能性和实际应用价值，我们可以建立下列的系统 (表 1)。

表 1*

非 A 投影	A 投 影		变 比 例 尺 投 影 特 征 示 意 图		
	等距方位	等 距 圆 柱			
		对称赤道			偏 向 半 球
正射方位	1、中心放大 边缘缩小			1, 	2, 
球心方位	2、中心缩小 边缘放大				
等面积圆锥		×	3、南北向： 中纬放大 边缘缩小 东西向： 高纬缩小 低纬放大	3, 	4, 
等角圆锥		×	4、南北向： 中纬缩小 边缘放大 东西向： 高纬缩小 低纬放大		
等面积圆柱	5、赤道区放大 边缘缩小 东西向不变	6、低纬区放大 高纬区缩小 东西向不变		5, 5a, 	6, 6a, 
等角圆柱	7、赤道区缩小 边缘区放大 东西向不变	8、低纬区缩小 高纬区放大 东西向不变		7, 	8, 

* 本表中所注的放大、缩小是指原来同样大小的方格在变比例尺处理后相对大小关系，不一定是绝对量的大小。表中的空白处(有×者除外)也可以存在某种变比例尺图形，但实用意义有限，故未加注明。并且其中高纬、低纬是相对于辅助球而言的，并非实际地理纬度。

此处选取等距方位投影与等距圆柱投影作为逆投影，是由这两种投影的特点决定的。前者在反求 a, z 时极为方便，后者在运用上有很大的灵活性，因为方格网（原资料图）可以视为正轴等距离圆柱投影中的任何一部分，它相当于一个球面梯形的平面表象，而这个球面梯形可以位于任何位置。我们在这里选定两个有实用意义的位置，一个是跨赤道的对称位置，另一个是偏向半球的中纬度区域（表 1）。

表 1 中矩阵的空白处也可以有其他形式的组合，但看来实用意义并不很大，而且计算上比较复杂一些。

本系统中所列 8 种方案，在变比例尺图形变化上，已经包括了已有文献的图形，而且有了扩充。

四、应用技术措施

为求得比例尺中心向四周缩小而网格线仍为平行直线，可以将 5 号变比例尺网格旋转 90° ，重复进行原来逆、正的二次投影就可以获得如 5a 的格网，它相当于 1 号方案的桶形网，但网格线不是曲线而是两组互相垂直的、自中心向外渐密的平行线网。可以认为，这种格网保持东西、南北的方向，比较适宜于一些街道呈规则东西或南北走向的城市。其他几个方案也可作类似处理。

方案 2、4、7、8 显然不是适用于编制强调城市中心的数学基础。但若强调表示城市以外的，例如卫星城镇和详细表示城市郊区的风景旅游点，则这些方案也是有实用意义的。

在为一个城市设计变比例尺地图投影时，应先考察城市中心部分的基本轮廓。城市街区的主要结构、城市总的外貌，确定要扩大的部分，然后选择 1、3、5、5a、6 各方案之一来设计与计算变比例尺地图的数学基础。例如，1 号最适用于相当于中心放射状的街道结构和具有圆形外貌的城市等等。

关于辅助球大小的选择 逆、正投影中辅助球的大小影响变比例尺投影图形变化的程度。显然球体愈大，变化愈小；反之则愈大。考虑到非 A 投影中正射投影的需要，最小球体半径 R 应为

$$R > S/\pi$$

式中 S 为资料平面图矩形框的长边或对角线之长度。因当 S 接近球体大圆半圆弧长时，在正射投影中图幅边缘变化过于急剧是不大适宜的，所以宜略大于 S/π 。例如，当 S 相当于 120° 圆心角所对之弧长时，边缘缩短的程度达 $1/2$ ，也就是比例尺缩小达 $1/2$ 。这是一个还比较适宜的缩小率。这样，可以令

$$R \approx 3S/2\pi \quad (2)$$

事实上当逆、正投影后的结果比例尺变化不够显著时，可以同样地再进行一次至几次，就可以扩大比例尺变化的程度。

五、方位投影之间变换的计算方法

系统中第 1 号方案在实践中具有较广泛的用途。逆、正两个投影（第 2 号也是如此）的

计算实际上是两个方位投影之间的换变。由于方位投影的特性，我们可对文献〔3〕的计算作一些简化改进。

分析方位投影的共性，自投影中心向任何方向的方位角保持正确，在投影中心相同的情况下，不同方位投影之间的差别仅是投影向径长度的不同。因此，在变比例尺地图与原资料平面图之间的差别仅在于投影中心距离的差别，这使得变比例尺投影计算非常容易，毋须采用两次投影计算，只要按某种极距 Z 的函数而从 X, Y 改算即可。一般应有

