DOI:10.13203/j.whugis1985.04.005

关于精度评定和精度抵尝问题

鲁 林 成

摘 要

本文讨论了两个问题：1）控制网的精度评定中，顾及起始数据误差影响的必要性。並提供了五个算例，它们都说明了上述问题的重要，並且否定了建立控制网时，传统上要求起始数据误差影响较多地小于测量误差影响的要求。2）当高级控制网精度较低时，是否需要"重建"？本文提出了以低级控制网的高精度来抵偿高级网的低精度，以及改变低级网布网形式配以相应观测精度等两个措施，从而认为"重建"不是不可避免的。

一、引 言

国家的或为工程建设布设的平面或高程测量控制网，是按全面规划、统一安排、从整体到局部、由高级到低级布设的。也有部分控制网，采取一次布设成为边长较短的全面网。即使这样，为了工程和测图的需要，仍然要在这样的全面网中，以插点、线形锁或导线等形式予以加密。因而，网的划分等级和逐级下移的原则总是不变的[1]。对测量控制网的精度估算、等级划分及其必要精度等问题，始终是测量界密切注意和探讨的问题。本文拟讨论下列问题：1、控制网某些平差元素的精度评定问题；2、当高等级控制网精度较低时，有关精度的抵偿或调整问题；3、当高级控制网精度较低时，有关精度抵偿的第二个措施。

二、控制网某些平差元素的精度評定問題

在平差计算逐级布设的测量控制网时，人们是将低级控制网强制附合到起始数据（高级测量控制网的点或边）上去的。而在评定低级控制网所求元素的精度时，习惯上是只考虑低级控制网观测误差对所求元素的影响，而不考虑起始数据误差对所求元素的影响。理由是：人们认为起始数据是高级控制网的平差元素，它们具有较高的精度，以致于它们对低级控制网所求元素的影响比低级控制网观测误差对同一元素的影响要小得多，因而，在实际上可以忽略不计。有关这方面的论述，散见在许多有关资料中。例如，有的文献[2]在讨论控制网的必要精度时，假设起始数据误差对低一级控制网所求元素的影响仅为低一级控制网观测误差对同一元素影响的⅕或¼。这样，在评定精度时，就不必顾及起始数据误差影响了。顺便指出，上述文献虽然主观上要求起始数据误差对低级控制网所求元素的影响很小，但在具体计算高级控制网必要精度时，采取了某些近似方法，因之，规定出的高级控制网精度较低，起始数据误差对低级控制网所求元素的影响，也就较设想的大得多了[3]。

现在的问题是：按照现行有关三角控制网细则布设的控制网中，起始数据误差与低级控

本文 1985 年 2 月收到

制网的观测误差对同一元素的影响究竟那一个大？大致的比值又怎么样？这个问题，随着测量学科某些领域中科研和生产实践的需要，不断地被探索着，并且取得了一定的成果。

在考虑起始数据误差影响时，按不同的平差方法，低级网某平差元素都可以推演成为各级控制网观测值的函数，从而得出求该平差元素精度的公式[4]，[5]。例如，某布设成三个等级的三角控制网，当该网都按间接平差法计算时，低级网某平差元素的函数式为

$$\Phi=\Phi(\hat{x}_1,\ \hat{x}_2,\ \cdots;\ \hat{y}_1,\ \hat{y}_2,\ \cdots;\ \hat{z}_1,\ \hat{z}_2,\ \cdots;\ \hat{\lambda}_1,\ \hat{\lambda}_2,\ \cdots),\tag{1}$$

式中$\hat{x}_i$，$\hat{y}_i$和$\hat{z}_i$分别为三级、二级和首级三角控制网按间接平差法计算时，未知数的最或然值；$\hat{\lambda}_i$为首级控制网中的某些直接观测值——基线及方位角。上式按台劳公式展开，取至一次项后得权函数式：

$$\delta\Phi=f_X^T\delta_X+f_Y^T\delta_Y+f_Z^T\delta_Z+f_\lambda^T\Delta\lambda\ 。\tag{2}$$

