DOI:10.13203/j.whugis1986.04.007

总26期 第4期 武汉测绘科技大学学报 Sum26 No.4
1986年12月 Journal of Wuhan Technical University of Surveying and Mapping Dec. 1986

# 顾及起始数据误差影响时单位权中误差的估值

黄加纳

**摘　要**

本文推导了在附有条件的间接平差和附有未知数的条件平差两种方法中，顾及起始数据误差影响时，计算单位权中误差估值$\hat{\sigma}_0$的公式，并以两个实例说明，平差时应该考虑起始数据误差对$\hat{\sigma}_0$的影响。

【关键词】 起始数据；误差影响；单位权中误差，估值

## 一、前　言

在各类经典测量控制网中，都具有一定数量的起始数据，例如，三角网中的起始点坐标、起始边长和起始方位角；水准网中的起始点高程等等。由于起始数据与观测值比较具有较高的精度，故在平差计算时，一般都将它们作为不含误差的数据来处理，即对它们不加改正数。但是，实际上起始数据也含有一定的误差，它们对平差结果必然带来一定的影响。在条件平差和间接平差中，顾及起始数据误差的影响，求平差值函数的权倒数和未知数函数的权倒数问题，已有不少文献作了详细讨论。本文从附有条件的间接平差和附有未知数的条件平差两种方法出发，推导了顾及起始数据误差影响时，单位权中误差的估值$\hat{\sigma}_0$的计算公式，以及普通间接平差和条件平差时$\hat{\sigma}_0$的计算公式。

## 二、附有条件的间接平差时$\hat{\sigma}_0$的计算公式

设某平差问题中有起始数据 $\underset{u\times 1}{\lambda}$ 及其协因数阵 $\underset{u\times u}{Q_\lambda}$，$\lambda$、$Q_\lambda$ 是由高一级控制网平差得到

本文1986年1月收到.

的或是直接精确测定的。已知本级控制网的观测值 $\underset{n\times1}{L}$，观测值权阵 $\underset{n\times n}{P}$ 及必要观测值个数 $t_0$。现选定 t 个未知数 $\underset{t\times1}{\hat{X}}$，且 $t>t_0$，设 $r=t-t_0$，则未知数之间存在 r 个条件方程。按附有条件的间接平差法进行平差，误差方程和条件方程的一般形式为

$$\left.\begin{aligned}\underset{n\times1}{V} &= \underset{n\times1}{f_B}(\hat{X},\lambda)-\underset{n\times1}{L}\\ \underset{r\times1}{f_A}(\hat{X},\lambda) &= 0\end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

引入未知数近似值 $X_0$，按台劳公式展开并舍去二次及二次以上各项，则得线性化后的形式：

$$\left.\begin{aligned}\underset{n\times1}{V} &= \underset{n\times t}{B}\,\underset{t\times1}{\delta\hat{X}}+\underset{n\times1}{l}\\ \underset{r\times t}{A_x}\,\underset{t\times1}{\delta\hat{X}}+\underset{r\times1}{W} &= 0\end{aligned}\right\}, \tag{2}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}&\underset{n\times t}{B}=\left.\frac{\partial f_B(\hat{X},\lambda)}{\partial\hat{X}}\right|_{\hat{X}=X_0},\\ &\underset{r\times t}{A_x}=\left.\frac{\partial f_A(\hat{X},\lambda)}{\partial\hat{X}}\right|_{\hat{X}=X_0},\\ &\text{且 } R(B)=t,\text{ 列满秩；} R(A_x)=r,\text{ 行满秩。}\\ &\underset{n\times1}{l}=f_B(X_0,\lambda)-L,\\ &\underset{r\times1}{W}=f_A(x_0,\lambda)\text{。}\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

