

用力学原理进行工测三维 测边网平差和精度评定

孔祥元

摘 要

随着电磁波测距仪的普及使用和测距精度的提高,三维测边网在工程测量中会逐渐地得到应用。但对这种网的平差及精度评定等问题,目前研究得还很不够。本文根据结构力学最小势能原理和虚功原理,采用另外一种简便的平差手段——力学平差法来讨论以上问题,并编制了BASIC语言程序。通过算例验证了这种平差方法的优点和有效性。

【关键词】 三维地面网;虚功原理;平差;权函数;误差椭圆

一、概 述

三维测边网是在确定的空间直角坐标系中通过已知数据(三个以上点的空间坐标)和观测元素——斜距(每个新点观测三条以上边长)确定新点空间直角坐标(x 、 y 、 z)的一种方法。这种方法由于不需要象二维网那样将斜距化为平距,距离观测也不受垂线偏差的影响,故数据处理简单,已被工程测量人员采用。

在局部性的工程控制测量中,采用独立空间直角坐标系是最方便的。在这种坐标系中,选取测区某一点(最好位于测区中央)作为坐标原点,以该点的铅垂线方向的反方向作为 z 轴的正方向,以北或某一特定方向作为 x 轴的正方向,而 y 轴与之垂直,从而组成独立空间直角坐标系。把整个空间网置于该坐标系中。

根据结构力学最小势能原理及虚功原理提出的力学平差方法,已有人论及^[1-4],但只限于二维网。近年,虽有〔2〕把这一方法用到三维测边网中,但也只限于求或然值,而对平差的另一重要内容——精度评定却没有涉及,并且他们都以一般代数方法为手段。本文用矩阵简明论证了工程三维测边网力学平差和精度评定的全部理论,并对以最小二乘法为基础的条件平差给予了新的解释。通过数值例子说明了用力学方法进行工程三维测边网平差不但

本文1985年10月收到

具有简单明了、规律性强、容易组成条件式的优点，而且还具有能较简便地列出任意方向的点位位差权函数式，进行精度评定等优点。这些对于工程测量是有实际意义的。

二、工测三维测边网力法平差基本原理

1. 基本思想

在力法平差中，将由 n 条观测边长且有 r 个多余观测的空间三维测边网，视为结构力学中由 n 根拉压杆件及构成 r 次超静定结构的弹性桁架系统。由于杆件制造误差（边长观测误差），使得 n 根杆件不能协调吻合，从而必然在 r 个多余杆件处产生 r 个不符值，记为 $\Delta^T = [\Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_r]^T$ ，为消除这组不符值，需在这些多余杆件上施加一组（ r 个）外力，记为 $K^T = [K_1 K_2 \dots K_r]^T$ ，此时，在所有杆件上将产生轴向内力，记为 $N^T = [N_1 N_2 \dots N_n]^T$ ，由于 N 的作用，各杆件将产生长度变形，记为 $V^T = [V_1 V_2 \dots V_n]^T$ 。在结构力学中，要求由外力 K 引起的系统的总变形能（势能）为最小，亦即当外力 K 满足最小势能原理条件时求出的杆件长度变形值 V 才是我们所需要的协调变形值。

2. 基础方程

由〔5〕可知，线性弹性结构应变能为

$$U = \frac{1}{2} N^T V, \quad (1)$$

又根据虎克定律知，由 N 引起杆件的长度变形

$$V = P^{-1} N, \quad (2)$$

式中 P 为杆件刚度阵（边长权矩阵），它表示杆件的质量特征，事先是已知的。据〔5〕又知，外力 K 与内力 N 有如下关系

$$N = A^T K, \quad (3)$$

式中矩阵

$$A^T = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \vdots & r_1 \\ a_2 & b_2 & \vdots & r_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & b_n & \vdots & r_n \end{pmatrix} \quad (4)$$