为了评定其精度，通过逐级代换，把它展开成各级控制网的观测值和某些直接观测值的函数：

$$\delta\Phi=F_X^T l_X+F_Y^T l_Y+F_Z^T l_Z+F_\lambda^T l_\lambda,\tag{3}$$

式中l_X，l_Y，l_Z和l_λ分别为各级控制网的观测值及某些直接观测值向量；F_X^T，F_Y^T，F_Z^T，及F_λ^T则为它们的系数阵。因而低级网某平差元素的总的中误差按协方差传布律，得

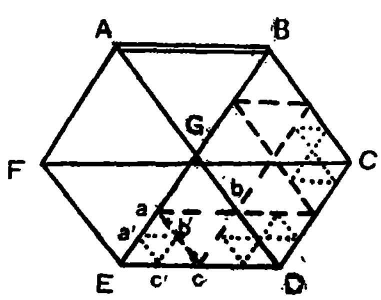
$$M_\Phi^2=\mu_X^2\frac{1}{p_X}+\mu_Y^2\frac{1}{p_Y}+\mu_Z^2\frac{1}{p_Z}+\mu_\lambda^2\frac{1}{p_\lambda},\tag{4}$$

式中μ_X，μ_Y，μ_Z及μ_λ分别为各级控制测量的单位权中误差和直接观测值的单位权中误差；$\frac{1}{p_X}$，$\frac{1}{p_Y}$，$\frac{1}{p_Z}$和$\frac{1}{p_\lambda}$则为各级控制测量和直接观测值对所求函数Φ影响的权倒数。

当平差计算时，按条件平差法、附有条件的间接平差法或附有未知数的条件平差法，求低级网中某平差元素的精度，只是函数式的形式，求权倒数的方法不同，而最终形式都可以写成（4）式。

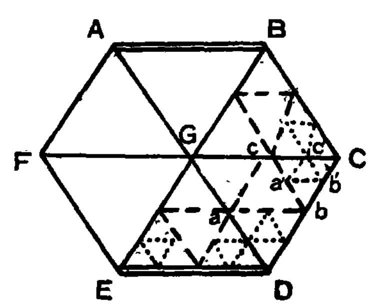
按照上述思路，可以求出在低级控制网中某元素受本级控制网观测误差影响与受起始数据误差影响的情况。为此选用下列控制网来讨论。

1、有一条基线，边长为13公里的正六边中心多边形的二等三角测量控制下，分别插入三点的加密图形，作为三、四等三角控制网（图一）。



——二等三角网
---------三等三角网
……四等三角网

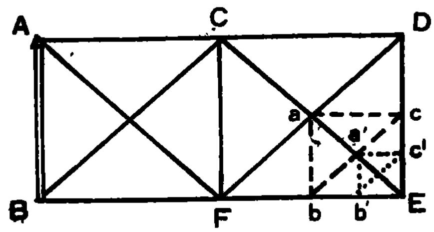
图一



图二

2、设有两条基线，边长为13公里的正六边中心多边形的二等三角测量控制下，分别插入三点的加密图形，作为三、四等控制网（图二）。

3、设有一条基线，多数边长为13公里的双大地四边形的二等三角测量控制下，分别插入三点的加密图形，作为三、四等三角控制网（图三）。



图三

计算时，以角度为元素，按间接平差法进行。各级控制网的测角中误差及基线扩大边的相对中误差取用我国三角测量细则中有关规定（表1）。这三个典型图形中，各级控制网最弱边的测量中误差及各高级控制网和基线的观测误差，对它们的影响分别记于表2。