误差方程的常数项 $\underset{n\times1}{l}$、条件方程的闭合差 $\underset{r\times1}{W}$ 与起始数据 $\underset{u\times1}{\lambda}$ 之间的微分关系式为

$$\left.\begin{aligned}\underset{n\times1}{dl} &= \underset{n\times u}{B\lambda}\,\underset{u\times1}{d\lambda}-\underset{n\times1}{dL}\\ \underset{r\times1}{dW} &= \underset{r\times u}{A_\lambda}\,\underset{u\times1}{d\lambda}\end{aligned}\right\}, \tag{4}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}&\underset{n\times u}{B_\lambda}=\left.\frac{\partial f_B(X_0,\lambda)}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=\tilde{\lambda}}\\ &\underset{r\times u}{A_\lambda}=\left.\frac{\partial f_A(X_0,\lambda)}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=\tilde{\lambda}}\end{aligned}\right\}\text{。} \tag{5}$$

下面，先按附有条件的间接平差法进行平差，求出改正数 $\underset{n\times1}{V}$ 及其协因数阵 $\underset{n\times n}{Q_{VV}}$，然后推导 $\hat{\sigma}_0$ 的计算公式。

由（2）式组成法方程式

$$\begin{pmatrix} N & A_x^T \\ A_x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta\hat{X} \\ K \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} W_t \\ W \end{pmatrix}=0 \quad。\tag{6a}$$

其中 $\underset{t\times t}{N}=B^TPB$， $\underset{t\times 1}{W_t}=B^TPl$， $R(N)=R(B)=t$。

**上式可简写为：**

$$N_y\hat{y}+W_y=0。\tag{6b}$$

令

$$N_y^{-1}=\begin{pmatrix} N & A_x^T \\ A_x & 0 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} Q_{tt} & Q_{tr} \\ Q_{rt} & Q_{rr} \end{pmatrix}.\tag{7}$$

于是有

$$\hat{y}=\begin{pmatrix} \delta\hat{X} \\ K \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -Q_{tt}W_t-Q_{tr}W \\ -Q_{rt}W_t-Q_{rr}W \end{pmatrix}。\tag{8}$$

根据分块矩阵的求逆公式，由（7）式得

$$\begin{pmatrix} Q_{tt} & Q_{tr} \\ Q_{rt} & Q_{rr} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} N^{-1}+N^{-1}A_x^TQ_{rr}A_xN^{-1} & -N^{-1}A_x^TQ_{rr} \\ -Q_{rr}A_xN^{-1} & Q_{rr} \end{pmatrix},\tag{9}$$

其中 $Q_{rr}=-(A_xN^{-1}A_x^T)^{-1}$.

因为

$$\begin{pmatrix} N & A_x^T \\ A_x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_{tt} & Q_{tr} \\ Q_{rt} & Q_{rr} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \underset{t\times t}{E_1} & 0 \\ 0 & \underset{r\times r}{E_2} \end{pmatrix},$$

则下列等式成立：

$$\left.\begin{aligned} NQ_{tt}+A_x^TQ_{rt}&=E_1 \\ NQ_{tr}+A_x^TQ_{rr}&=0 \\ A_xQ_{tt}&=0 \\ A_xQ_{tr}&=E_2 \end{aligned}\right\}\tag{10}$$

由上式可得

$$\left.\begin{aligned} Q_{tt}NQ_{tt}&=Q_{tt} \\ Q_{rt}NQ_{tr}&=-Q_{rr} \\ Q_{tt}NQ_{tr}&=0 \end{aligned}\right\}。\tag{11}$$

将（8）式中的 $\delta\hat{X}$ 代入（2）式的第一式，可得改正数 V：

$$\begin{aligned} V&=B\delta\hat{X}+l \\ &=-BQ_{tt}W_t-BQ_{tr}W+l \\ &=-(BQ_{tt}B^TP-E)l-BQ_{tr}W, \end{aligned}\tag{12}$$