称外力 K 的转移矩阵，其元素可用虚功原理很容易地求出。顾及（2）及（3）式，则（1）式变为

$$U = \frac{1}{2} K^T A P^{-1} A^T K. \quad (5)$$

据〔5〕又知系统的外力势能为

$$-\Delta^T K, \quad (6)$$

于是结构中总势能为

$$J = \frac{1}{2} K^T A P^{-1} A^T K - \Delta^T K, \quad (7)$$

若令 $M = AP^{-1}A^T$, 它是满秩方阵。 $W = -\Delta$ 称为闭合差, 且 $W_i = W_{i_{测}} - W_{i_{已知}}$, 则 (7) 式变为

$$J = \frac{1}{2} K^T M K + W^T K. \quad (8)$$

根据最小势能原理, (8) 式对 K 求一阶导数, 并令其为零, 则得式

$$MK + W = 0. \quad (9)$$

由于二阶导数 $J'' > 0$, 故 J 取极小值时 K 为

$$K = -M^{-1}W. \quad (10)$$

将 (3) 式代入 (2) 式, 得协调变形值

$$V = P^{-1}A^T K. \quad (11)$$

将上式左乘矩阵 A , 并顾及 (10) 式, 则有式

$$AV + W = 0. \quad (12)$$

以上 (12), (9) 及 (11) 各式分别称为力法平差的变形协调条件式, 力法方程式及杆件变形值方程式, 它们统称为力法平差的基础方程。因此, 按力法进行工程三维测边网平差的主要计算步骤是:

- 1) 计算转移系数矩阵 A 中的各元素和闭合差 W , 从而组成变形协调条件式 (12);
- 2) 计算结构的总体刚度阵 M , 从而组合法方程 (9), 并按 (10) 式解出 K 值;
- 3) 按 (11) 式计算各杆件的变形值 V 。

如果将力法平差基础方程同基于最小二乘法原理推导的条件平差基础方程对照, 我们便可发现, 它们是一一相应的, 这就是说, 两种平差方法的基本公式的形式是一致的, 计算步骤也相同。因此, 我们可借助力学中的若干概念对条件平差中的有关量作如下新的解释: 一个条件式相当于 r 次超静定结构中的变形协调条件式; 条件式系数矩阵 A 则相当于外力 K 与各杆件轴向内力 N 的变换矩阵, 通过这种线性变换将一组确定的外力 K 转变为各杆件的轴向内力 N ; 联系数 K 可相当于满足最小势能原理而加在多余杆件上的一组外力; 改正数 V 则相当于根据确定的内力 N 按虎克定律计算的杆件长度协调变形值。通过以上这些解释, 疏导了测量学和结构力学两学科之间的某些联系, 并对条件平差有了进一步理解。

3. 变形协调条件式的组成

力法平差同条件平差一样, 条件式 (12) 的组成是十分重要的工作。当按条件平差时, 空间测边网条件式的组成是十分复杂甚至是十分困难的。但力法平差时, 它可借助于结构力学“虚功原理”很容易地组成, 这是这种平差方法的优点之一。下面就重点阐述转移矩阵 A 的组成方法。

根据结构力学中所阐述过的虚功原理可知, 只要在确定的一次超静定结构的多余杆件上施加单位外力 ($f = +1$), 利用节点空间力系平衡方程式: $\sum f_x = 0$, $\sum f_y = 0$ 及 $\sum f_z = 0$,

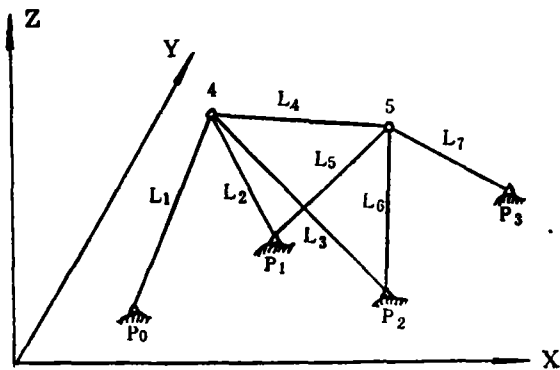


图 1

求出各杆件所受的内力 f_i ，那么这些 f_i 便是 A 阵中相应的元素。如图 1 所示空间测边网，0~3 为已知点，4~5 为未知点； $L_1 \sim L_7$ 为观测斜距，由公式