从表2中的数据可见，对上述三种典型图形来说，二等三角测量中，本级网的观测误差对所求边的影响占边总的中误差（平方、下同）的63%～75%，而起始数据误差影响占

表1

基线扩大边的最大相对误差	测角中误差		
	二等	三等	四等
1∶250000	±1″0	±1″8	±2″5

表2

典型图形	级别	所求元素中误差	测量误差 $m_x^2(m_x^2/M^2)$	起始误差影响 $m_a^2(m_a^2/M^2)$	总误差 M^2	$m_x : m_a$
Ⅰ	二	Ms_2	0.65 (72%)	0.25 (28%)	0.90	1∶0.62
	三	Ms_3	0.11 (31%)	0.24 (69%)	0.35	1∶1.48
	四	Ms_4	0.051(34%)	0.101(66%)	0.152	1∶1.41
Ⅱ	二	Ms_2	0.24 (63%)	0.14 (37%)	0.38	1∶0.76
	三	Ms_3	0.11 (48%)	0.12 (52%)	0.23	1∶1.06
	四	Ms_4	0.051(40%)	0.076(60%)	0.127	1∶1.22
Ⅲ	二	Ms_2	0.78 (75%)	0.26 (25%)	1.04	1∶0.58
	三	Ms_3	0.21 (44%)	0.27 (56%)	0.48	1∶1.13
	四	Ms_4	0.104(49%)	0.109(51%)	0.213	1∶1.02

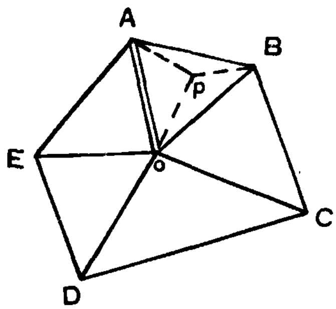
25%～37%；在三、四等加密网所求边总的中误差中，本级网测量误差仅占31%～49%，而

起始数据误差影响却占51%～69%。由此可见，对于各级控制网来说，所求元素的精度中，起始数据误差影响都占相当大的比重，而在三、四等控制网中，起始数据误差影响一般都大于本级控制网观测误差的影响，有的起始数据误差影响 m_s 竟为本级控制网观测误差影响的1.48倍。

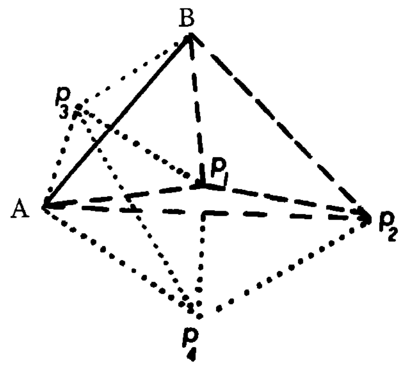
上述例子是典型图形（图一到图三）的情况，为避免特殊性，再讨论一般情况。这里收集了两个一般的三角控制网（图四和图五）[5]，并以表1中的精度计算了图四中AP边及图五中AP_4边的精度，记于表3。

表3

所求边	m_x^2	m_n^2	M^2	$m_x : m_s$
S_{AP}	21.29(23%)	69.96(77%)	91.25	1:1.81
S_{AP_4}	7.75(48%)	8.27(52%)	16.02	1:1.03



图四



图五

从表3中可以看出，在所求元素的精度中，测量误差影响占23%～48%，而起始数据误差影响却占52%～77%；起始数据误差大于测量误差的影响。

从上述的一些算例可以看出，如果在评定所求元素精度时，只顾及本级网观测误差的影响，而忽略起始数据误差的影响，这是不妥当的。因为这样计算的结果，不能反映元素的实际精度，而仅为实际精度的一部分。设某元素的测量误差影响m_X与起始数据误差影响 m_n之比为

$$\frac{m_X}{m_s} = \frac{1}{x}, \qquad (5)$$

则该元素总精度M为

$$M^2=m_x^2+m_a^2=(1+x^2)\,m_x^2\ 。$$

故

$$m_x=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}M。\qquad(6)$$

因之，按惯用的评定精度的办法，计算的精度仅为该元素总精度的$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$倍。在上述算例中，首级（二级）网中测量误差影响约为总精度80％左右，而在三、四等网中，测量误差影响m_x仅占总精度的60％左右。例如，在图一的四等三角网中，最弱边边长中误差实为±0.39分米，但是，人们却以±0.23分米来代替；在图三的三等三角网中，最弱边边长中误差实为±0.69分米，而人们却以为是±0.46分米。可见，现行计算精度的结果是偏高的，这种“精度偏高”现象是个假象，不是该元素的真实精度。