顾及（4）、（11）两式，得到以下微分关系式：

$$
\begin{aligned}
dV &= -(BQ_{tt}B^TP-E)dl-BQ_{tr}dW \\
&= -(BQ_{tt}B^TP-E)(B_\lambda d\lambda-dL)-BQ_{tr}A_\lambda d\lambda \\
&= (BQ_{tt}B^TP-E)dL+(B_\lambda-BQ_{tt}B^TPB_\lambda-BQ_{tr}A_\lambda)d\lambda\text{。}
\end{aligned}
$$

由协因数传播律得

$$
\begin{aligned}
Q_{vv} &= (BQ_{tt}B^TP-E)P^{-1}(PBQ_{tt}B^T-E)+ \\
&\quad (B_\lambda-BQ_{tt}B^TPB_\lambda-BQ_{tr}A_\lambda)Q_\lambda(B_\lambda^T-B_\lambda^TPBQ_{tt}B^T-A_\lambda^TQ_{rt}B^T) \\
&= P^{-1}-BQ_{tt}B^T+(B_\lambda-BQ_{tt}B^TPB_\lambda-BQ_{tr}A_\lambda) \\
&\quad Q_\lambda(B_\lambda^T-B_\lambda^TPBQ_{tt}B^T-A_\lambda^TQ_{rt}B^T)\text{。}
\end{aligned}
\tag{13}
$$

我们知道，在不顾及起始数据误差影响时，单位权中误差估值按下式计算：

$$
\hat{\sigma}_0^2=\frac{V^TPV}{n-t+r}=\frac{V^TPV}{r_0}\ ,\tag{14}
$$

式中 $r_0$ 为多余观测数。我们从 $V^TPV$ 的数学期望出发，推导顾及起始数据误差时，单位权中误差的计算公式。

按照迹的定义可知

$$
V^TPV=tr(V^TPV)\ ,
$$

上式的数学期望为

$$
E(V^TPV)=E\{tr(V^TPV)\}\ \text{。}\tag{15}
$$

根据矩阵迹的性质并顾及$E(V)=0$有

$$
\begin{aligned}
E(V^TPV) &= E\{tr(V^TPV)\}=E\{tr(PVV^T)\}=tr\{E(PVV^T)\} \\
&= tr\{PE(VV^T)\}=tr\{PD_{vv}\}=\sigma_0^2tr\{PQ_{vv}\}\ \text{。}
\end{aligned}
\tag{16}
$$

将（13）式代入（16）式的 $tr\{PQ_{vv}\}$ 中得

$$
\begin{aligned}
tr\{PQ_{vv}\} &= tr(\underset{n\times n}{E}-PBQ_{tt}B^T)+tr\{P(B_\lambda-BQ_{tt}B^TPB_\lambda-BQ_{tr}A_\lambda) \\
&\quad Q_\lambda(B_\lambda^T-B_\lambda^TPBQ_{tt}B^T-A_\lambda^TQ_{rt}B^T)\}
\end{aligned}
\tag{17}
$$

顾及（9）式，上式中第一项为：

$$
\begin{aligned}
tr(E-PBQ_{tt}B^T) &= n-tr\{N(N^{-1}+N^{-1}A_x^TQ_{rr}A_xN^{-1})\} \\
&= n-tr\{\underset{t\times t}{E}+A_x^TQ_{rr}A_xN^{-1}\} \\
&= n-t+tr\{Q_{rr}(Q_{rr})^{-1}\} \\
&= n-t+tr(\underset{r\times r}{E}) \\
&= n-t+r=r_0\text{。}
\end{aligned}
\tag{18}
$$