$$r = n - 3P$$

可知该网有一个条件式，即该结构为确定的一次超静定结构。式中 n 为观测边长数， P 为待定点数。今选 L_4 为多余杆件，把它截断，并加一对轴向单位外力 $f_4 = +1$ ，由它引起的其它杆件之内力为 f_i 。根据空间力 f_i 的起、终点已知坐标，可以很容易地求出该力 f_i 在 X、Y 及 Z 坐标轴上的分力：

$$f_{x_i} = \frac{x_k - x_i}{L_i} \cdot f_i = \frac{\Delta X_i}{L_i} \cdot f_i = \cos\alpha_i \cdot f_i,$$

$$f_{y_i} = \frac{y_k - y_i}{L_i} \cdot f_i = \frac{\Delta Y_i}{L_i} \cdot f_i = \cos\beta_i \cdot f_i;$$

$$f_{z_i} = \frac{z_k - z_i}{L_i} \cdot f_i = \frac{\Delta Z_i}{L_i} \cdot f_i = \cos\gamma_i \cdot f_i.$$

式中 x_i, y_i, z_i 及 x_k, y_k, z_k 分别为 f_i 起终点的近似空间坐标； L_i 为 i 边的边长观测值； $\cos\alpha_i, \cos\beta_i$ 及 $\cos\gamma_i$ 分别称为力 f_i 对坐标轴 X、Y、Z 的方向余弦。因此，对于 4 号点使用力平衡方程，则

$$\left. \begin{array}{l} \text{由 } \Sigma f_x = 0, \text{ 得 } \Sigma \cos\alpha_i \cdot f_i = 0 \\ \text{由 } \Sigma f_y = 0, \text{ 得 } \Sigma \cos\beta_i \cdot f_i = 0 \\ \text{由 } \Sigma f_z = 0, \text{ 得 } \Sigma \cos\gamma_i \cdot f_i = 0 \end{array} \right\} (i = 1, 2, 3, 4) \quad (13)$$

上式即为

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\Delta X_1}{L_1} \cdot f_1 + \frac{\Delta X_2}{L_2} \cdot f_2 + \frac{\Delta X_3}{L_3} \cdot f_3 + \frac{\Delta X_4}{L_4} \cdot 1 = 0 \\ \frac{\Delta Y_1}{L_1} \cdot f_1 + \frac{\Delta Y_2}{L_2} \cdot f_2 + \frac{\Delta Y_3}{L_3} \cdot f_3 + \frac{\Delta Y_4}{L_4} \cdot 1 = 0 \\ \frac{\Delta Z_1}{L_1} \cdot f_1 + \frac{\Delta Z_2}{L_2} \cdot f_2 + \frac{\Delta Z_3}{L_3} \cdot f_3 + \frac{\Delta Z_4}{L_4} \cdot 1 = 0 \end{array} \right\} (13)'$$

由上式可解出三个内力 f_i ($i = 1, 2, 3$)。同理对 5 点再使用力平衡方程，可得与 (13) 式相似的方程组，但此时 $i = 5, 6, 7$ 。亦即

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\Delta X_5}{L_5} \cdot f_5 + \frac{\Delta X_6}{L_6} \cdot f_6 + \frac{\Delta X_7}{L_7} \cdot f_7 + \frac{\Delta X_4}{L_4} \cdot 1 = 0 \\ \frac{\Delta Y_5}{L_5} \cdot f_5 + \frac{\Delta Y_6}{L_6} \cdot f_6 + \frac{\Delta Y_7}{L_7} \cdot f_7 + \frac{\Delta Y_4}{L_4} \cdot 1 = 0 \\ \frac{\Delta Z_5}{L_5} \cdot f_5 + \frac{\Delta Z_6}{L_6} \cdot f_6 + \frac{\Delta Z_7}{L_7} \cdot f_7 + \frac{\Delta Z_4}{L_4} \cdot 1 = 0 \end{array} \right\} (13)''$$