在评定某元素的精度时，为了能全面地反映出该元素的真实精度，在顾及本级网观测误差影响的同时，顾及起始数据误差的影响是必要的。

三、高級控制网精度較低时有关精度的撫尝或調整問題

由于某个历史时期客观条件的限制，在建立高级三角网时，应用了较低的观测精度观测，或随着现代化建设要求的提高，对高级三角网提出了更高的精度要求。例如，按测量细则的精度（表1）观测了图一中的二、三、四等三角网，此时，四等三角网最弱边的总误差为±0.389分米，其中，四等三角网测量误差对该边的影响m_x等于总的中误差M的58％，而该边的总的相对中误差为1/84000（表4）。如果在某一历史时期，仅以较低的观测精度，例如以±1.5″的测角中误差观测了二等三角网，在这种低精度的三角网控制下，虽然仍按现行测量细则观测了三、四等三角网。但四等网最弱边的总的中误差将降为±0.46分米，其中，四等三角网测量误差对该边的影响m_x仅等于总的中误差M的49％，而该边的总的相对中误差为1/71000。当这样的精度不能满足予期要求时，对精度较低的二等网是否有必要“重建”？重建意味着应用较高的精度对旧网重新观测和平差计算，显然，这个工作量是相当大的。

如果考虑到直接应用于某项工程，或作为地形控制的主要起始数据的是某个等级的三角网，例如是四等三角网的边长（或两个相邻三角点），则相应问题只要求四等三角网的最弱边边长的相对（总的）中误差能满足相应的精度要求，而没有必要提出其它的附加要求。

在这个要求下，旧网的“重建”不是不可避免的。因为从（4）式可以看出：影响所求函数总精度有两类，一类是各级三角网对所求函数影响的权倒数，另一类是各级三角网的观测精度。前者的值取决于网的结构，对于已经布设或拟布设的三角网来说，它是个常量，而后者是可以调整的。一旦发现某一等级三角网，例如二等三角网的精度较低时，则可以调整其他等级，例如三、四等三角网的观测精度，使得所求函数的总精度能满足予期的要求。这样做的实质，就是以低级网的高精度来抵偿高级网的低精度。

表 4

观测精度	$\frac{1}{p_x}=0.008$	$\frac{1}{p_y}=0.011$	$\frac{1}{p_z}=0.049$	$\frac{1}{p_\lambda}=0.057$	m_x^2	m_n^2	M^2	$\frac{M}{S}$
	$\mu_x^2\frac{1}{p_x}$	$\mu_y^2\frac{1}{p_y}$	$\mu_z^2\frac{1}{p_z}$	$\mu_\lambda^2\frac{1}{p_\lambda}$	(m_x)		(M)	
$M_z=\pm1''.0$ $M_y=\pm1''.8$ $M_x=\pm2''.5$ $M_s=\pm0.52$ 分米	0.051	0.036	0.049	0.015	0.051 (±0.226)	0.100	0.151 (±0.389)	$\frac{1}{84000}$
$M_z=\pm1''.5$ $M_y=\pm1''.8$ $M_x=\pm2''.5$ $M_s=\pm0.52$ 分米	0.051	0.036	0.110	0.015	0.051 (±0.226)	0.161	0.212 (±0.460)	$\frac{1}{71000}$
$M_z=\pm1''.5$ $M_y=M_x=\pm1''.0$ $M_s=\pm0.52$ 分米	0.008	0.011	0.110	0.015	0.008 (±0.089)	0.136	0.144 (±0.379)	$\frac{1}{86000}$