由矩阵迹的性质并顾及（11）式，可推得第二项：

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{tr}\{P(B_\lambda - BQ_{tt}B^TPB_\lambda - BQ_{tr}A_\lambda)Q_\lambda(B_\lambda^T - B_\lambda^TPBQ_{tt}B^T - A_\lambda^TQ_{rt}B^T)\} \\
&= \operatorname{tr}\{PB_\lambda Q_\lambda B_\lambda^T + PBQ_{tt}B^TPB_\lambda Q_\lambda B_\lambda^TPBQ_{tt}B^T + PBQ_{tr}A_\lambda Q_\lambda A_\lambda^TQ_{rt}B^T \\
&- PB_\lambda Q_\lambda B_\lambda^TPBQ_{tt}B^T - PBQ_{tt}B^TPB_\lambda Q_\lambda B_\lambda^T - PB_\lambda Q_\lambda A_\lambda^TQ_{rt}B^T \\
&- PBQ_{tr}A_\lambda Q_\lambda B_\lambda^T + PBQ_{tt}B^TPB_\lambda Q_\lambda A_\lambda^TQ_{rt}B^T + PBQ_{tr}A_\lambda Q_\lambda B_\lambda^TPBQ_{tt}B^T\} \\
&= \operatorname{tr}\{B_\lambda^TPB_\lambda Q_\lambda + PBQ_{tt}B^TPB_\lambda Q_\lambda B_\lambda^TPBQ_{tt}B^T \\
&+ PBQ_{tr}A_\lambda Q_\lambda A_\lambda^TQ_{rt}B^T - 2PB_\lambda Q_\lambda B_\lambda^TPBQ_{tt}B^T \\
&- 2PB_\lambda Q_\lambda A_\lambda^TQ_{rt}B^T + 2PBQ_{tt}B^TPB_\lambda Q_\lambda A_\lambda^TQ_{rt}B^T\} \\
&= \operatorname{tr}\{B_\lambda^TPB_\lambda Q_\lambda - Q_\lambda A_\lambda^TQ_{rr}A_\lambda - 2Q_\lambda A_\lambda^TQ_{rt}B^TPB_\lambda - Q_\lambda B_\lambda^TPBQ_{tt}B^TPB_\lambda\} \\
&= \operatorname{tr}\left\{B_\lambda^T PB_\lambda Q_\lambda - Q_\lambda[B_\lambda^TPB\ A_\lambda^T]\begin{pmatrix} Q_{tt} & Q_{tr} \\ Q_{rt} & Q_{rr}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} B^TPB_\lambda \\ A_\lambda \end{pmatrix}\right\}。
\end{aligned}
$$

令

$$
N_\lambda = B_\lambda^TPB_\lambda\ ,\quad F_\lambda = \begin{pmatrix} B^TPB_\lambda \\ A_\lambda \end{pmatrix}, \tag{19}
$$

则有

$$
E(V^TPV) = \sigma_0^2\operatorname{tr}\{PQ_{vv}\} = \{r_0 + \operatorname{tr}(Q_\lambda N_\lambda - Q_\lambda F_\lambda^TN_y^{-1}F_\lambda)\}\sigma_0^2\ ,
$$

$$
\hat{\sigma}_0 = \sqrt{V^TPV/\{r_0 + \operatorname{tr}(Q_\lambda N_\lambda - Q_\lambda F_\lambda^TN_y^{-1}F_\lambda)\}}\quad 。\tag{20}
$$

上式即为附有条件的间接平差在顾及起始数据误差时，单位权中误差估值的计算公式。

对于普通的间接平差，因为

$$
N_y = N = B^TPB,\ F_\lambda = B^TPB_\lambda,
$$

故顾及起始数据误差时的单位权中误差估值的计算公式为

$$
\hat{\sigma}_0 = \sqrt{V^TPV/\{r_0 + \operatorname{tr}(Q_\lambda N_\lambda - Q_\lambda B_\lambda^TPBN^{-1}B^TPB_\lambda)\}}\quad 。\tag{21}
$$