由上式又可解出另外三个内力 f_i ($i = 5, 6, 7$)。于是，利用已经求得的这些内力 f_i ，

便可组成变形协调方程式：

$$\sum_{i=1}^r f_i V_i + W_i = 0, \quad (14)$$

此式即为 A 及 W 阵中第一行元素。显然可用下式检核系数计算的正确性：

$$\cos^2 \alpha_i + \cos^2 \beta_i + \cos^2 \gamma_i = 1. \quad (15)$$

由于空间节点力系中只有三个力平衡方程式，只能解出三个确定的力 f_i ，故虽然多余杆件可在本系统中任意选择，但应注意使得每个节点只能与含有三根未知力的杆件与其连接，这在测边网中总是能够做到的。

上面研究的是一个基本图形——只存在一个条件的图形的条件式的组成。但在测边网中，图形往往比较复杂，条件数也多于 1 个。对于这类测边网在组成条件时，应首先根据整体静定和几何不变的原则，把网化简为独立的交会图形，此时没有用到的边即为多余边，而多余边的数目即为条件数。接着，将这些多余边截断，先在其中一个多余边上加一对单位外力 $f = +1$ ，我们来考察一下这时各杆件受力情况。由结构力学知识可知，对于由三根杆件铰接成的节点，当该节点无外力作用时，此三根杆件均为零杆。这就是说，其余的多余杆件及构成简单空间交会图形的所有杆件均为零杆，只有与施加一对单位外力 f 有关的杆件，即构成一次超静定基本结构的杆件，才受有内力 f_i 。这样便可以从整体结构中确定出一个基本超静定结构。利用同样方法，再对第二个，第三个，直至第 r 个多余杆件分别加一对单位外力，就可再分别确定出各个相应的基本超静定结构。最后，针对每个基本结构，应用(13)式求出各力 f_i ，从而组成相应的变形协调条件式。

从上可见，利用虚功原理计算条件式系数十分简便，且有检核，便于编写程序。

三、精度评定

力法平差的精度评定尤为简便，这主要表现在它可以很方便地列出任意方向的点位位差权函数式，这一优点对工程测量来说很有实用价值。

我们知道，在测量平差中，设平差值函数

$$F = F(\bar{L}_1, \bar{L}_2, \dots, \bar{L}_n),$$

经线性化后，得权函数式：

$$\Delta F = f_1 V_1 + f_2 V_2 + \dots + f_n V_n, \quad (16)$$

式中 $f_i = \frac{\partial F}{\partial L_i}$ ，对于三维测边网的点位权函数式的列立是相当困难的。但在力法平差中，却很容易的实现。对于二维网的情况，〔4〕已作了阐述，现把它引伸到三维网。

众所周知，在结构力学中，要建立某一结构中各杆件的长度变形 V_i 同某节点沿特定方向（方向余弦为 $\cos \alpha$ ， $\cos \beta$ 及 $\cos \gamma$ ）的节点位移 d 之间的函数关系，应首先在该结构中选择一从固定点开始一直传递到该节点的，由必要杆件——3 个杆件连接而成的基本静定结构，并把它从整体结构中分离出来。然后，在该节点上沿需要的特定方向加单位外力 $f = +1$ ，再按节点力平衡方程解算出各杆件此时所受到的轴向力 f_i 。最后，由虚功原理便可建立节点沿该方向的位移 d 同各杆件变形值 V_i 间的关系式，它就是我们所要求的节点位移