$$\text{同样} \quad \left. \begin{aligned} x &= \Phi(z)X \\ y &= \Phi(z)Y \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中 $\Phi(z)$ 是由两个投影中极坐标 ρ 的表达式形成的。因

$$\begin{aligned} X &= \rho_1 \cos \delta, & Y &= \rho_1 \sin \delta \\ x &= \rho_2 \cos \delta, & y &= \rho_2 \sin \delta \end{aligned}$$

$$\text{故} \quad x = \rho_2 / \rho_1 \cdot X \quad y = \rho_2 / \rho_1 \cdot Y$$

$$\text{因 } \rho_1, \rho_2 \text{ 均为 } Z \text{ 的函数, 故有 } \Phi(z) = \rho_2 / \rho_1 \quad (4)$$

例如，对于等距方位到正射投影的变比例尺直角坐标计算公式应为：

$$x = X \cdot \sin z / z \quad (5)$$

y 的计算相同，只需将上式中 x, X 分别以 y, Y 表示即可。

$$\text{式中} \quad z = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{R} \quad (6)$$

式中 R 的选定见 (2)

六、应用举例

本文以北京市为例，设计一个变比例尺地图投影。考虑到北京主要道路的东西、南北矩形走向，采用表 1 中的 5a 方案。因为计算公式较简单，不予列出，仅列出作业步骤如下：

1. 在制图区域范围内建立适当密度的矩形格网，并选定原点；
2. 标定并读出道路交点或其他重要目标的位置并读出其直角坐标 (X, Y)；
3. 根据矩形格网计算矩形图廓对角线长度；
4. 计算辅助球半径 R ；
5. 以逆投影 A 把格网及道路交点等投影到辅助球面，由 X 计算 φ （这是指辅助球面上的“纬度”并不是实地的纬度）；
6. 由 φ 及 R 计算非 A 投影（在这里是正轴等面积圆柱投影），得 X 的变换值 x ；
7. 旋转 90° （实际上是以 Y 当作 X 并用同样的公式计算）；
8. 重复以上 5, 6 两步，计算 y ，即 Y 的变换值；
9. 至此投影计算所得的 x, y 实际值都有一定的缩小（因为 $x_i = R \sin \varphi_i, y_i = R \sin \varphi_i$ ），所以要使图廓达到原图的大小，应以图廓点之 X （或 Y ）与 x （或 y ）由下式计算调节系数 f ：

$$f_{纵} = \frac{X}{x}, \quad f_{横} = \frac{Y}{y}$$

当 $X \neq Y$ 的矩形情况下, $f_{纵} \neq f_{横}$, 当 $Y > X$ 时, 必有 $f_{横} > f_{纵}$ 。

如取一个为准, 设取 $f_{横}$, 则作图坐标为:

$$x' = f_{横} \cdot x \quad \text{和} \quad y' = f_{横} \cdot y$$

同时可知, 变比例尺图幅的横图廓边与原资料图边等长, 纵图廓边必然比原图略大。如要求纵图廓边与原图等长, 则采用 $f_{纵}$ 此时横图廓边必然略有缩短。

如要求纵横图廓边均与原图等长, 则 x' , y' 需分别计算,

10. 根据绘制的略图 (或计算机屏幕显示) 考虑变比例尺图形是否满足要求 (与原来平面图图形作比较);