## 三、附有未知数的条件平差时$\hat{\sigma}_0$的计算公式

设某平差问题中有起始数据 $\underset{u\times 1}{\lambda}$ 及其协因数阵 $\underset{u\times u}{Q_\lambda}$，它们是从高一级控制网平差得到或是直接精确测定的。已知本级控制网的观测值 $\underset{n\times 1}{L}$ 及其权阵 $\underset{n\times n}{P}$，必要观测值 $t_0$。现选取 $t$ 个未知数 $\underset{t\times 1}{\hat{X}}$，且 $t < t_0$，按附有未知数的条件平差法进行平差。条件式总数 $r = (n - t_0) + t = r_0 + t$。由条件方程

$$
\underset{r\times 1}{f}(\hat{L},\ \hat{X},\lambda) = 0 \tag{22}
$$

得线性化后的条件方程为

$$
\underset{r\times n}{A}\ \underset{n\times 1}{V} + \underset{r\times t}{A_x}\ \underset{t\times 1}{\delta\hat{X}} + \underset{r\times 1}{W} = \underset{r\times 1}{0}, \tag{23}
$$

式中

$$\left.\begin{aligned}
&\underset{r\times n}{A} = \frac{\partial f(\hat{L},\hat{X},\lambda)}{\partial \hat{L}}\Bigg|_{\substack{\hat{L}=L\\ \hat{X}=X_0}} \\
&\underset{r\times t}{A_x} = \frac{\partial f(\hat{L},\hat{X},\lambda)}{\partial \hat{X}}\Bigg|_{\substack{\hat{L}=L\\ \hat{X}=X_0}} \\
&\underset{r\times 1}{W} = f(L,X_0,\lambda)
\end{aligned}\right\}。 \tag{24}$$

且 $R(A)=r$，行满秩。

条件方程闭合差 $\underset{r\times 1}{W}$ 与起始数据 $\underset{u\times 1}{\lambda}$ 和观测值 $\underset{n\times 1}{L}$ 之间的微分关系式为

$$\underset{r\times 1}{dW} = \underset{r\times n}{A}\ \underset{n\times 1}{dL} + \underset{r\times u}{A_\lambda}\ \underset{u\times 1}{d\lambda}\quad, \tag{25}$$

式中

$$\underset{r\times u}{A_\lambda} = \frac{\partial f(L,X_0,\lambda)}{\partial \lambda}\Bigg|_{\lambda=\tilde{\lambda}}。 \tag{26}$$

下面，与附有条件的间接平差相似，先按附有未知数的条件平差求改正数 $\underset{n\times 1}{V}$ 及其协因数阵 $\underset{n\times n}{Q_{vv}}$，然后推导 $\hat{\sigma}_0$ 的计算公式。

由（23）式组成法方程，可写成以下形式：

$$\begin{pmatrix} N & A_x \\ A_x^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} K \\ \delta\hat{X} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} W \\ 0 \end{pmatrix} = 0\quad, \tag{27}$$

其中 $\underset{r\times r}{N} = AP^{-1}A^T$，$R(N)=R(A)=r$。其解为：

$$\begin{pmatrix} K \\ \delta\hat{X} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} N & A_x \\ A_x^T & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} W \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} Q_{rr} & Q_{rt} \\ Q_{tr} & Q_{tt} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Q_{rr} & W \\ -Q_{tr} & W \end{pmatrix}。 \tag{28}$$

根据分块矩阵求逆公式得：

$$\left.\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} Q_{rr} & Q_{rt} \\ Q_{tr} & Q_{tt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N^{-1}+N^{-1}A_xQ_{tt}A_x^TN^{-1} & -N^{-1}A_xQ_{tt} \\ -Q_{tt}A_x^TN^{-1} & Q_{tt} \end{pmatrix} \\
&Q_{tt} = -(A_x^TN^{-1}A_x)^{-1} \\
&Q_{rr}NQ_{rr} = Q_{rr}
\end{aligned}\right\}。 \tag{29}$$

