DOI:10.13203/j.whugis1986.02.001

从平差问题的基准看秩亏自由网平差的应用

崔希璋　刘大杰

摘　要

本文主要阐述经典的最小二乘间接平差和秩亏自由网平差的基准，并据此讨论秩亏自由网平差的实际应用。

【关键词】 基准；秩亏自由网；平差

一、平差問題基准的概念

在测量平差问题中，待定的参数往往不是被观测量，也不是其它的可估量。如果没有一定的起算数据，也就不能直接由观测值求得待定参数的最佳估值。这种起算数据就称之为平差问题的“基准”。一个没有“基准”的测量控制网，在按间接平差时，其误差方程和法方程的系数阵都是秩亏阵，因而称为秩亏自由网。

水准网的待估参数一般是水准点的高程，而被观测量是水准点之间的高差，只根据观测高差是不可能求得各水准点高程的。如果还考虑水准尺的尺度比，将尺度比也作为待估参数，则根据观测高差也不可能确定尺度比。因此，在水准网中，为了求得各点的高程，需要一个高程基准；而为了求得尺度比，还需要一个尺度基准。

在三角网中，一般是以三角点的坐标作为待估参数，被观测量是方向或角度。只根据观测的方向或角度不可能确定各三角点的坐标，也就是说，不能确定网的位置、方位和大小。因此，需要有一个点的位置（纵、横坐标），一个方位和一个尺度基准。

测边网、边角网或导线网的被观测量是边长和方向（或角度），待估参数一般也是各点的坐标。为确定各点的坐标，需要有一个点的位置和一个方位基准；如果再将尺度比作为待定参数，则也需要一个尺度基准。

一般说来，对于纯粹的n维空间的几何控制网，当以点位和尺度比为待定参数，被观测量是边长（或高差）和方向（或角度）时，基准的类型和个数是（参见〔1〕）：

$$\left.\begin{array}{ll}\text{尺度基准：} d_1 = C_n^0 = 1 & \\ \text{位置基准（平移自由度）：} d_2 = C_n^1 = n & \\ \text{方位基准（旋转自由度）：} d_3 = C_n^2 = \dfrac{1}{2}n(n-1), & (n \geq 2)\end{array}\right\} \quad (1)$$

本文1985年8月收到。

水准网可以说是一维空间的控制网，它的高程基准也就是它的位置基准。所以其基准个数为

$$d_{\mathrm{I}}=C_1^0+C_1^1=2;$$

三角网、测边网、边角网和导线网都是二维平面控制网，故其基准个数是

$$d_{\mathrm{II}}=C_2^0+C_2^1+C_2^2=4;$$

而对于各种三维控制网，基准的个数是

$$d_{\mathrm{III}}=C_3^0+C_3^1+C_3^2=7。$$

为了在平差时求得非可估量（待定参数）的最佳估值，常常以不同的方式给定平差问题的基准。根据基准的性质，可以将它们分为“强基准”和“弱基准”两种类型（参见〔1〕）：若给定的基准是固定形式，即要求平差后保持基准的形式不变，则称为“强基准”；如果给定的基准是由一些具有随机信息的数据构成，平差后这些数据会得到一定的修正，则称为“弱基准”。

“滤波”中的待估参数（信号）都是随机量，而“配置”中的部分待估参数也是随机的信号，因此，滤波和配置的基准一般是由待估参数的随机信息——先验期望和先验方差确定，故它们一般属于“弱基准”问题。下面主要讨论经典的最小二乘间接平差和秩亏自由网平差的基准，并据此讨论秩亏自由网平差的实际应用。

二、经典间接平差的基准

在对自由网按经典的最小二乘间接平差时，一般是假定某些待定参数有固定的数值，以此作为平差问题的基准，以求得待估参数的估计值或平差值。显然，其基准是一种“强基准”。

在三角网中，通常假定网中有两个点（A、B）是固定的，或假定一个点（A_1），一条边的方位（$\alpha_{A_2A_3}$）和一条边的边长（$S_{A_4A_5}$）是固定的。由这些固定数据构成这个网的基准。若取全网所有点的纵横坐标作为待定参数，则可列出条件方程

$$\left.\begin{aligned}\hat{x}_A&=x_A^0\\ \hat{y}_A&=y_A^0\\ \hat{x}_B&=x_B^0\\ \hat{y}_B&=y_B^0\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