例如当上述的二等三角网的观测精度（$\mu_z=\pm1''.5$）低于表1的要求，而三、四等三角网的观测精度按表1要求进行时，从而使四等三角网最弱边的精度从$\frac{1}{84000}$降至$\frac{1}{71000}$。为了抵偿由于二等三角网观测精度较低的影响，可以适当提高三、四等三角网的观测精度，例如以$\mu_y=\mu_x=\pm1''.0$，则四等三角网最弱边的相对精度即可提高到$\frac{1}{86000}$（表3），从而超过了各级三角网均按表1精度观测的结果。

显然，这种提高低级三角网观测精度以抵偿由于高级三角网的观测精度较低而造成损失的思想，对于我国旧二网的“改造”也是适用的。

四、高級控制网精度較低时有关精度抵偿的第二个措施

为了调整不同等级控制网中的观测精度，以抵偿高级控制网精度较低的问题，也可以利用布网方案的不同来实施。下面以典型的布网方案来讨论逐级布网和全面网对低级控制网的精度影响问题。设在图一的二等三角控制下，在三个二等点中依次插入三个新点的三、四等三角网时，四等三角网最弱边边长的精度为

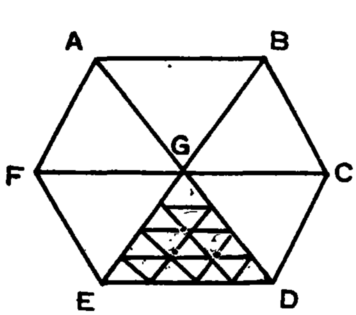
$$M_s^2=\frac{1}{p_x}\mu_x^2+\frac{1}{p_y}\mu_y^2+\frac{1}{p_z}\mu_z^2+\frac{1}{p_\lambda}\mu_\lambda^2\ 。$$

而在二等三角控制下，在三个二等点中，直接插入十二个新点的全面网（图六），则低级网最弱边边长的精度为

$$M_s'^2=\frac{1}{p_x'}\mu_x'^2+\frac{1}{p_Z'}\mu_Z'^2+\frac{1}{p_\lambda'}\mu_x'^2\ 。$$

当二等网边长为十三公里，图一和图六均为典型图形时，低级网最弱边边长的权倒数见表5。

从表5中可以看出：对于布设到同样密度的两种不同方案的典型图形来说，基



图六

表5

图	$\frac{1}{p_x}$	$\frac{1}{p_y}$	$\frac{1}{p_z}$	$\frac{1}{p_\lambda}$
一	0.008	0.011	0.049	0.057
六	$\frac{1}{p_x'}$ 0.019		0.048	0.057

线和二等网对低级网最弱边边长影响的权倒数都是相等的；而在逐级布网中，三、四等两个

级别三角测量对低级网最弱边影响权倒数之和与全面网对相应边影响权倒数相等。即：

$$\frac{1}{p_z}=\frac{1}{p'_z}, \qquad \frac{1}{p_\lambda}=\frac{1}{p'_\lambda},$$

$$\frac{1}{p_x}+\frac{1}{p_y}=\frac{1}{p'_x}。$$

这种规律，当在图一和图六的低级三角网控制下，再进一步布设正形的Ⅰ、Ⅱ级导线时，各级控制网对Ⅰ、Ⅱ级导线的最弱点坐标精度的影响也依然存在。例如，在图一中，布设的Ⅱ级导线，其最弱点坐标的精度为

$$M^2_{X_{II}}=\frac{1}{p_{X_{II}}}\mu^2_{II}+\frac{1}{p_{X_I}}\mu^2_I+\frac{1}{p_{X_x}}\mu^2_x+\frac{1}{p_{X_y}}\mu^2_y+\frac{1}{p_{X_z}}\mu^2_z+\frac{1}{p_{X_\lambda}}\mu^2_\lambda,$$

$$M^2_{Y_{II}}=\frac{1}{p_{Y_{II}}}\mu^2_{II}+\frac{1}{p_{Y_I}}\mu^2_I+\frac{1}{p_{Y_x}}\mu^2_x+\frac{1}{p_{Y_y}}\mu^2_y+\frac{1}{p_{Y_z}}\mu^2_z+\frac{1}{p_{Y_\lambda}}\mu^2_\lambda,$$