考虑（28）式解得的 K，可得改正数 V：

$$V = P^{-1}A^TK = -P^{-1}A^TQ_{rr}W\ , \tag{30}$$

顾及（25）式，得微分关系式

$$dV = -P^{-1}A^TQ_{rr}dW = -P^{-1}A^TQ_{rr}AdL - P^{-1}A^TQ_{rr}A_\lambda d\lambda\ ,$$

由协因数传播律得改正数向量的协因数阵为

$$Q_{vv}=P^{-1}A^TQ_{rr}AP^{-1}A^TQ_{rr}AP^{-1}+P^{-1}A^TQ_{rr}A_\lambda Q_\lambda A_\lambda^TQ_{rr}AP^{-1}$$
$$=P^{-1}A^TQ_{rr}NQ_{rr}AP^{-1}+P^{-1}A^TQ_{rr}A_\lambda Q_\lambda A_\lambda^TQ_{rr}AP^{-1}。\tag{31}$$

令$N_\lambda=A_\lambda Q_\lambda A_\lambda^T$，顾及（29）式，则

$$Q_{vv}=P^{-1}A^TQ_{rr}AP^{-1}+P^{-1}A^TQ_{rr}N_\lambda Q_{rr}AP^{-1}。\tag{32}$$

由（16）式知

$$E(V^TPV)=\sigma_0^2\,\mathrm{tr}\{PQ_{vv}\},$$

计算$PQ_{vv}$的迹：

$$\mathrm{tr}\{PQ_{vv}\}=\mathrm{tr}(A^TQ_{rr}AP^{-1})+\mathrm{tr}(A^TQ_{rr}N_\lambda Q_{rr}AP^{-1})$$
$$=\mathrm{tr}(Q_{rr}N)+\mathrm{tr}(Q_{rr}N_\lambda)\ ,\tag{33}$$

而

$$\mathrm{tr}(Q_{rr}N)=\mathrm{tr}\{(N^{-1}+N^{-1}A_xQ_{tt}A_x^TN^{-1})N\}=\mathrm{tr}\{\underset{r\times r}{E}+A_x^TN^{-1}A_xQ_{tt}\}$$
$$=r+\mathrm{tr}\{A_x^TN^{-1}A_xQ_{tt}\}=r-\mathrm{tr}\{\underset{t\times t}{E}\}=r-t=r_0\ ,$$

故由（16）式得

$$E(V^TPV)=\sigma_0^2\{r_0+\mathrm{tr}(Q_{rr}N_\lambda)\}\ ,$$

即

$$\hat{\sigma}_0=\sqrt{V^TPV/\{r_0+\mathrm{tr}(Q_{rr}N_\lambda)\}}\ 。\tag{34}$$

上式即为附有未知数的条件平差中，顾及起始数据误差时，单位权中误差估值的计算公式。

对于普通的条件平差，因为条件式中没有未知数，$Q_{rr}=N^{-1}$，故

$$\hat{\sigma}_0=\sqrt{V^TPV/\{r_0+\mathrm{tr}(N_\lambda N^{-1})\}}\ 。\tag{35}$$

## 四、算例与結論

现以两个例子来说明$\hat{\sigma}_0$的计算步骤及起始数据误差对单位权中误差估值的影响。

〔例1〕 在水准网（图1）中，A、B、C为已知点，其高程协因数阵为$\underset{3\times3}{Q_\lambda}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}$。P为待定点，现测得各段高差为$h_1$、$h_2$、$h_3$（观测值略），并设$Q_{LL}=E$。按间接平差法和条件平差法计算顾及起始数据误差时的$\hat{\sigma}_0$值。

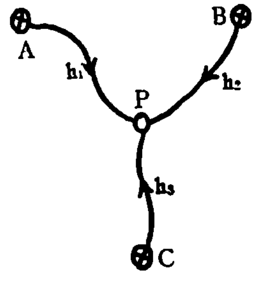

图1

〔解〕 **1.间接平差法**

$n=3,\ t_0=1,\ r_0=2,$

设 P 点高程最或然值为未知数$\hat{x}$。列出误差方程为

$$V=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\delta\hat{x}+\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\lambda-\begin{pmatrix}0\\7\\5\end{pmatrix}\text{mm。}$$