11. 如果要求中心部分再次放大, 则重复执行以上 5 至 10 步, 但以 x' 代替 x 。

图 2、3、4 是用两种 R 进行变比例尺变换后的示意图, 图 5 是常规平面图 (原图)。

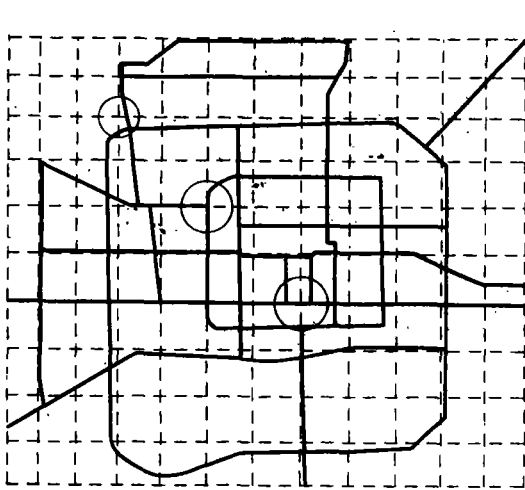


图 2 $R = 40$, 第一次变换后的结果

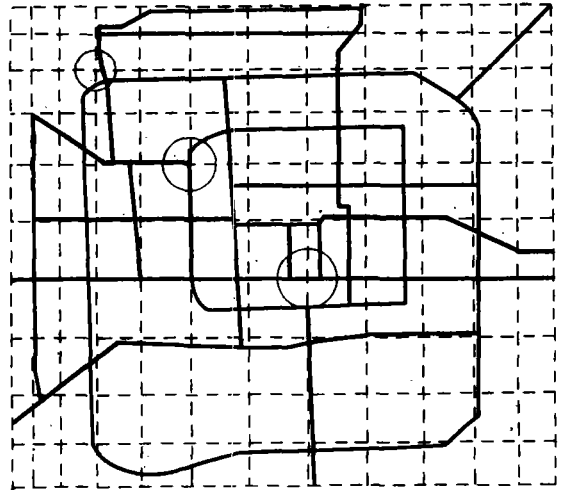


图 3 $R = 35$, 第二次变换后的结果

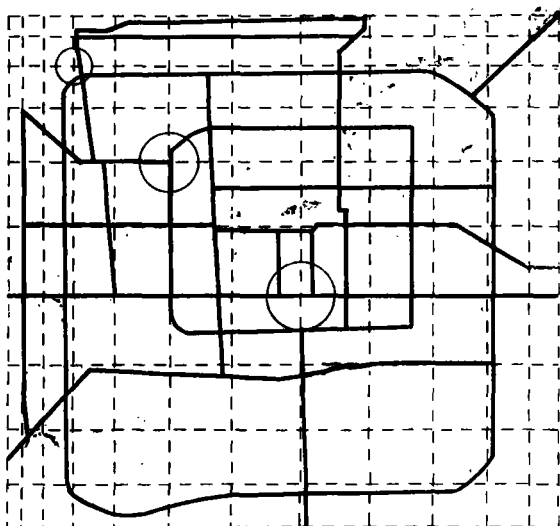


图 4 $R = 35$, 第三次变换后的结果

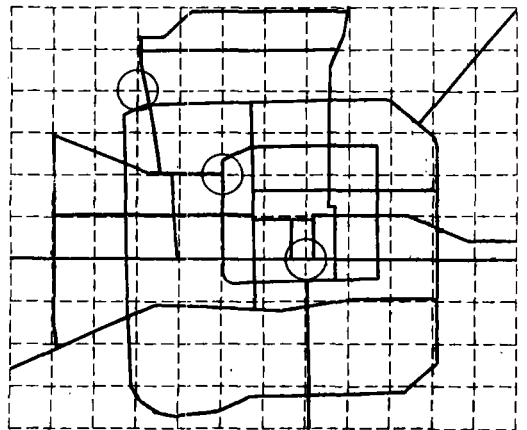


图 5 常规平面图 (原图)

图中不同大小的圆在常规平面图上为相同大小的圆。

七、 結 語

变比例尺地图投影是为编制城市交通游览图建立特殊数学基础的投影方法。本文提供了一个实用的变比例尺地图投影系统。对于不同街道分布格局的城市可以选择不同的变形方式，具有灵活而容易计算的特点。可以看到，当普通城市平面图进行数字化后，结合计算机与自动绘图机，则可容易地实现变比例尺地图的自动绘制。

参 考 文 献

- [1] N. Kadmon, Data-bank Derived Hyperbolic-scale Equitemporal Town Maps, IYC, 1975.
- [2] W. Lichtner, Computer-unterstützte Verzerrung von Kartenbildern bei der Herstellung thematischer Karten, IYC, 1983.
- [3] 黄国寿, 变比例尺城市平面地图的地图投影, 测绘学报, Vol.14, 3, 1985.

Cartographic Projection System for Variable Scale Maps

Hu Yuju

Abstract

In this paper, a cartographic projection system in variable scale suitable for city tourist maps is put forward. The principle is that the mathematical basis for variable scale maps is established by an inverse projection (A) from a conventional city plan on an auxiliary sphere (AS) and then by a projection other than (A) from AS onto a new plane. The combination of various projections will play a role which satisfies the properties of different city structures, which ensures to the system certain flexibility. The size of the auxiliary sphere and the transformation formulas between azimuthal projections have been discussed as well. An experiment of the variable scale map of Beijing is calculated and the sketch shows the design is successful.

[Key words] variable scale projection system, city tourist map, auxiliary sphere