式中 $1/p_{X_i}$ 表示 i 级控制对Ⅱ级导线最弱点X坐标影响的权倒数。在图六中布设Ⅱ级导线，其最弱点坐标的精度为

$$M'^2_{X_{II}}=\frac{1}{p'_{X_{II}}}\mu'^2_{II}+\frac{1}{p'_{X_I}}\mu'^2_I+\frac{1}{p'_{X_x}}\mu'^2_x+\frac{1}{p'_{X_z}}\mu'^2_z+\frac{1}{p'_{X_\lambda}}\mu'^2_\lambda,$$

$$M'^2_{Y_{II}}=\frac{1}{p'_{Y_{II}}}\mu'^2_{II}+\frac{1}{p'_{Y_I}}\mu'^2_I+\frac{1}{p'_{Y_X}}\mu'^2_X+\frac{1}{p'_{Y_z}}\mu'^2_z+\frac{1}{p'_{Y_\lambda}}\mu'^2_\lambda,$$

上述权倒数见表6。

表6

<table>
<tr><th colspan="2">图</th><th>$\frac{1}{p_{II}}$</th><th>$\frac{1}{p_I}$</th><th>$\frac{1}{p_x}$</th><th>$\frac{1}{p_y}$</th><th>$\frac{1}{p_z}$</th><th>$\frac{1}{p_\lambda}$</th></tr>
<tr><td rowspan="2">一</td><td>X</td><td>0.0014</td><td>0.0012</td><td>0.0006</td><td>0.0005</td><td>0.0029</td><td>0.0027</td></tr>
<tr><td>Y</td><td>0.0008</td><td>0.0013</td><td>0.0007</td><td>0.0002</td><td>0.0023</td><td>0.0004</td></tr>
<tr><td rowspan="2">六</td><td>X</td><td>0.0014</td><td>0.0012</td><td colspan="2">$\frac{1}{p'_x}$
0.0010</td><td>0.0030</td><td>0.0031</td></tr>
<tr><td>Y</td><td>0.0008</td><td>0.0013</td><td colspan="2">0.0009</td><td>0.0022</td><td>0.0010</td></tr>
</table>

从表6中可见：

$$\frac{1}{p_{X_x}}+\frac{1}{p_{X_y}}=\frac{1}{p'_{X_x}}$$

$$\frac{1}{p_{Yx}}+\frac{1}{p_{Yy}}=\frac{1}{p'_{Yx}}$$

而其它权倒数则对应相等。

这一规律揭示了在上述图形中，逐级布网与全面网之间的内在关系，充分地应用这一规律，对调整各级三角网的观测精度有重要意义。例如，当图一中二、三、四等三角网和图六中二等三角网及基线按表 1 精度观测，而图六中的全面网按表 1 中三等和四等两种测角精度观测时，低级网最弱边边长的总误差见表 7 。

表 7

<table>
<tr><th>图</th><th>$\frac{1}{p_x}2.5^2$</th><th>$\frac{1}{p_y}1.8^2$</th><th>$\frac{1}{p_z}1.0^2$</th><th>$\frac{1}{p_\lambda}0.56^2$</th><th>$M_s^2$
(M_s)</th></tr>
<tr><td>一</td><td>0.051</td><td>0.036</td><td>0.049</td><td>0.015</td><td>0.151
(±0.39)</td></tr>
<tr><td>六</td><td colspan="2">$\frac{1}{p'_x}2.5^2$
0.119</td><td>0.049</td><td>0.015</td><td>0.183
(±0.43)</td></tr>
<tr><td>六</td><td colspan="2">$\frac{1}{p'_x}1.8^2$
0.062</td><td>0.049</td><td>0.015</td><td>0.126
(±0.35)</td></tr>
<tr><td>六</td><td colspan="2">$\frac{1}{p'_x}2.1^2$
0.084</td><td>0.049</td><td>0.015</td><td>0.148
(±0.38)</td></tr>
</table>