组成法方程为

$$3\delta\hat{x}-12=0,$$

解得

$$\delta\hat{x}=4。$$

故有

$$V=B\delta\hat{x}+l=\begin{pmatrix}4\\-3\\-1\end{pmatrix}\text{mm}\quad。$$

不顾及起始数据误差时的单位权中误差$\hat{\sigma}_0'$为

$$\hat{\sigma}_0'=\pm\sqrt{\frac{[VV]}{r_0}}=\pm\sqrt{\frac{26}{2}}=\pm3.6\text{mm。}$$

按照（21）式计算顾及起始数据误差时的单位权中误差$\hat{\sigma}_0$：

$$tr(B_\lambda Q_\lambda B_\lambda^T)=1.5\quad,$$

$$tr(B_\lambda Q_\lambda B_\lambda^T BN^{-1}B^T)\ =\frac{1}{6}\approx0.2,$$

$$\hat{\sigma}_0=\pm\sqrt{\frac{26}{2+1.5-0.2}}=\pm\sqrt{\frac{26}{3.3}}=\pm2.8\text{mm。}$$

### 2. 条件平差法

列出条件方程为

$$\left.\begin{aligned}V_1-V_2\qquad+W_1=0\\V_1\qquad-V_3+W_2=0\end{aligned}\right\},$$

式中

$$\begin{pmatrix}W_1\\W_2\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}h_1\\h_2\\h_3\end{pmatrix}+A_\lambda\begin{pmatrix}H_A\\H_B\\H_C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\-5\end{pmatrix}\text{mm}\quad,$$

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix},\ A_\lambda=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}。$$

组成法方程为

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} K + \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \end{pmatrix} = 0.$$

解得

$$K = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}。$$

于是可得

$$V = A^T K = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \text{mm}。$$

不顾及起始数据误差影响，可得单位权中误差$\hat{\sigma}_0$为

$$\hat{\sigma}_0 = \pm\sqrt{\frac{[VV]}{r_0}} = \pm\sqrt{\frac{26}{2}} = \pm 3.6\text{mm} 。$$

按照（35）式，计算顾及起始数据误差时的单位权中误差$\hat{\sigma}_0$：

$$tr(N^{-1}N_\lambda) = \frac{16}{12} \approx 1.3,$$

$$\hat{\sigma}_0 = \pm\sqrt{\frac{26}{2+1.3}} = 2.8\text{mm} 。$$

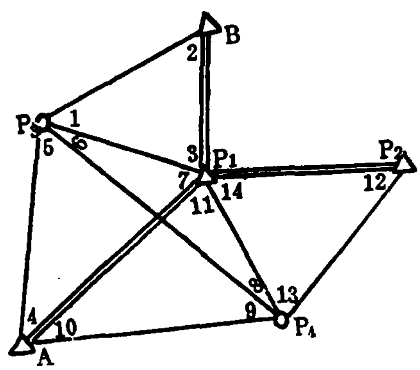

图 2

〔例 2〕 在三角网中（图 2），A、B 和 $P_1$、$P_2$ 分别为两次布设的首级三角网中的已知点，$P_3$、$P_4$ 为网中的加密点。已知A、B、$P_1$、$P_2$ 的坐标、坐标方位角和已知边长（具体数值略）。设 $\underset{8\times 1}{\lambda} = (x_{P_1} y_{P_1} x_{P_2} y_{P_2} x_A y_A x_B y_B)^T$，其协因数阵为 $\underset{8\times 8}{Q_\lambda}$。网中观测了 $L_1$，$L_2$……$L_{14}$等14个角度（观测值略），并设 $Q_{LL} = E$。按间接平差法计算顾及起始数据误差时单位权中误差$\hat{\sigma}_0$。