或

$$\left.\begin{aligned}\hat{x}_1&=x_1^0\\ \hat{y}_1&=y_1^0\\ \operatorname{arctg}\frac{\hat{y}_3-\hat{y}_2}{\hat{x}_3-\hat{x}_2}&=\alpha_{23}^0\\ \sqrt{(\hat{x}_5-\hat{x}_4)^2+(\hat{y}_5-\hat{y}_4)^2}&=S_{45}^0\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

若令

$$\hat{x}_i = x_i^0 + \delta\hat{x}_i, \quad \hat{y}_i = y_i^0 + \delta\hat{y}_i, \tag{4}$$

将（4）式代入（2）和（3）式，并将非线性条件按台劳级数展开且仅取一次项，则（2）和（3）式就变为

$$\left.\begin{aligned} \delta\hat{x}_A &= 0 \\ \delta\hat{y}_A &= 0 \\ \delta\hat{x}_B &= 0 \\ \delta\hat{y}_B &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} &\delta\hat{x}_1 = 0 \\ &\delta\hat{y}_1 = 0 \\ &\rho\frac{\sin\alpha_{23}^0}{s_{23}^0}\delta\hat{x}_2 - \rho\frac{\cos\alpha_{23}^0}{s_{23}^0}\delta\hat{y}_2 - \rho\frac{\sin\alpha_{23}^0}{s_{23}^0}\delta\hat{x}_3 + \rho\frac{\cos\alpha_{23}^0}{s_{23}^0}\delta\hat{y}_3 + w_\alpha = 0 \\ &-\cos\alpha_{45}^0\,\delta\hat{x}_4 - \sin\alpha_{45}^0\,\delta\hat{y}_4 + \cos\alpha_{45}^0\,\delta\hat{x}_5 + \sin\alpha_{45}^0\,\delta\hat{y}_5 + w_s = 0 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

也就是说，经典的三角网平差的基准是由条件方程（2）、（3）或（5）、（6）确定的。在列出上述条件之后，可以按附有条件的间接平差解算。但也可以根据（5）或（6）式消去四个待定参数后再进行平差。

对于测边网，其位置基准和方位基准是由一个固定点A_1和一条边的固定方位角$\alpha_{A_2A_3}$确定的，在考虑尺度比参数时，一般是将网中一部分边长的尺度比固定为$\mu_1 = 1$，作为尺度基准。此时，各观测边长的误差方程为

$$v_{ij} = -\cos\alpha_{ij}^0\delta\hat{x}_i - \sin\alpha_{ij}^0\,\delta\hat{y}_i + \cos\alpha_{ij}^0\delta\hat{x}_j + \sin\alpha_{ij}^0\,\delta\hat{y}_j - s_{ij}^0\,\delta\hat{\mu}_k + l_{ij}, \tag{7}$$

由基准确定的四个条件方程为

$$\left.\begin{aligned} &\delta\hat{x}_1 = 0 \\ &\delta\hat{y}_1 = 0 \\ &\rho\frac{\sin\alpha_{23}^0}{s_{23}^0}\delta\hat{x}_2 - \rho\frac{\cos\alpha_{23}^0}{s_{23}^0}\delta\hat{y}_2 - \rho\frac{\sin\alpha_{23}^0}{s_{23}^0}\delta\hat{x}_3 + \rho\frac{\cos\alpha_{23}^0}{s_{23}^0}\delta\hat{y}_3 + w_\alpha = 0 \\ &\delta\hat{\mu}_1 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

还可以用固定边长确定尺度基准，或由两个已知点确定网的基准。如果认为网中全部边长的尺度比都固定为$\mu = 1$，条件方程（8）中的尺度基准的条件方程（第四式）即变为$\delta\hat{\mu} = 0$，

将它代入误差方程（7），也就消去了尺度比参数，这就是不考虑尺度比的情况。

边角网和导线网的情况与测边网是类似的。

水准网一般是以一个点A的固定高程为高程基准。如果考虑网中的观测高差有若干个尺度比参数，而将某一部分高差的尺度比固定为$\mu_1=1$，作为尺度基准，此时，观测高差的误差方程为

$$v_{ij}=-\delta\hat{x}_i+\delta\hat{x}_j-h^0_{ij}\delta\hat{\mu}_k+l_{ij}。\tag{9}$$