权函数式。比如，现要求图 1 第 5 点沿某方向（方向余弦 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ ）点位移权函数式，首先选择包括第 5 点在内的能从三个已知点（ P_1, P_2, P_3 ）计算出该点坐标的简单静定空间桁架 $P_1P_2P_3$ —No5。在第 5 点上，沿要求的特定方向，施加单位外力（ $f = +1$ ），按节点静力平衡方程，

$$\left. \begin{aligned} \text{由 } \Sigma f_x = 0, \text{ 得 } \quad \Sigma \cos\alpha_i f_i + \cos\alpha \cdot 1 = 0 \\ \text{由 } \Sigma f_y = 0, \text{ 得 } \quad \Sigma \cos\beta_i f_i + \cos\beta \cdot 1 = 0 \\ \text{由 } \Sigma f_z = 0, \text{ 得 } \quad \Sigma \cos\gamma_i f_i + \cos\gamma \cdot 1 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

式中 $i = 5, 6, 7$ 。上式即为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta X_5}{L_5} \cdot f_5 + \frac{\Delta X_6}{L_6} \cdot f_6 + \frac{\Delta X_7}{L_7} \cdot f_7 + \cos\alpha = 0 \\ \frac{\Delta Y_5}{L_5} \cdot f_5 + \frac{\Delta Y_6}{L_6} \cdot f_6 + \frac{\Delta Y_7}{L_7} \cdot f_7 + \cos\beta = 0 \\ \frac{\Delta Z_5}{L_5} \cdot f_5 + \frac{\Delta Z_6}{L_6} \cdot f_6 + \frac{\Delta Z_7}{L_7} \cdot f_7 + \cos\gamma = 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)'$$

由上式可解算出三个内力 f_i 。于是，第 5 点沿该方向的点位移，也就是我们所要求的权函数式为

$$d = f_5 V_5 + f_6 V_6 + f_7 V_7. \quad (18)$$

在一般情况下，若设 $f^T = [f_1, f_2, \dots, f_n]$ ，则权函数式的矩阵表达式为

$$d = f^T V. \quad (19)$$

下面证明这种方法的正确性。

设在所取出的隔离体所要求的点位移方向上施加单位外力（ $f = +1$ ），点位移沿此方向产生位移为 d ，按照上述方法求出各杆件内力 f_i ，由此引起各杆件变形 V_i （ $i = 1, 2, \dots, n$ ）。则根据〔5〕，外力作的功为

$$w_{\text{外}} = 1 \cdot d,$$

内力所作的功为

$$w_{\text{内}} = f_1 V_1 + f_2 V_2 + \dots + f_n V_n.$$

由功能原理知 $w_{\text{外}} = w_{\text{内}}$ ，

$$\text{于是有} \quad d = f_1 V_1 + f_2 V_2 + \dots + f_n V_n. \quad (20)$$

比较（16）及（20）式可知，它们都是表示该点沿该方向点位移发生的变化，这就证明了用力法列立点位移权函数式的正确性。

当要求评定点位移坐标精度并绘制点位移误差椭球时，这时应列立点位移坐标权函数式。为此只要令相应坐标轴的方向余弦为“+1”，而其它两轴的方向余弦均为“0”即可。例如，当评定某点 x 坐标的精度时，只要令

$$\cos\alpha = +1, \cos\beta = 0, \cos\gamma = 0,$$

并把它们代入（17）'，求出各系数 f_i ，从而可组成 X 坐标的权函数式。仿此也可列出 Y 及 Z 坐标的权函数式。仿（19）式，它们的矩阵表达式为

$$\left. \begin{aligned} d_x &= f_x^T V \\ d_y &= f_y^T V \\ d_z &= f_z^T V \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

综上所述，工程三维测边网力法平差时，为评定点位精度而列立点位位差权函数式的步骤为：

- 1) 从已知点开始，按空间三边交会法选择计算待定点坐标的基本图形；
- 2) 在该待定点上，沿坐标轴或某特定方向（方向余弦为 $\cos\alpha$ ， $\cos\beta$ 及 $\cos\gamma$ ）加外力 $f = +1$ ，由该点开始使用 (17)' 式及其相应公式，逐点解出基本图形中各边系数 f ；
- 3) 由 (19) 式或 (21) 式直接写出点位位差权函数式的具体表达式。