〔解〕 $n = 14$，$t_0 = 4$，

设 $P_3$、$P_4$ 两点的坐标为未知数$\hat{x}_1$，$\hat{x}_2$，$\hat{x}_3$，$\hat{x}_4$，则未知数为 $\underset{4\times 1}{\hat{X}} = (\hat{x}_1 \quad \hat{x}_2 \quad \hat{x}_3 \quad \hat{x}_4)^T$。

按间接平差法平差，误差方程系数阵、常数阵、$\underset{14\times 8}{B_\lambda}$ 从略，$Q_\lambda$如下：

$$
\underset{8\times 8}{Q_{\lambda}} = \left(\frac{2''.2}{3''.1}\right)^{2*} \cdot \begin{pmatrix}
3.1513 & 2.1072 & 4.4334 & -0.6645 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2.1072 & 1.8403 & 3.1148 & -0.1505 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
4.4334 & 3.1148 & 7.0905 & -1.2796 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.6645 & -0.1505 & -1.2796 & 2.1505 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.4418 & 0.3890 & -0.0404 & 0.0343 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.3890 & 0.4589 & 0.0726 & -0.2020 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -0.0404 & 0.0726 & 0.4845 & 0.1748 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.0342 & -0.2020 & 0.1748 & 0.3336
\end{pmatrix}。
$$

可得不顾及起始数据误差时的单位权中误差$\hat{\sigma}'_0$为

$$
\hat{\sigma}'_0 = \pm\sqrt{\frac{[VV]}{r_0}} = \pm\sqrt{\frac{98.22}{14-4}} = \pm 3''.1 \text{ 。}
$$

按照（21）式计算顾及起始数据误差时的单位权中误差$\hat{\sigma}_0$，有

$$
tr\{B_{\lambda}^{T}B_{\lambda}Q_{\lambda}\} = 13.92,
$$

$$
tr\{Q_{\lambda}B_{\lambda}^{T}BN^{-1}B^{T}B_{\lambda}\} = 8.88,
$$

$$
\hat{\sigma}_0 = \pm\sqrt{\frac{98.22}{10+13.9-8.8}} = \pm 2''.8 \text{ 。}
$$

由以上两例可以看出，本文所推导的在附有条件的间接平差和附有未知数的条件平差中，计算$\hat{\sigma}_0$的公式是正确的；在某些情况下，起始数据误差对$\hat{\sigma}_0$的影响相当可观，因此，在计算$\hat{\sigma}_0$时应该予以考虑。

## 参 考 文 献


〔1〕 於宗俦、鲁林成等，测量平差基础，测绘出版社，1983.

〔2〕 崔希璋、於宗俦、陶本藻、刘大杰，广义测量平差，测绘出版社，1982.


---

* 其中$\left(\frac{2''.2}{3''.1}\right)^2$是考虑$Q_{\lambda}$与单位权中误差匹配而乘的比例常数.

# The Estimator or Mean Square Error of Unit Weight Considering the Influence of Initial Datum Error

*Huang Jiana*

**Abstract**

In this paper, the formulae for calculating the estimator of mean square error of unit weight-- $\hat{\sigma}_0$ have been derived in the adjustment of observation equations with condition equations and the adjustment of condition equations with unknowns considering the influence of initial datum error. Then, this paper gives two examples which explain that the influence of initial datum error on $\hat{\sigma}_0$ must be considered.

**[Key Words]** initial datum; influence of error; mean square error of unit weight; estimator

---

## 启　　事

从1987年起，武汉测绘科技大学学报原采用的总期号将改用期卷号，1987年为第12卷。

我校学报巳经国际连续出版物数据系统（ISDS）中国国家中心分配给国际连续出版物号（ISSN）为ISSN 1000—050 X，从1987年起将该号印在封面右上角。

学报编辑部