由基准确定了两个条件方程

$$\left.\begin{aligned}\delta\hat{x}_A&=0\\ \delta\hat{\mu}_1&=0\end{aligned}\right\},\tag{10}$$

式中$\delta\hat{x}_i$表示高程参数。如果认为网中全部高差的尺度比都是固定为$\mu=1$，则（10）式中的第二式变为$\delta\hat{u}=0$。将它代入（9）式，也就消去了尺度比参数，这就是一般的不考虑高差尺度比的情况。

三、秩亏自由网平差的基准

按照秩亏自由网平差的“附加条件”解法，需要对所平差的自由网列出d个附加条件，一般可表示为

$$\underset{d\times t}{G^T}\delta\hat{x}=0,\tag{11}$$

并要求G满足

$$BG=0,\tag{12}$$

式中$\underset{n\times t}{B}$是误差方程系数阵。为了计算方便，有时还要求G满足

$$G^TG=E\ .\tag{13}$$

对于按角度平差的秩亏自由三角网，满足（12）式的附加条件是

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{m}\delta\hat{x}_i=0\\ &\sum_{i=1}^{m}\delta\hat{y}_i=0\\ &\sum_{i=1}^{m}(-y_i\delta\hat{x}_i+x_i\delta\hat{y}_i)=0\\ &\sum_{i=1}^{m}(x_i\delta\hat{x}_i+y_i\delta\hat{y}_i)=0\end{aligned}\right\},\tag{14}$$

或写为

$$
\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m}\hat{x}_i=\sum_{i=1}^{m}x_i^0\\
&\sum_{i=1}^{m}\hat{y}_i=\sum_{i=1}^{m}y_i^0\\
&\sum_{i=1}^{m}\left\{(s_i^0)^2\operatorname{arc\,tg}\frac{\hat{y}_i}{\hat{x}_i}\right\}=\sum_{i=1}^{m}\left\{(s_i^0)^2\operatorname{arc\,tg}\frac{y_i^0}{x_i^0}\right\}\\
&\sum_{i=1}^{m}(\hat{x}_i^2+\hat{y}_i^2)=\sum_{i=1}^{m}\left\{(x_i^0)^2+(y_i^0)^2\right\}=\sum_{i=1}^{m}(s_i^0)^2
\end{aligned}\right\}\tag{15}
$$

将（15）式按台劳级数展开并略去二次以上各项，即得(14)，式中 $(s_i^0)^2=(x_i^0)^2+(y_i^0)^2$，m 是网中的点数。

由（15）式可以看到，秩亏自由三角网在按角度平差时，其位置基准是保持 Σx_i 和 Σy_i 不变，方位基准是保持 $\Sigma\left\{(s_i^0)^2\operatorname{arc\,tg}\frac{y_i}{x_i}\right\}$ 不变，而尺度基准是保持 Σs_i^2 不变。

为使附加条件的系数阵满足（13）式，应将 x_i^0 和 y_i^0 改为重心坐标

$$
\overline{x}_i=x_i^0-\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}x_j^0,\qquad \overline{y}_i=y_i^0-\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}y_j^0,\tag{16}
$$

并将（14）式变为

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{m}}\Sigma\delta\hat{x}_i=0\\
&\frac{1}{\sqrt{m}}\Sigma\delta\hat{y}_i=0\\
&\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left\{-\overline{y}_i\delta\hat{x}_i+\overline{x}_i\delta\hat{y}_i\right\}=0\\
&\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left\{\overline{x}_i\delta\hat{x}_i+\overline{y}_i\delta\hat{y}_i\right\}=0
\end{aligned}\right\},\tag{17}
$$

式中

$$
\lambda=\sum_{i=1}^{m}(\overline{x}_i^2+\overline{y}_i^2)=\sum_{i=1}^{m}\overline{s}_i^2,\tag{18}
$$

则位置基准是保持网的重心不变，方位基准是保持各点到重心的距离平方与其方位角乘积之和不变；而尺度基准就是保持各点至重心的距离平方和不变。

对于秩亏自由测边网，如果不考虑尺度比，其附加条件也就是（14）或（17）式中的前三式。因此，其位置基准与方位基准的几何意义与三角网相同。而其尺度基准是认为全部边长的尺度比都固定为 $\mu=1$。如果在秩亏平差中考虑尺度比参数，也可以列出相应于尺度基准的附加条件。