有了权函数式，便可在法方程解算中求出坐标权倒数 Q_{xx} 、 Q_{yy} 、 Q_{zz} 及其相关权倒数 Q_{xy} 、 Q_{xz} 、 Q_{yz} 。再通过特征方程

$$\begin{vmatrix} Q_{xx} - \lambda & Q_{xy} & Q_{xz} \\ Q_{yx} & Q_{yy} - \lambda & Q_{yz} \\ Q_{xz} & Q_{yz} & Q_{zz} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (22)$$

解出特征根 λ_i ($i = 1, 2, 3$)；再根据下式

$$\begin{pmatrix} Q_{xx} - \lambda_i & Q_{xy} & Q_{xz} \\ Q_{yz} & Q_{yy} - \lambda_i & Q_{yz} \\ Q_{xz} & Q_{yz} & Q_{zz} - \lambda_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = 0 \quad (23)$$

解出属于 λ_i ($i = 1, 2, 3$) 的特征向量 $(X_i, Y_i, Z_i)^T$ ：

$$x_i = \frac{U_i}{T}, \quad y_i = \frac{V_i}{T}, \quad z_i = \frac{W_i}{T} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \text{式中} \quad U_i &= Q_{xz}(Q_{yy} - \lambda_i) - Q_{xy}Q_{yz} \\ V_i &= Q_{yz}(Q_{xx} - \lambda_i) - Q_{xy}Q_{xz} \\ W_i &= Q_{yz}^2 - (Q_{xx} - \lambda_i)(Q_{yy} - \lambda_i) \\ T &= \sqrt{U_i^2 + V_i^2 + W_i^2} \end{aligned} \quad (25)$$

于是该误差椭球的三个半轴为

$$A = m_0 \sqrt{\lambda_1}, \quad B = m_0 \sqrt{\lambda_2}, \quad C = m_0 \sqrt{\lambda_3} \quad (26)$$

$$\text{式中单位权中误差 } m_0 = \pm \sqrt{\frac{V^T P V}{r}}$$

任意方向的点位误差：

$$m_\alpha = m_0 \sqrt{Q_{\alpha\alpha}} \quad (27)$$

式中 $Q_{\alpha\alpha}$ 为沿所求方向的权倒数。

四、应用举例*

有三维测边网如图 1 (取自[2])，已知点坐标及等权观测的斜距列于表 1。

表 1

pt.	x(m)	y(m)	z(m)	观测边长 (m)
P_0	124.173	105.642	82.027	$L_1 = 208.474$
P_1	251.905	425.181	109.911	$L_2 = 258.558$
P_2	513.344	86.072	54.806	$L_3 = 360.731$
P_3	873.527	142.365	69.559	$L_4 = 548.626$
				$L_5 = 494.121$
				$L_6 = 401.433$
				$L_7 = 306.923$