从表 7 中的数字可见，和前述的按有关细则布设的逐级布网（图一）比较，当全面网（图六）的测角精度取细则中规定的三等网的测角精度时，全面网的精度高于逐级布网；但当全面网的测角精度为细则中规定的四等网的测角精度时，全面网的精度低于逐级布网。要使全面网的精度与逐级布网的精度相当，全面网的测角精度应这样配置，即

$$\mu'_x=\pm\sqrt{\frac{\frac{1}{p_x}\mu_x^2+\frac{1}{p_y}\mu_y^2}{\frac{1}{p'_x}}}=\pm 2''.1,$$

也就是说，要全面网的精度和逐级布网的精度相当，全面网的测角精度约为 $\pm 2''.1$，即 $\mu_3 < \mu'_x < \mu_4$，它介于三、四等三角网测角精度之间。

由此可见，为了达到抵偿高级网精度较低的目的，除去调整测角精度外，还可以调整布网的形式。

例如，当二级网（图一）测角精度较低（$\mu = \pm 1''.5$），而要加密到3.25公里边长后的最弱边边长精度与按细则观测精度要求布设的逐级布网相当，方案之一是提高三、四等网的观测精度，即 $\mu_y = \mu_z = \pm 1''.0$（表3）；方案之二是：改逐级布网为全面网，当全面网的测角精度为

$$\mu'_x = \pm\sqrt{\frac{\frac{1}{p_x}\mu_x^2 + \frac{1}{p_y}\mu_y^2 + \frac{1}{p_z}\mu_z^2 - \frac{1}{p'_z}\mu'^2_z}{\frac{1}{p'_x}}} = \pm 1''.2 \text{。}$$

这时，全面网最弱边边长总精度为

$$M_s^2 = \frac{1}{p'_x}\mu'^2_x + \frac{1}{p'_z}\mu'^2_z + \frac{1}{p_\lambda}\mu_\lambda^2 = 0.152,$$

而 $\frac{M_s}{s} = \frac{1}{83000}$

和方案一相比（见表4）可见：测角精度从 $\pm 1''.0$ 降到了 $\pm 1''.2$，但能达到同样的精度要求。

参 考 文 献

〔1〕 克拉索夫斯基、达尼洛夫，大地测量学上卷第一分册，中译本，地质出版社，1955.

〔2〕 A.И.阿格罗斯金，大地测量中的个别问题；三角测量（第三卷），中译本，武汉测绘学院，1956.

〔3〕 鲁林成、章书寿，对城市测量规范（草案）及其说明中若干问题的意见，测绘通报，3，1964.

〔4〕 鲁林成、章书寿，关于城市及工业地区大比例尺测图控制网必要精度问题的讨论，中国测绘学会第一届综合性学术年会论文选集，中国工业出版社，1966.

〔5〕 於宗俦、鲁林成主编，测量平差基础，测绘出版社，1983.

About the Evaluation and Compensation of Accuracy

Lu Lincheng

Abstract

This paper deals with the following problems,

1) The necessity of taking the influence of initial datum error into account when estimating the accuracy of a control network.

2) Is it necessary to reestablish the principal network when its accuracy is lower than that of the secondary one?

For the first problem five examples have been given to show the importance and to negate the traiditional requirment that the influence of the initial datum error must be much less than that of the observation error, when establishing a control network. As for the second problem, two measures have been proposed, i. e. to compensate low accuracy of the principal network by high accuracy of the secondary one and to change the configuration of the network using an appropriate observation accuracy. It is believed that the reestablishment of the principal network can be avoided.