边角网与导线网的秩亏平差与测边网也是类似的。

秩亏自由水准网平差，当不考虑高差的尺度比参数时，其附加条件是

$$\sum_{i=1}^{m} \delta \hat{x}_i = 0 \quad . \tag{19}$$

上式的系数阵满足（12）式，如果还要求它满足（13）式，则这个附加条件应为

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{i=1}^{m} \delta \hat{x}_i = 0 \quad . \tag{20}$$

容易理解，其位置基准是保持 Σx_i 不变，或保持网的重心不变。而尺度基准则是认为全部高差的尺度比参数都固定为 $\mu=1$。当考虑尺度比参数时，也可列出相应于尺度基准的附加条件。

可以看到，秩亏自由网平差（包括加权秩亏平差和拟稳平差）也可以说是“强基准平差”。

四、从基准看秩亏自由网平差的应用

按照观测成果的情况，可以认为自由网有两种类型：一种是只有一期观测成果的控制网，布设这种网的目的主要是为了求定控制点的位置，并且认为各点的位置不变，对于这种控制网，在平差时通常可以根据具体情况任意给定一个基准；另一种网是进行了多期重复观测的监测网，布设监测网的目的是为了比较和分析网中各控制点的变化情况，为此在对监测网进行平差时，不论采用何种平差方法，对于各期观测值应有一个共同的固定的基准，否则便难以对网点的变化情况进行比较和分析。

从上面关于平差问题基准的讨论可以看到，秩亏自由网平差与经典间接平差一样，也具有“强基准”。对于平面网，所不同的仅仅是它不以一个固定点，一条固定边长和一个固定方位作为基准；而是以固定重心，固定各点至重心的距离平方和，及距离平方与其方位角乘积之和作为基准，因此，待估参数仍然是非随机量，它是自由网的一种平差方法。对于这种平差方法的应用，应该注意以下几点：

1、对于只有一期观测值，且可以任意选定基准的自由网，由于采用秩亏平差法的计算工作量较经典间接平差大，且在〔3〕中已证明，在一定的情况下，其平差结果可以与经典间接平差一样。所以，对这种网不宜采用秩亏自由网平差。

2、对于具有多期观测成果的监测网，对每期观测值的平差可以采用经典间接平差，也可以采用秩亏自由网平差或其它方法，但经典平差的成果与基准点的位置有关，因此，从受基准位置的影响较小来看，采用秩亏平差法（包括加权秩亏平差和拟稳平差）有它的优越性。

3、在采用秩亏平差法对具有多期观测的监测网进行平差时，应在第一期平差中根据实际情况选定一个基准（或参考系），而在以后各期平差中，就不能任意改变其基准，也不存在选择最佳参考系的问题。但〔3〕已证明，还可以将前一期的平差结果作为本期平差的参考系，其结果与采用原参考系平差的结果完全一致。

4、对于任何自由网，按秩亏自由网平差求得的参数的方差阵，都是相对于它的重心基准系统的精度，因此，将它们称为内精度，用来作为衡量控制网强度的一种指标是适合的。

从以上讨论可以看到，秩亏自由网平差在实用上有一定的价值。既不应该认为它可以完全取代其它方法，而完全否定它的价值也是欠妥的。

参考文献

〔1〕 B.Schaffrin, Ober die Verwendung Stochastischer Vorinformation in freine Netzen, Symposium der FIG-Kommissionen 5/6 Graz. Österreich, 1984.

〔2〕 陶本藻，自由网平差与变形分析，测绘出版社，1984.

〔3〕 刘大杰，论亏秩自由网平差，武汉测绘学院学报，1，1981.

On the Application of the Adjustment with Rank-defects of Free Networks from the Datum of the Adjusted Problems

Cui Xizhang　　Liu Dajie

Abstract

In this paper the datum of the classical least squares adjustment of indirect observations and the adjustment with rank-defects of free networks is introduced. According to the mentioned, the practical application of the adjustment with rank-defects of free networks is further discussed.

[Key words] datum; rank-defects of free networks; adjustment