平差计算框图如图 2 所示。

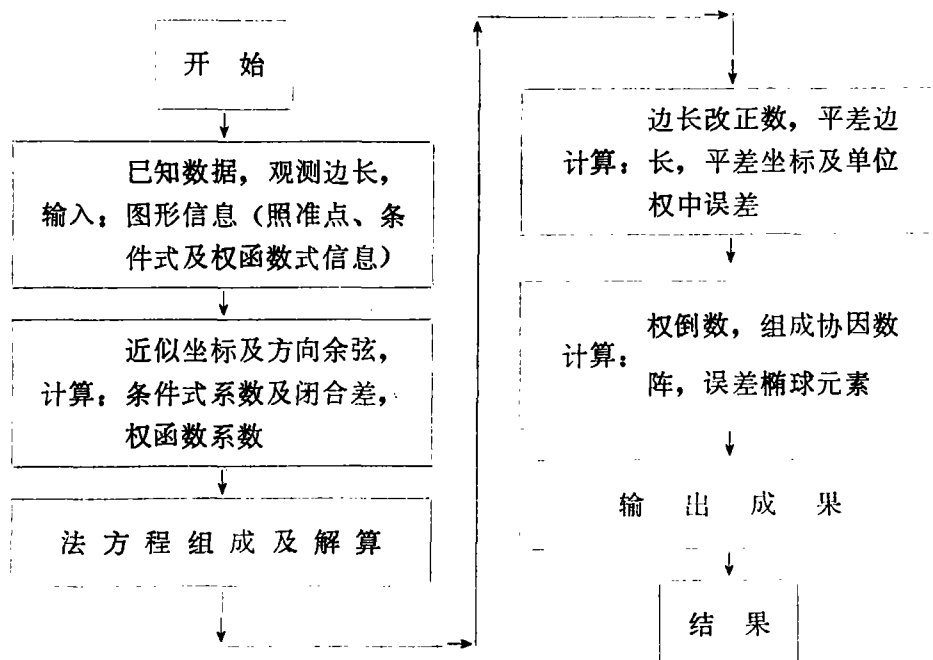


图 2

* 部份计算结果取自武汉测绘科技大学工测系810级吉金堂、熊永良、刘权威同学所作的毕业设计《三维测边网力法平差及程序》，该毕业设计的指导教师为本文作者。

已知点坐标 和待定点近似坐标	权函数 (1) 系数	改正数和平差边长	误差椭球元素
X(0) = 124.17300 m	A(1,0) = 0.60464	V(0) = 6.01 mm	NO = 4
Y(0) = 105.64200 m	A(1,1) = -0.00567	L(0) = 208.48001 m	A = 32.85 mm
Z(0) = 82.02700 m	A(1,2) = -0.88469	V(1) = -3.31 mm	U = -0.7098443
X(1) = 251.90500 m	A(1,3) = 0.00000	L(1) = 258.55468 m	V = 0.4630072
Y(1) = 425.18100 m	A(1,4) = 0.00000	V(2) = -7.24 mm	W = -0.5307968
Z(1) = 109.91100 m	A(1,5) = 0.00000	L(2) = 360.72375 m	B = 28.22 mm
X(2) = 513.34400 m	A(1,6) = 0.00000	V(3) = 15.41 mm	U = 0.0167294
Y(2) = 86.07200 m		L(3) = 306.93841 m	V = -0.7422934
Z(2) = 54.80600 m	权函数 (2) 系数	V(4) = -19.94 mm	W = -0.6698660
X(3) = 873.52700 m	A(2,0) = 0.34642	L(4) = 401.41306 m	C = 28.40 mm
Y(3) = 142.36500 m	A(2,1) = -0.85335	V(5) = 9.06 mm	U = -0.7041603
Z(3) = 69.55900 m	A(2,2) = 0.32111	L(5) = 494.13006 m	V = -0.4843692
X(4) = 224.55932 m	A(2,3) = 0.00000	V(6) = 9.66 mm	W = 0.5191768
Y(4) = 201.87524 m	A(2,4) = 0.00000	L(6) = 548.63566 m	MX = 30.72 mm
Z(4) = 237.34331 m	A(2,5) = 0.00000	M1 = 30.17 mm	MY = 29.32 mm
X(5) = 738.05583 m	A(2,6) = 0.00000		MZ = 29.64 mm
Y(5) = 389.63149 m	权函数 (3) 系数	平差坐标	MP = 51.79 mm
Z(5) = 190.83789 m	A(3,0) = 0.73680	X(0) = 124.17300 m	
闭合差	A(3,1) = 0.53239	Y(0) = 105.64200 m	
W(0) = -94.17 mm	A(3,2) = 0.37285	Z(0) = 82.02700 m	
条件方程系数	A(3,3) = 0.00000	X(1) = 251.90500 m	
A(0,0) = 0.62202	A(3,4) = 0.00000	Y(1) = 425.18100 m	
A(0,1) = -0.34248	A(3,5) = 0.00000	Z(1) = 109.91100 m	
A(0,2) = -0.74975	A(3,6) = 0.00000	X(2) = 513.34400 m	
A(0,3) = 1.59447	逆矩阵	Y(2) = 86.07200 m	
A(0,4) = -2.06212	Q(0,0) = 1.03696	Z(2) = 54.80600 m	
A(0,5) = 0.93725	Q(0,1) = -0.09832	X(3) = 873.52700 m	
A(0,6) = 1.00000	Q(0,2) = 0.11300	Y(3) = 142.36500 m	
	Q(1,1) = 0.94401	Z(3) = 69.55900 m	
	Q(1,2) = -0.07924	X(4) = 224.56938 m	
	Q(2,2) = 0.96535	Y(4) = 201.87783 m	
	MO = 30.17 mm	Z(4) = 237.34327 m	
		X(5) = 738.02676 m	
		Y(5) = 389.54139 m	
		Z(5) = 191.07790 m	

第 4 点的点位误差椭球如图 3 所示。
上面计算结果与间接平差结果完全一致。

五、结 论

应用力学原理推导的工测三维测边网力法平差的基础方程，同按最小二乘法推导的条件测量平差的基础方程的形式是一致的，平差计算的步骤也基本相同。但按本文所介绍的力学平差法有如下优点：

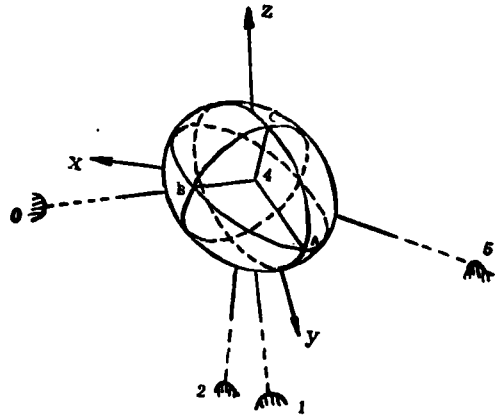


图 3 比例尺 1 : 3 单位: cm

1. 力学平差法有十分明显的物理意义, 因而测量人员是不难理解和掌握的。借助力学中的某些概念可对条件平差的有关量作出简明的解释, 从而疏导了测量学和结构力学两学科之间的某些联系, 并对条件平差有了进一步理解。

2. 可以较简便地组成力法条件方程式, 从而从根本上避免了条件平差中这一复杂而又繁琐的工作。

3. 可以较简便地列出任意方向(其中包括坐标方向)的点位位差权函数式, 这对工程测量控制网的精度评定和精度分析有一定的实用价值。

4. 规律性较强, 便于编写程序。

参 考 文 献

- [1] Danial.N.F., Virtual Work Adjustment of Trilateration Nets, Journal of the Division of Surveying and Mapping, American Society of Civil Engineers, Vol. 105, 1979.
- [2] Danial.N.F., Double Point Resection in Space, 1983.
- [3] 孔详元、王建国, 测边网力学平差, 测绘技术, 2, 1983.
- [4] 孔详元、王建国, 测边网条件平差时点位位差权函数式列立的新方法, 勘察科学技术, 1, 1984.
- [5] A.S.哈尔等, 结构分析原理, 中国建筑工业出版社, 1981.

The Application of Mechanical Principles to the Adjustment and Accuracy Evaluation of Three-dimensional Terrestrial Trilateration Nets in Engineering Surveying

Kong Xiangyuan

Abstract

With the popularization of the use of electronic distance measuring equipment and the increase of the accuracy of ranging, three-dimensional terrestrial trilateration nets find more and more application in engineering surveying. So far, however, not enough research has been made on the adjustment and accuracy evaluation of the nets. To treat the problem, the present article offers a simple and convenient way for adjustment—adjustment on mechanical principles accompanied by a BASIC program. The advantages and efficiency of this method are tested and verified through numerical examples.

【Key words】 three-dimensional terrestrial network, principle of virtual work, adjustment, weight function, error ellipsoid